

INGENIERÍA

CIVIL Y CONSTRUCCIÓN

Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)



[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)

Ing. Juan Emilio Ortega García



Diseño de estructuras de **CONCRETO ARMADO**

Tomo I

Concreto armado - Flexión - Diseño de vigas con acero en tracción y compresión
Resistencia al corte y tracción diagonal - Adherencia, anclaje y longitud de desarrollo



Madrid 19 Enero 2019

J. D. Ortiz P.

J. D. ORTIZ P.

Diseño de estructuras de
CONCRETO ARMADO
Tomo I





Diseño de estructuras de concreto armado. Tomo I

Autor: Ing. Juan Emilio Ortega García

© Derechos de autor registrados:

Empresa Editora Macro EIRL

© Derechos de edición, arte gráfico y diagramación reservados:

Empresa Editora Macro EIRL

Corrección de estilo:

Milton A. Gonzales M.

Coordinación de arte y diseño:

Alejandro Marcos León

Diagramación:

Paul Escobar Tantaleán

Ilustración:

Miguel Almeida Rojas

Edición a cargo de:

© Empresa Editora Macro EIRL

Av. Paseo de la República N.° 5613, Miraflores, Lima, Perú

☎ Teléfono: (511) 748 0560

✉ E-mail: proyecto@editorialmacro.com

🌐 Página web: www.editorialmacro.com

Primera edición: setiembre de 2014

Primera reimpresión: abril de 2015

Tiraje: 2000 ejemplares

Impresión

Talleres gráficos de la Empresa Editora Macro EIRL

Jr. San Agustín N.° 612-624, Surquillo, Lima, Perú

ISBN N.° 978-612-304-217-2

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2015-05106

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin previa autorización de la Empresa Editora Macro EIRL.

JUAN EMILIO ORTEGA GARCÍA

Ingeniero civil por la Universidad Ricardo Palma, con estudios de posgrado en Estructuras de Acero, en la Pontificia Universidad Católica del Perú; posgrado en Estructuras y Construcciones de Acero y Concreto, en la Universidad Central y la Universidad Simón Bolívar de Venezuela; estudios de posgrado en Planeamiento, Control y Economía en la Industria de la Construcción, en la City University de Londres; y estudios de Diseño de Estructuras de Acero, en el Westminster College de Londres. Posee una maestría en Construcción y Gestión Ambiental por la Universidad Nacional Federico Villarreal.

Ha sido profesor del curso «Estructuras en Acero, Concreto y Supervisión de Obras», en las escuelas de pre y posgrado de las universidades Ricardo Palma y Federico Villarreal, así como profesor del curso «Estructuras de Concreto y Acero», en la Universidad Metropolitana de Caracas. Asimismo, participó como expositor principal de los cursos «Diseño y Supervisión en Estructuras de Concreto y Acero» y «Estructuras de Concreto y Acero», en CAPECO, ACI, el Colegio de Ingenieros y en distintas universidades a nivel nacional.

Es autor de los libros *Manual de estructuras de concreto armado e Inspección de estructuras de concreto armado* para la editorial CAPECO, publicó diversos libros sobre estructuras de concreto, supervisión de obras y estructuras de acero, utilizados en distintas universidades a nivel nacional e internacional.

Prestó servicios laborales como ingeniero estructural en Proyecto Perú - BIRF, Plantas Industriales INDUPERÚ y Selection Trust, en Londres, Inglaterra; también se desempeñó como jefe de estructuras en INELECTRA S. A. y en la Empresa Constructora DELPRE, ambas en Venezuela. Además, ocupó el cargo de supervisor de obras para diversas entidades públicas y privadas, como: CORDECALLAO, Región Callao, Ministerio del Interior, Ministerio de Transportes, Ministerio de Vivienda, Región Lima, ENAPU Perú, EMAPE, Región Puno, Municipalidad de Lima, SEDAPAL, ODEBRECH, Graña y Montero, CESEL y Nippon.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. CONCRETO ARMADO	13
1.1 Concreto.....	13
1.1.1 Tipos de concreto y usos del mismo	14
1.1.2 Requisitos que debe cumplir el concreto	14
1.1.3 Formación y proceso de formación del concreto.....	14
1.1.4 Tipos de cemento Portland, principales usos y especificaciones	15
1.1.5 Agregados	19
1.2 Resistencia y deformación a compresión del concreto.....	19
1.3 Resistencia a tracción del concreto.....	21
1.4 Resistencia al esfuerzo cortante y compresión combinadas: el Círculo de Mohr	21
1.4.1 Comportamiento del esfuerzo biaxial	22
1.4.2 Comportamiento del esfuerzo de compresión triaxial	22
1.5 Confinamiento del concreto por el refuerzo	24
1.5.1 Concreto confinado por espirales.....	27
1.5.2 Concreto confinado por estribos rectangulares	28
1.6 Retracción o contracción	31
1.7 Concreto ligero	31
1.8 Acero de refuerzo.....	31
1.8.1 Tipos de acero de refuerzo	32
1.8.2 Calidades y resistencias del acero	33
1.8.3 Curvas esfuerzo-deformación	34
1.8.4 Aceros peruanos	37
 CAPÍTULO 2. ANÁLISIS, DISEÑO, RESISTENCIA Y SERVICIABILIDAD.....	 39
2.1 Métodos de diseño	39
2.2 Cargas	39
2.3 Métodos de análisis	40
2.4 Redistribución de momentos negativos en elementos continuos de concreto armado sujetos a flexión.....	40

2.5 Definiciones y consideraciones importantes.....	41
2.6 Resistencia de diseño.....	42
2.7 Resistencia requerida para la combinación de cargas.....	44

CAPÍTULO 3. FLEXIÓN47

3.1 Generalidades y consideraciones fundamentales.....	47
3.2 Casos de flexión en secciones rectangulares con acero en tracción	51
3.2.1 Estado elástico no agrietado:.....	51
3.2.2 Estado elástico agrietado.....	53
3.2.3 Estado de rotura	55
3.2.4 Cuantía máxima de refuerzo	59
3.2.5 Cuantía mínima de refuerzo	60
3.3 Vigas rectangulares con acero en tracción (diseño a la rotura) o por resistencia	63
3.4 Tipos de solicitación (tres casos)	69
3.5 Relaciones a flexión, separación de varillas y recubrimientos	78
3.5.1 Separación de varillas por temperatura.....	79
3.5.2 Límites para el espaciamiento del refuerzo	79
3.5.3 Protección de concreto para el refuerzo o recubrimiento	80
3.6 Flexión en secciones simétricas de forma cualquiera.....	82
3.6.1 Consideraciones principales.....	82
3.6.2 Pasos a seguir para resolver el problema	82
3.7 Control de deflexiones	84
3.7.1 Métodos para controlar las deflexiones.....	84
3.8 Variaciones en información de corte según capítulo 11 ACI-2011.....	91
3.9 Transferencia de momentos a columnas	92

CAPÍTULO 4. LOSAS ARMADAS EN UN SENTIDO.....93

4.1 Generalidades	93
4.2 Método simplificado de análisis	93
4.2.1 Condiciones para su aplicación.....	93
4.3 Losas sólidas o macisas armadas en una sola dirección.....	96
4.4 Losas nervadas armadas en una sola dirección.....	101
4.4.1 Características	101

4.4.2 Refuerzo mínimo y máximo:	103
4.4.3 Espaciamiento máximo de varillas (por control de grietas).....	103
4.4.4 Recubrimiento mínimo y mínimo espesor de losa superior para resistencia al fuego.....	104
4.5 Diseño de aligerados o losas aligeradas (armadas en una sola dirección).....	109

CAPÍTULO 5. DISEÑO DE VIGAS CON ACERO EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN....115

5.1 Generalidades	115
5.2 Análisis	115
5.3 Cedencia total del acero.....	117
5.4 Acero a compresión no cede.....	118
5.5 Falla balanceada.....	118

CAPÍTULO 6. DISEÑO DE VIGAS “T”129

6.1 Generalidades	129
6.2 Interpretación de la recomendaciones del ACI-2011 para vigas “T” (con acero en tracción solamente)	130
6.3 Diseño de vigas “T”	130
6.4 Análisis de vigas “T”	131
6.5 Ejemplos	134

CAPÍTULO 7. RESISTENCIA AL CORTE Y TRACCIÓN DIAGONAL139

7.1 Generalidades	139
7.1.1 Deducción del esfuerzo cortante.....	139
7.2 Comportamiento del cortante y esfuerzo que toma el concreto	140
7.2.1 Equilibrio en el tramo de cortante de una viga	141
7.2.2 Tipos de falla a cortante	143
7.2.3 Fórmulas prácticas proporcionadas por el ACI.....	144
7.3 Comportamiento y esfuerzo de corte que toma la armadura	144
7.3.1 Análisis del refuerzo de acero en el alma.....	145
7.4 Corte en viga según el ACI - 2011.....	147
7.4.1 Tipos de refuerzo por corte	148
7.4.2 El refuerzo resistente por cortante “Vs”	149
7.4.3 Límites de separación para el refuerzo por corte	149
7.4.4 Refuerzo mínimo por corte	150

7.4.5 Diseño de refuerzo por corte.....	150
7.4.6 Cortante en losas y zapatas	151
7.5 Ejemplos	152

CAPÍTULO 8. ADHERENCIA, ANCLAJE Y LONGITUD DE DESARROLLO157

8.1 Adherencia y anclaje.....	157
8.2 Adherencia por flexión.....	158
8.3 Análisis y comportamiento de la resistencia por adherencia.....	159
8.4 Efectos de la adherencia por la ubicación de las varillas.....	161
8.5 Fallas por fisuración	161
8.5.1 Confinamiento.....	161
8.6 Longitud de anclaje o desarrollo del refuerzo	162
8.7 Longitud de anclaje en varillas con acero en tracción.....	162
8.8 Longitud de anclaje en varillas con acero en compresión.....	165
8.9 Ganchos estándar	165
8.10 Empalmes de varillas	168
8.11 Problemas de aplicación	169

CAPÍTULO 9. ESCALERAS173

9.1 Generalidades	173
9.2 Dimensionamiento de escaleras y cargas según las normas vigentes.....	174
9.3 Tipos de escaleras	175

CAPÍTULO 10. COLUMNAS185

10.1 Generalidades	185
10.1.1 Dimensiones de diseño para elementos sometidos a compresión.....	185
10.1.2 Límites del refuerzo (áreas de acero).....	186
10.2 Tipos de columna.....	186
10.2.1 Columnas cortas	186
10.2.2 Análisis de columnas rectangulares con acero en dos caras	189
10.2.3 Análisis de columnas rectangulares con acero en las cuatro caras	203
10.2.4 Columnas cortas sometidas a carga axial y flexión biaxial.....	208
10.2.5 Columnas largas o esbeltas	219

10.2.6 Columnas sometidas a cargas axiales	220
10.2.7 Columnas sometidas a flexocompresión	222
10.2.8 Diseño de columnas esbeltas de concreto armado según el A.C.I.	228
Apéndice.....	237
Bibliografía.....	239

INTRODUCCIÓN

El presente texto es un compendio actualizado de acuerdo al reglamento ACI - 2011 y contiene múltiple información utilizada durante los años en que el autor ejerció la docencia a nivel pre y posgrado, tanto en el Perú como en otros países de Europa y América, y se especializó en numerosas obras con estructuras de concreto armado en diversos países.

En los primeros capítulos se efectúa un análisis conciso del desarrollo histórico del concreto, la proporción de los materiales constitutivos, el comportamiento básico a largo plazo y el desarrollo de factores de seguridad, que proporcionará una introducción adecuada al tema del concreto reforzado. También se desarrollan los experimentos fundamentales de laboratorio, el conocimiento esencial de la proporción de mezclas, los requerimientos de resistencia y de funcionamiento, y los conceptos de confiabilidad en cuanto al rendimiento de las estructuras, que son temas básicos para todo estudiante de Ingeniería. El estudio del control de calidad y aseguramiento del mismo, proporcionará al lector una eficaz introducción al enfoque sistemático, necesario para administrar el desarrollo de sistemas estructurales de concreto.

Puesto que el concreto es un material no elástico, con la no linealidad de su comportamiento (que comienza en una etapa muy temprana de carga) se presenta un enfoque de resistencia última o «estado límite a proximidad de falla». Se proporciona un tratamiento adecuado de las verificaciones de las condiciones de servicio en términos del agrietamiento y deformaciones, así como los efectos a largo plazo; de esta manera, el diseño deberá satisfacer todos los requerimientos de servicio-carga-nivel, en tanto garantice que la teoría aplicada en el análisis (diseño) describa correctamente el funcionamiento real de los elementos diseñados.

Los capítulos siguientes desarrollan el comportamiento ante la flexión, la tensión diagonal y las condiciones de servicio de miembros de una dimensión, es decir, las vigas y losas en una dirección. Se ha puesto especial atención en proporcionar al estudiante y al ingeniero una noción de lo que significa la distribución interna de la deformación en elementos de concreto estructural y reforzado, y una comprensión básica de la resistencia de reserva y los factores de seguridad inherentes a las expresiones de diseño. Por otro lado, se hace referencia al análisis y diseño de columnas y otros miembros de compresión, y al análisis de flexión y diseño de vigas. Finalmente, se incluye un estudio detallado de cómo se construyen los diagramas de interacción para el dimensionamiento de columnas sujetas a flexión biaxial y pandeo, y se presenta información respecto a la adherencia y longitud de desarrollo en el reforzamiento.

CONCRETO ARMADO

1.1 Concreto

El concreto es un material duro, tiene similitud a la piedra y resulta al efectuarse un adecuado mezclado entre cemento, agregados (piedra y arena), agua y aire. A diferencia de las piedras, el concreto puede ser formado de acuerdo a las dimensiones que se necesite. Para dar con estas dimensiones se usan las formas o encofrados.

El cemento y el agua reaccionan químicamente uniendo las partículas de los agregados y convirtiendo todo el aglomerado en una masa sólida. De acuerdo al diseño de mezclas que se use, podrá obtenerse diferentes resistencias de concreto. Influyen también en esta característica del concreto, los métodos y eficiencia del curado. Debido a que el concreto es un elemento resistente a los esfuerzos de compresión (teniendo en cambio muy poca resistencia a los esfuerzos de tracción y flexión), es que se introduce el acero como parte complementaria para tomar estos esfuerzos, en los cuales el concreto no actúa de manera óptima.

Antiguamente, los concretos y los aceros tenían una resistencia relativamente baja; por consiguiente, se necesitaban elementos bastante pesados para resistir especialmente cargas grandes. En la actualidad, se ha mejorado mucho este aspecto, pues ya existen concretos muy resistentes y aceros de alta resistencia que permiten disminuir los pesos propios de las estructuras en gran magnitud. Inclusive se puede contar con el concreto pre y postensado, que aumentan las resistencias finales en proporciones muy grandes. Entre las estructuras más importantes construidas con concreto armado, se pueden mencionar:

- a) Entramados o pórticos de varios sistemas de vigas y columnas, y/o placas o pantallas para edificios.
- b) Losas de pisos y/o techos que pueden ser nervadas, fungiformes, aligeradas, etc.
- c) Cubiertas laminares cilíndricas, elípticas, parabólicas o planas plegadas, que permiten el empleo de capas delgadas de concreto.
- d) Puentes, ya sean con estructuras de soporte tipo arco o puentes de tramos rectos.
- e) Tanques, depósitos, silos.
- f) Losas de piso, carreteras.
- g) Muros de contención, cimentaciones.
- h) Presas, reservorios.

1.1.1 Tipos de concreto y usos del mismo

En general, la mayoría de las construcciones pueden ser clasificadas como: “concreto masivo”, “losas” y “estructuras encofradas”. Las estructuras encofradas tales como vigas, columnas, muros, arcos y algunos lineamientos de túneles, son normalmente armadas con acero. El espacio para la colocación del concreto es restringido, y cualquier acabado superficial será hecho una vez que se hayan retirado los encofrados. Los pavimentos y las losas de piso tienen un área bastante considerable, que no fue encofrada; por lo tanto, es necesario tener especial cuidado en proporcionarle el acabado y curado tan pronto se efectúe la colocación del concreto. El concreto masivo para presas, pilares y cimentaciones tiene superficies expuestas en una proporción relativamente pequeña, pero de igual forma se estará pendiente de las elevaciones de temperatura, debido al calor de hidratación del cemento.

1.1.2 Requisitos que debe cumplir el concreto

Los requisitos principales que debe cumplir el concreto endurecido son: **resistencia**, **durabilidad** y **economía**. Debe tener la resistencia deseada, diseñada y especificada, que sea uniforme, impermeable y resistente al clima, al uso y otros agentes destructivos; además, que no se agriete excesivamente al enfriamiento o al secado, debe ser de menos costo que otros materiales igualmente resistentes y durables. Para algunos usos el concreto debe tener características especiales.

Para casos especiales o particulares debe tener alta resistencia al fuego y a los agentes químicos, o tener un peso liviano o poseer una superficie muy suave (más que la suavidad normal), o tener una superficie porosa requerida por arquitectura como acabado. En cualquiera de estos casos, el diseñador necesita un buen conocimiento de la naturaleza del concreto para poder especificar correctamente y permitir, de esta manera, que el inspector pueda hacer cumplir en obra lo que se pretende realmente en el proyecto.

1.1.3 Formación y proceso de formación del concreto

En un concreto fresco mezclado plásticamente, todos los sólidos granulares, incluyendo el cemento, están temporalmente suspendidos en agua. Las partículas individualmente se encuentran separadas por capas delgadas de agua. Esta separación de partículas y el efecto de lubricación de estas capas de agua juntas, y algunas fuerzas entre partículas, hacen la mezcla plástica y trabajable.

Es conveniente pensar que el concreto es una mezcla entre una pasta (agua-cemento), y el agregado mineral (piedra y arena). Sabiendo que se trata de una pasta, donde se introduce el agregado, el cual irá separado por medio de capas delgadas de pasta.

Luego, el volumen de toda la mezcla es igual al volumen de la pasta, más el volumen de los sólidos (o sea los agregados), más el volumen de los vacíos de aire, que los graficamos a continuación. Asimismo, mostraremos los porcentajes de volumen de una mezcla normal:

AIRE	AGUA	CEMENTO	AGREGADO (fino y grueso)
5%	15%	10%	70%

————— PASTA —————+————— MINERAL INERTE ————

1.1.4 Tipos de cemento Portland, principales usos y especificaciones

Es un material aglomerante que tiene las propiedades de adherencia y cohesión necesarias para unir áridos inertes entre sí, formando una masa sólida que cumple las características y propiedades que más adelante se detallarán. Este material se fabricó por primera vez en 1824 en Inglaterra.

Para satisfacer ciertos requerimientos físicos y químicos para propósitos específicos, se elaboran diferentes tipos de cemento Portland. Las especificaciones standard para estos tipos de cemento y los métodos de prueba se encuentran al detalle en las especificaciones ASTM. La American Society for Testing and Materials (ASTM), provee cinco tipos de cemento Portland: Tipo I, II, III, IV y V, y en la Norma C-150 la Canadian Standard Association (CSA), provee también cinco tipos: normal, moderado, de altas resistencias iniciales, de bajo calor de hidratación y de resistencia a los sulfatos, en la norma CSA Standard a5.

- **ASTM tipo I, CSA normal**

Este tipo de cemento es de uso general. Es apropiado para todos los usos cuando no son requeridas las propiedades especiales de los otros tipos de cemento. Es usado cuando el cemento o concreto no están sujetos a exposiciones específicas, tales como ataque de sulfatos del suelo o agua a una elevada temperatura, ocasionada por el elevado calor de hidratación. Sus usos incluyen pavimentos y veredas, concreto armado para edificios, puentes, estructuras de líneas férreas, tanques, reservorios, alcantarillas, tuberías de agua, unidades de albañilería, etc.

- **ASTM tipo II, CSA moderado**

El tipo II de cemento es usado donde no se requiere una excesiva protección contra ataques de sulfatos; es decir, donde los ataques por sulfatos no son muy severos. El tipo II de cemento usualmente generará menos calor de hidratación que el cemento tipo I o cemento normal; por consiguiente, este tipo de cemento puede ser usado en estructuras de masas de concreto considerables, como son: grandes pilares, estribos voluminosos o gruesos muros de contención. Su uso, en general, será para reducir la temperatura de hidratación, la cual es muy importante cuando se trabaja en regiones calurosas. Este tipo de cemento es inferior al tipo I en su contenido de aluminato tricalcico (Ca_3A). Por consiguiente, es inferior en la generación de calor, y algo más resistente a los sulfatos que el tipo I. El contenido de (Ca_3A) no debe exceder del 8%.

- **ASTM tipo III, CSA altas resistencias iniciales**

Este tipo de cemento de resistencias iniciales altas adquieren sus resistencias una semana o menos del vaciado. Se usa cuando los encofrados o formas tienen que ser retiradas lo antes posible para otro uso, o cuando la estructura debe ser puesta en servicio lo antes posible. En tiempo frío, su uso permite una reducción en el período de curado.

Aunque con mezclas ricas de cemento tipo I se puede llegar a obtener altas resistencias en corto tiempo, el cemento tipo III da resultados más satisfactorios y más económicos. Este cemento produce un alto calor de hidratación, por lo cual es peligroso su uso en estructuras masivas. Estas características la dan los granos finos y los montos mayores de (Ca_3Si) y (Ca_3A).

- **ASTM tipo IV, CSA bajo calor de hidratación**

Este cemento se usa donde el calor de hidratación debe ser reducido al mínimo. Desarrolla resistencias a más largo plazo que el tipo I o normal, se usa en estructuras masivas de concreto tales como grandes presas de gravedad, donde la elevación de temperatura resultante del calor generado durante el endurecimiento del concreto es un factor crítico. Presenta (Ca3A1) en baja proporción.

- **ASTM tipo V, CSA resistente a sulfatos**

Este tipo de cemento es usado solamente en concretos que van a estar expuestos a una severa acción de sulfatos. Se usan principalmente donde los suelos, o aguas en contacto con la estructura, tienen un alto contenido de sulfato. Este cemento adquiere resistencia más lentamente que el tipo I o normal. Presenta (Ca3A1) en baja proporción, generalmente no más del 5%, pero es preferible no que sea más del 4%.

- **Cemento Portland con incorporación de aire**

Las especificaciones de los tres tipos de cemento Portland con aire incorporado se encuentran en la Norma ASTM C 175. Existen tres tipos de cemento con incorporado de aire: IA, IIA y IIIA, correspondientes a los tipos I, II y III, respectivamente. A estos cementos se les ha añadido pequeñas cantidades de materiales incorporados de aire al clinker, durante la fabricación. Estos cementos producen concretos con una mejor resistencia a la acción del congelamiento y deshielo. En tales concretos existen millones de pequeñas burbujas de aire perfectamente distribuidas.

Cuando los agregados acompañantes contienen elementos que son destructivos al reaccionar con los óxidos de sodio o potasio del cemento, es necesario usar cementos con baja alcalinidad debido a que, al usar estos cementos, se mejora la durabilidad y la serviciabilidad de la mezcla. Los cementos con baja alcalinidad contienen menos del 0.60% de estos óxidos conocidos como óxido de sodio.

La reactividad potencial de las combinaciones del agregado - cemento, puede ser calculada por el procedimiento descrito en la norma ASTM C 227. El porcentaje de los óxidos alcalinos en el cemento puede ser determinado por la fotometría de la llama de acuerdo al ASTM C 228. Cuando el cemento tiene bajo contenido de alcalinidad no es resistente a los sulfatos.

Una propiedad que algunos cementos tienen en contra es el falso fraguado. Debido a este fenómeno, se incrementa el requerimiento de agua en la mezcla, al igual que se produce la pérdida en asentamiento: aparecen las grietas por consolidación plástica y se origina la dificultad en la manipulación y colocación de concreto. La presencia del fraguado falso se determina al aplicarse los test que dan las normas ASTM C 359 (método del mortero) o ASTM C 451 (método de la pasta).

- **Cemento Portland blanco**

Este cemento es fabricado conforme a las especificaciones ASTM C 150 y C 175. La principal diferencia entre el cemento blanco y gris es el color. El cemento blanco es fabricado con materias primas selectas, y contiene pequeñas cantidades de hierro y óxido de manganeso. Este cemento es usado principalmente en proyectos arquitectónicos, tales como: cobertura para pisos, superficies de terreno, estucados, pintura de cemento, losetas y concretos decorativos.

- **Cemento Portland puzzolánico**

Los cementos puzzolánicos incluyen cuatro tipos: IP, OP -A, P y P-A. El segundo y el cuarto contienen aditivo incorporador de aire, como está especificado en la norma ASTM C 595. Estos son fabricados añadiendo en la molienda del clinker una apropiada cantidad de puzolana, o por medio de una mezcla de cemento portland. Se usa principalmente en grandes estructuras hidráulicas como puentes, pilares, presas, etc.

- **Cemento de albañilería**

Estos cementos cumplen los requerimientos de las Normas ASTM C 91 o CSA A 8. Son cementos portland mezclados con aditivos incorporados de aire y material suplementario seleccionado con el fin de obtener: Cemento de Escoria, Portland de alto horno (ASTM C 205) y cemento natural (ASTM C 10).

- **Tipos especiales de cemento Portland**

Hay tipos especiales de cemento Portland que son considerados por especificaciones de la ASTM o CSA.

- **Cemento para pozos de petróleo**

Este cemento es usado para sellar pozos de petróleo. Generalmente debe ser un cemento de fraguado lento y resistente a altas temperaturas y presiones. Las especificaciones del American Petroleum Institute para cementos para pozos de petróleo (API Standard 10A) establecen los requerimientos de cada una de seis clases. Cada clase es usada para cierta profundidad del pozo.

La industria del petróleo también usa tipos convencionales de cementos portland, aplicando aditivos especiales.

- **Cemento o prueba de agua**

Este cemento es generalmente fabricado añadiendo una pequeña cantidad de calcio y aluminio al clinker del cemento portland durante la molienda final. Es fabricado en color blanco o gris.

- **Cementos plásticos**

Son hechos añadiendo agentes plastificantes hasta un máximo del 12% del volumen total a cementos tipo I o II, durante el proceso de fabricación. Los cementos plásticos son comúnmente usados para trabajos con morteros, revoques y estucados.

A. Comparación entre cementos de diversos tipos

Relación aproximada entre la resistencia del concreto producida por los diferentes tipos de cemento.

Tipo de cemento Portland		Resistencia a la compresión como porcentaje a la resistencia de concreto con cemento tipo "I" o "Normal".			
ASTM	CSA	1 día	7 días	28 días	3 meses
I	Normal	100	100	100	100
II	Moderado	75	85	90	100
III	Altas resistenc. inic.	190	120	110	100
IV	Bajo calor de hidrat.	55	55	75	100
V	Resistente a sulfatos	65	75	85	110

Para fines prácticos, se puede considerar que el cemento está integrado por cuatro componentes principales, a saber:

Silicato Tricálcico	$3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$	= C_3S
Silicato Dicálcico	$2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$	= C_2S
Aluminato Tricálcico	$3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$	= C_3A
Aluminato Ferrato Tetracálcico	$4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$	= C_2AF

Las fórmulas de la derecha son abreviaturas para entrar a la tabla, los porcentajes aproximados de cada compuesto se pueden calcular al hacer el análisis químico. En su mayoría, los aumentos de resistencia están controlados por C_3S y C_2S . Estos componentes sumados dan más del 70% del total para la mayoría de los cementos.

B. Cálculos en la composición de los compuestos del cemento Portland

TIPOS DE CEMENTO	COMPOSICIÓN DE COMPUESTOS				FINEZA	
	C_3S	C_2S	C_3A	C_2AF	cm^2 por gramo	% que pasa la malla
1. Normal	45	27	11	8	1710	90.7
2. Modificado	44	31	5	13	1990	90.7
3. Altas resist. iniciales	53	19	10	10	2730	99.5
4. Bajo calor hidrat.	28	49	4	12	1880	93.1
5. Resistente a sulfatos	36	43	4	4	1960	93.2

El área de la superficie ha sido determinada por la prueba del turbidímetro de Wagner.

C. Aspectos económicos

La economía del concreto está influenciada por la cantidad del cemento necesario para producir la resistencia requerida, u otras propiedades, por la disponibilidad o proximidad del material deseado y por la magnitud del proceso requerido para producir el agregado deseado. No obstante, que agregados bien definidos ya sean angulares o redondeados, graduados entre los límites de especificaciones de aceptación general, producirá concretos de cantidad comparable a la de un factor cemento dado, esto está especificado en el artículo del ACI Comité 613 – 45, que con agregados de características que produzcan requisitos altos de agua de mezclado en forma anormal, es necesario aumentar el contenido de cemento para mantener una relación agua-cemento preseleccionada.

D. Muestreo y pruebas

Es necesario que el cemento, para considerarlo satisfactorio, pase las pruebas que indican las siguientes normas: ASTM (C 183 y 184 C 187 a 191).

1.1.5 Agregados

Los agregados se clasifican básicamente en dos tipos: agregados gruesos o grava, y agregados finos o arenas, los mismos que en su conjunto ocupan del 70 al 75% del volumen de la masa endurecida. La resistencia y economía del concreto es consecuencia directa de la mejor compactación que los agregados pueden tener, siendo muy importante la granulometría de las partículas.

Los agregados finos o arenas son los que pasan por un tamiz número 4, los mayores a este tamaño se consideran como agregados gruesos. Además de esta clasificación, puede haber una más rigurosa cuando se quiere una granulometría más favorable. Las arenas podrán subdividirse en 2 ó 3 tamaños, y los gruesos o gravas en otros tantos. De este modo se obtiene una granulometría más ajustable, colmándose de acuerdo a curvas granulométricas.

El tamaño básico de agregado para un determinado elemento se fijará de acuerdo a varios criterios; en especial, la separación de varillas y la distancia de éstas a los encofrados, la altura de las losas, etc. (Ver el informe del Comité 621-ACI).

1.2 Resistencia y deformación a compresión del concreto

a) Por carga rápida

En materiales como el concreto, que se utilizan básicamente para resistir esfuerzos de compresión, es importante conocer el comportamiento bajo la relación esfuerzo-deformación.

El módulo de elasticidad “Ec”, que viene a ser la pendiente de la parte inicial recta de las curvas, que para diferentes concretos se gráfica a continuación, puede expresarse por la siguiente fórmula:

$$E_c = 0.135 \times W^{3/2} \sqrt{f'_c} \Rightarrow \text{para } W = 1\,440 \text{ a } W = 2\,500 \text{ k/m}^3$$

W = Peso unitario del concreto endurecido k/m^3

f'_c = Resistencia cilíndrica del concreto k/m^2

Para concreto normal $W = 2330 \text{ k/m}^3$, usar $E_c = 15200\sqrt{f'c}$

Las curvas esfuerzo-deformación en probetas de igual resistencia bajo variadas condiciones de carga, varían en forma bastante considerable.

$$\text{El módulo de Poisson} = \frac{\text{deformación transversal}}{\text{deformación longitudinal}}$$

El módulo de Poisson para $0.7 f'c$ es aproximadamente 0.17 (Fig. 1.4)

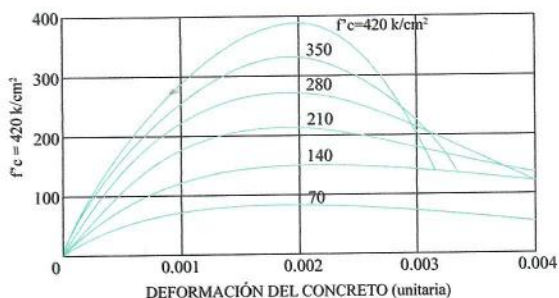


Fig. 1.1

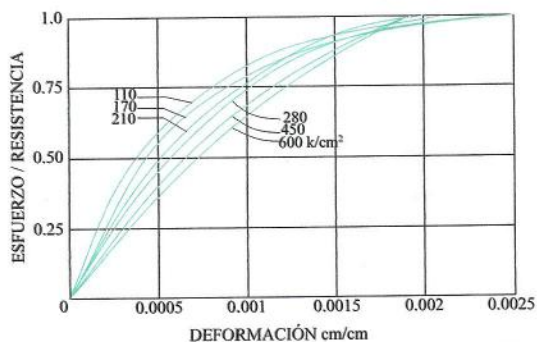


Fig. 1.2

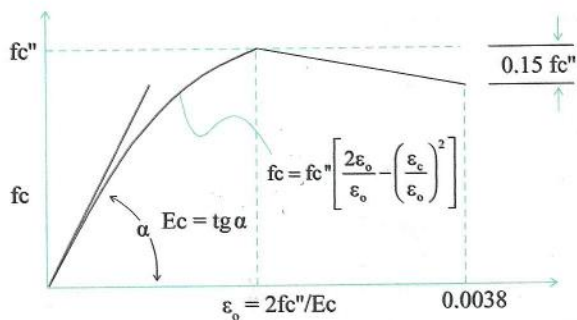


Fig. 1.3

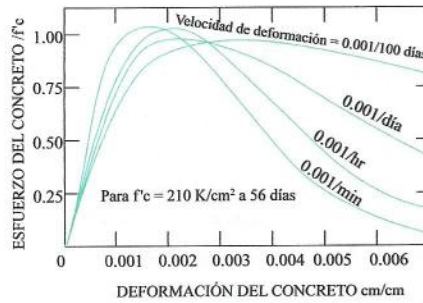


Fig. 1.4

b) Para carga de largo plazo

La influencia del tiempo en la relación esfuerzo-deformación es considerable, debido a que el concreto fluye bajo la carga mientras que en el acero no sucede esto.

1.3 Resistencia a tracción del concreto

El diseño de elementos de concreto armado procura aprovechar al concreto en su característica principal, que es soportar cargas a compresión, no siendo su resistencia a tracción una virtud importante de este material. Aunque en la resistencia del corte y torsión, parecería que sí tiene un papel importante en la resistencia del concreto a torsión. Las mediciones de tracción en el concreto no han tenido la precisión requerida, porque se distorsionan mucho con cualquier variación en sus características de soporte. Habiéndose medido durante muchos años las propiedades del concreto a tracción mediante el módulo de rotura: $f_r = MC/I$ esfuerzo al que se rompe una viga sin armar en tracción.

1.4 Resistencia al esfuerzo cortante y compresión combinadas: el Círculo de Mohr

La mayor parte de las estructuras de concreto armado están sometidas a esfuerzos combinados, los cuales actúan en varias direcciones. Podemos mencionar, por ejemplo, que las vigas están sometidas a esfuerzos de compresión, flexión y cortante, etc.

Considerando el equilibrio de las fuerzas que actúan en un elemento de concreto, se demuestra que se puede reducir cualquier condición de esfuerzos combinados a tres esfuerzos normales, que actúan en tres planos mutuamente perpendiculares. Estos tres esfuerzos normales son los principales, y los esfuerzos cortantes que actúan en estos planos son cero.

A pesar de las investigaciones, todavía no se ha desarrollado una teoría inobjetable para la resistencia a la falla del concreto para el caso general de estado tridimensional de esfuerzos. Se ha intentado hacer modificaciones a las teorías convencionales de resistencia de materiales, aunque no hay una que sea exactamente aplicable a todos los casos.

1.4.1 Comportamiento del esfuerzo biaxial

Una condición de esfuerzo biaxial ocurre si los esfuerzos principales sólo actúan en dos direcciones; es decir, los esfuerzos actúan en un plano, y el tercer esfuerzo principal es cero. La Fig. 1.5 presenta las combinaciones de esfuerzo normal en dos direcciones que provocaron fallas, llegándose a la conclusión de que la resistencia del concreto sujeto a compresión biaxial puede ser hasta de 27% mayor que la resistencia uniaxial. Para esfuerzos biaxiales iguales de compresión, el aumento de resistencia es aproximadamente igual a la resistencia a tensión uniaxial. Sin embargo, nótese que las cargas combinadas a tracción y compresión reducen tanto el esfuerzo de tracción como de compresión a la falla. (Véase la Fig. 1.5)

En planos distintos a los principales, los esfuerzos normales están acompañados por esfuerzos cortantes. La teoría de falla de Mohr se ha utilizado para calcular la resistencia para este caso de esfuerzos combinados. La Fig. 1.6 indica cómo una familia de círculos de Mohr, que representan condiciones de falla en tensión simple, compresión simple y otras combinaciones, se localizan dentro de una envolvente. Cualquier combinación de esfuerzos que tenga un Círculo de Mohr tangente a este envolvente, o que la intercepte, se puede considerar como una condición de falla. (Véase la Fig. 1.6)

En la Fig. 1.7 se muestra una curva de falla para elementos con esfuerzo normal en una dirección, combinados con esfuerzos cortantes. La curva indica que la resistencia a compresión del concreto se reduce en presencia de esfuerzos cortantes. Por ejemplo, esta condición puede influir en la resistencia del concreto en la zona a compresión de vigas y columnas cuando hay cortante.

1.4.2 Comportamiento del esfuerzo de compresión triaxial

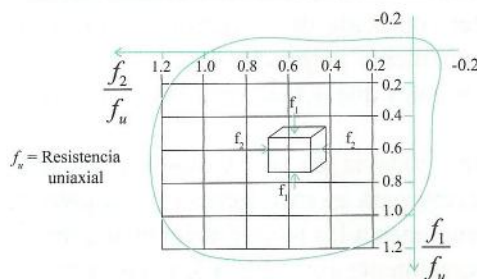
La resistencia y ductilidad del concreto se aumenta considerablemente bajo condiciones de compresión triaxial. Se encontró la siguiente relación para la resistencia de cilindros de concreto cargados axialmente a la falla, mientras se les sujetó a presión de fluido de confinamiento.

$$f'_{cc} = f'_c + 4.1 f_l \quad (a)$$

En que f'_{cc} = resistencia a compresión axial del espécimen confinado.

f'_c = resistencia a compresión uniaxial del espécimen no confinado.

f_l = presión de confinamiento lateral.



RESISTENCIA BIAxIAL DEL CONCRETO

Fig. 1.5

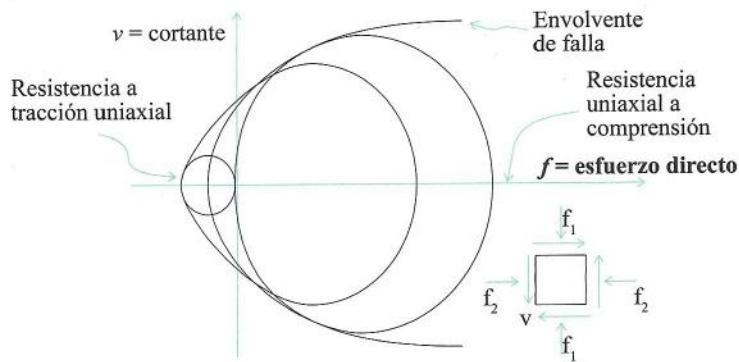


Fig. 1.6

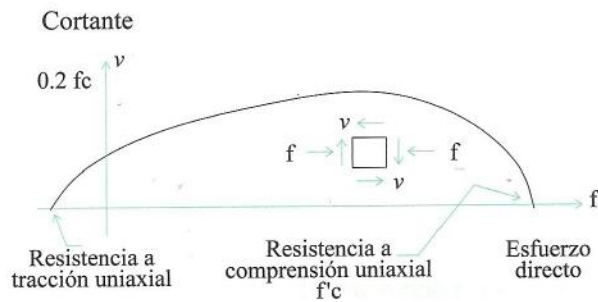


Fig. 1.7 Combinaciones de esfuerzo normal cortante, que causan la falla.



Fig. 1.8 Curvas Esfuerzo - Deformación Cilindros a compresión Triaxial

La Fig. 1.8 muestra las curvas esfuerzo-deformación axial para las pruebas de compresión triaxial efectuadas en cilindros de concreto. Los cilindros se confinaron lateralmente mediante la presión del fluido, mientras se aumentaba el esfuerzo de compresión axial hasta la falla, y se medían las deformaciones axiales. Las pruebas se realizaron a corto plazo. Un aumento en la presión lateral produce aumentos muy significativos en ductilidad, al igual que en la resistencia. Este efecto se debe a la presión lateral que confina al concreto, y reduce la tendencia al agrietamiento interno y el aumento en el volumen hasta poco antes de la falla; y se tiene un valor de 4.1 para el coeficiente de esfuerzo lateral. (Véase la Fig. 1.8)

Otras pruebas efectuadas han dado valores para el coeficiente de esfuerzo lateral, que van desde 4.5 hasta 7.0, con un valor promedio de 5.6, en vez del de 4.1 que se encontró inicialmente. Los valores elevados para el coeficiente ocurrieron a bajas presiones laterales.

1.5 Confinamiento del concreto por el refuerzo

En la práctica se puede confinar al concreto mediante refuerzo transversal, comúnmente en forma de espirales o aros de acero espaciados a poca distancia. En este caso, a bajos niveles de esfuerzo transversal, apenas se esfuerza; en consecuencia, el concreto no está confinado. El concreto queda confinado cuando a esfuerzos que se aproximan a la resistencia uniaxial, las deformaciones transversales se hacen muy elevadas, debido al agrietamiento interno progresivo. Y el concreto se apoya contra el refuerzo transversal, el que entonces aplica una reacción de confinamiento al concreto. En consecuencia, el refuerzo transversal proporciona confinamiento pasivo.

Las pruebas realizadas por muchos investigadores han demostrado que el confinamiento por el refuerzo transversal puede mejorar considerablemente las características, esfuerzo deformación del concreto a deformaciones elevadas. Por ejemplo, la ecuación $f'_{cc} = f'_c + 4.1 f_l$ para la resistencia del concreto confinado por la presión de un fluido, se aplica aproximadamente al concreto confinado por espirales. La Fig. 1.9 muestra curvas esfuerzo deformación obtenida de tres conjuntos de cilindros de concreto confinados por espirales. Cada conjunto tenía una resistencia no confinada distinta del concreto. Es muy apreciable el aumento en la resistencia y ductilidad con la cuantía del acero de confinamiento. Las pruebas han demostrado que los espirales confinan al concreto con mucha mayor eficiencia que los estribos rectangulares o cuadrados.

En la Fig. 1.10 tenemos curvas carga deformación para prismas de concreto, que contenían distintas cantidades de estribos cuadrados. El efecto de la distinta cuantía de acero transversal en la ductilidad es bastante apreciable, aunque el efecto en la resistencia es mucho menor.

La diferencia entre el confinamiento por espirales de acero y el confinamiento por estribos rectangulares o cuadrados de acero, está ilustrada en la Fig. 1.11. Debido a su forma, los espirales están en tensión axial de aro y proporcionan una presión continua de confinamiento alrededor de la circunferencia, que a grandes deformaciones transversales se aproxima al confinamiento de un fluido. Sin embargo, como regla, los estribos cuadrados sólo pueden aplicar reacciones de confinamiento cerca de las esquinas de los estribos, debido a que la presión del concreto contra los lados de los estribos tiende a flexionar los lados hacia afuera, como en la Fig. 1.11(a).

En consecuencia, una porción considerable de la sección transversal del concreto puede no estar confinada. Debido al arqueo interno entre las esquinas, el concreto está confinado, efectivamente, sólo en las esquinas y en la región central de la sección. Sin embargo, el acero cuadrado de confinamiento sí produce un aumento significativo en la ductilidad, y muchos investigadores han observado cierto aumento en la resistencia.

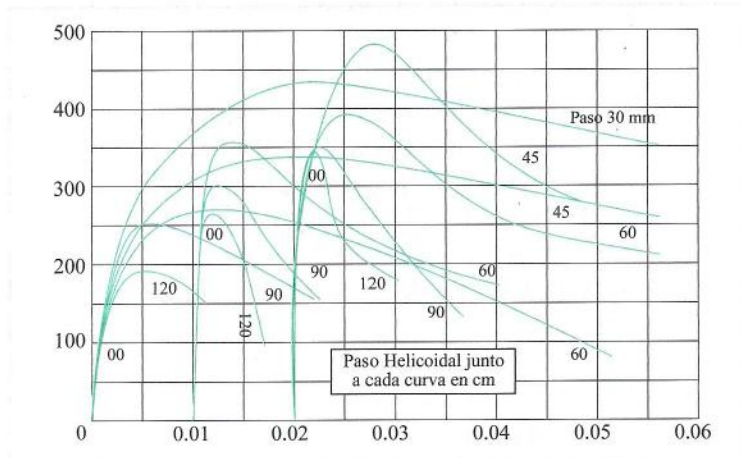


Fig. 1.9

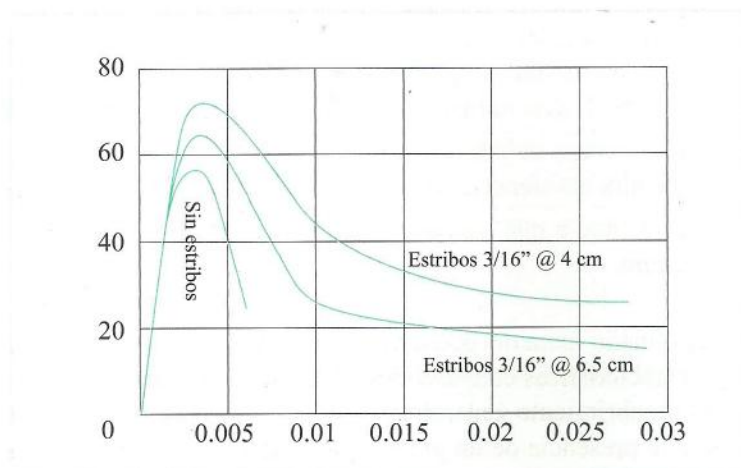


Fig. 1.10

En las figuras 1.9 y 1.10 se observa que el confinamiento por refuerzo transversal tiene poco efecto en la curva esfuerzo-deformación, antes de que se alcance la resistencia uniaxial del concreto. El perfil de la curva de esfuerzo-deformación a deformaciones elevadas es una función de muchas variables, en que las principales son las siguientes:

- 1) La relación del volumen del acero transversal al volumen del núcleo del concreto, debido a que un elevado contenido de acero transversal involucra una elevada presión de confinamiento transversal.

- 2) La resistencia a la cedencia del acero transversal, puesto que esto proporciona un límite superior a la presión de confinamiento.
- 3) La relación del espaciamiento del acero transversal a las dimensiones del núcleo de concreto, debido a que un espaciado más pequeño conduce a un confinamiento más efectivo, como lo ilustra la Fig. 1.12. El concreto está confinado por el arqueado del concreto entre las varillas transversales; y si el espaciado es grande, podrá confinarse un volumen grande de concreto, por lo que este puede desconcharse.
- 4) La relación del diámetro de la varilla transversal a la longitud no soportada de las varillas transversales, en el caso de estribos rectangulares, debido a que un diámetro grande de varilla conduce a confinamiento más efectivo. Este efecto está ilustrado en la Fig. 1.11. Las varillas transversales de diámetro pequeño actúan solamente como amarres entre las esquinas, debido a que la rigidez por flexión del aro es pequeña, y estos se arquean hacia afuera en vez de confinar en forma efectiva al concreto en las regiones entre las esquinas. Con una relación mayor de diámetro de la barra transversal a su longitud no soportada, el área de concreto confinado efectivamente es mayor debido a la mayor rigidez por flexión del lado del estribo. En el caso de un espiral, esta variable no tiene significado; gracias a su forma, el espiral trabaja en tensión axial y aplica una presión radial uniforme al concreto.
- 5) La cuantía y tamaño del refuerzo longitudinal, debido a que ese acero también confina al concreto. Las varillas longitudinales generalmente tienen diámetro grande; y, por lo general, la relación de diámetro de varilla a longitud no soportada es tal que las varillas pueden confinar efectivamente el concreto. Sin embargo, las varillas longitudinales deben colocarse bien ajustadas contra el acero transversal, ya que este proporciona las reacciones de confinamiento a las varillas longitudinales. Y si se necesita moverlas para ponerlas en contacto efectivo con el acero transversal, se reduce la eficiencia del confinamiento.
- 6) La resistencia de concreto, debido a que el concreto de baja resistencia es algo más dúctil que el concreto de alta resistencia, como se aprecia en las curvas de la Fig. 1.1.
- 7) La tasa de carga, debido a que las características de esfuerzo - deformación del concreto dependen del tiempo.

El concreto no está confinado fuera del acero transversal, y se puede esperar que este concreto de recubrimiento tenga características esfuerzo-deformación distintas a las del concreto dentro del acero transversal. El recubrimiento generalmente comienza si la cuantía de acero transversal es elevada, debido a que la presencia de un gran número de varillas transversales crea un plano o superficie de debilidad entre el núcleo y el recubrimiento, lo que precipita el desconchamiento.

En consecuencia, para cuantías altas de acero transversal, la contribución del recubrimiento a elevadas deformaciones debe ignorarse. Se puede suponer que el recubrimiento tiene las características del concreto no confinado hasta una deformación supuesta de desconchamiento y que no contribuye a la resistencia total bajo deformaciones más elevadas.

Si es baja la cuantía de acero transversal, el recubrimiento tiende a desconcharse con menos facilidad y a colaborar más con el núcleo confinado. En ese caso se puede tomar en cuenta algo del concreto de la cubierta a deformaciones elevadas.

A continuación, se estudian algunas proposiciones para la resistencia y ductilidad del concreto confinado por refuerzo.

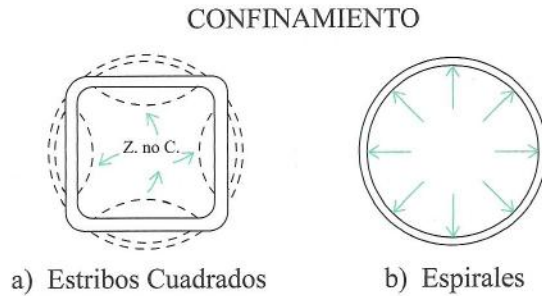


Fig. 1.11

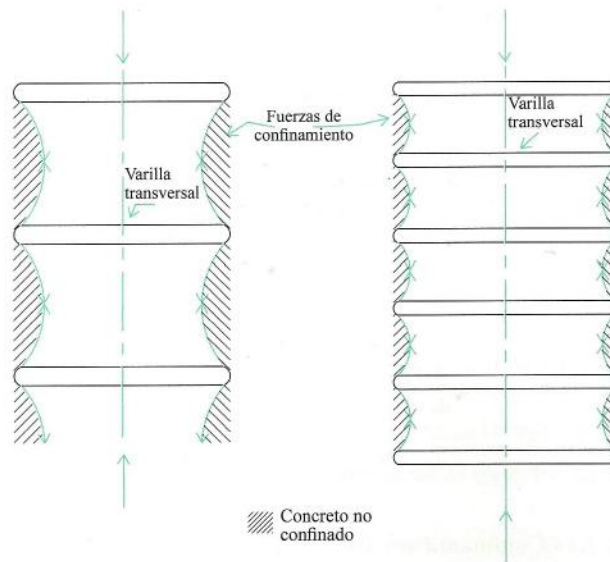


Fig. 1.12 Efecto de la separación de estribos en el confinamiento del concreto

1.5.1 Concreto confinado por espirales

Suponiendo que las espirales están suficientemente próximas para aplicar una presión casi uniforme, se puede calcular la presión de confinamiento a partir de la tensión de aro desarrollada por el acero espiral. La Fig. 1.13 muestra un cuerpo libre de media vuelta de un espiral. La presión lateral f_1 en el concreto, alcanza un máximo cuando el refuerzo espiral alcanza la resistencia de cedencia f_y . Si ds = diámetro y S = paso del espiral, Asp = área de la varilla del espiral.

El equilibrio de las fuerzas que actúan en la media vuelta del espiral mostrado en la Fig. 1.13 necesita que:

$$2 f_y Asp = ds S f_1 \quad \therefore f_1 = \frac{2 f_y Asp}{ds S} \quad (b)$$

Reemplazando (b) en (a) vemos que la resistencia a compresión axial del concreto confinado por un espiral es:

$$f'_{cc} = f'_c + 8.2 \frac{f_y A_{sp}}{ds S} \quad (c)$$

El aumento en ductilidad del concreto confinado por un espiral también es apreciable. Se dan relaciones esfuerzo - deformación para el concreto confinado por espirales en base a datos empíricos obtenidos de pruebas.

1.5.2 Concreto confinado por estribos rectangulares

Existe una lista de investigaciones experimentales para las relaciones esfuerzo - deformación para el concreto confinado por estribos rectangulares, en base a las cuales Kent y Park propusieron la siguiente curva que se interpreta de la siguiente manera (ver Fig. 1.14):

región AB : $\epsilon_c \leq 0.002$

$$f_c = f'_c \left(\frac{2E_s}{0.002} = \frac{E_c^2}{0.002} \right) \quad (d)$$

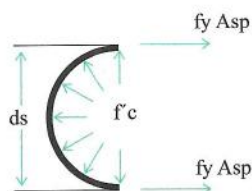


Fig. 1.13 Confinamiento del concreto por Refuerzo Helicodal

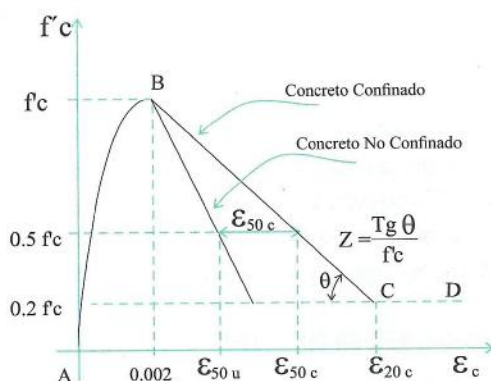


Fig. 1.14 Curva Esfuerzo - Deformación para concreto confinado con Estribos Rectangulares

Esta parte ascendente de la curva está representada por una parábola de segundo grado, y supone que el acero de confinamiento no afecta el perfil de esta parte de la curva o la deformación al esfuerzo máximo. También se supone que el esfuerzo máximo que alcanza el concreto confinado es la resistencia f'_c del cilindro. Hay evidencia de que los estribos rectangulares provocan un aumento en la resistencia. Sin embargo, este aumento puede ser pequeño, ya que en algunas pruebas no se encontró aumento alguno en la resistencia. En la mayoría de los casos, el esfuerzo máximo supuesto f'_c es conservador.

Región BC: $0.002 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{20c}$

$$f_c = f'_c [1 - Z (E_c - 0.002)] \quad (e)$$

Donde:

$$Z = \frac{0.5}{\epsilon_{50u} + \epsilon_{50h} - 0.002} \quad (f)$$

$$\epsilon_{50u} = \frac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} \quad (g)$$

$$\epsilon_{50h} = 3/4 P_s \sqrt{b''/Sh} \quad (h)$$

Donde:

f'_c = resistencia del cilindro de concreto $\text{lb/pulg}^2 = 0.0689 \text{ k/cm}^2$

$P_s = \frac{\text{Volumen del Refuerzo transversal}}{\text{Volumen del núcleo del concreto medido al exterior de los estribos}}$

Sh = Espaciamiento de los estribos

b'' = ancho del núcleo confinado medido al exterior de los estribos.

Z = pendiente de la rama descendente recta.

La pendiente de la rama descendente se especifica por la deformación presente, cuando el esfuerzo ha caído hasta $0.5 f'_c$, y se obtiene de evidencia experimental existente. La ecuación (h) para ϵ_{50u} toma en cuenta el efecto de la resistencia del concreto en la pendiente de la rama descendente del concreto no confinado, ya que el concreto de alta resistencia es más frágil que el concreto de baja resistencia. La ecuación (i) para ϵ_{50h} da la ductilidad adicional debida a los estribos rectangulares, y se obtuvo de los resultados experimentales de investigaciones. Un estudio dio resultados que incluían el efecto del gradiente de deformación a través de la sección (especímenes cargados excéntricamente), pero como el efecto no fue marcado, no aparece en las ecuaciones. Al analizar los resultados de las tres investigaciones, se supuso que el recubrimiento se había desconchado ya cuando el esfuerzo había caído hasta la mitad del esfuerzo máximo.

Se presumió que el núcleo confinado llegaba hasta los ejes centrales de los lados de los estribos, aunque es evidente que se tendrá solo un pequeño error si se considera que el núcleo confinado llega hasta el borde exterior de los aros. Esto podría explicar la presencia de cierto recubrimiento a deformaciones altas.

$$\text{región CD: } \epsilon_c \geq \epsilon_{20c}$$

$$f_c = 0.2 f'_c \quad (j)$$

Esta ecuación toma en cuenta la habilidad del concreto para soportar ciertos esfuerzos a deformaciones muy altas.

La Fig. 1.15 muestra la influencia de estribos de acero rectangulares en la curva esfuerzo-deformación dada por las ecuaciones (d) a (j), cuando la resistencia del cilindro de concreto es de 280 k/cm^2 $s_h/b'' = 0.5$. Es claro que hay una considerable mejora en el comportamiento de la rama descendente para pequeñas cantidades de aros rectangulares, pero esta mejora es conscientemente menos significativa al agregar más estribos.

Las ecuaciones, desde la (e) hasta la (i), se dedujeron de resultados en especímenes con las variables dentro de los siguientes rangos: $s_h/b = 0.35$ a 2.0 , $P_s = 0.35$ a 24% y f'_c , principalmente dentro del rango de 210 a 280 k/cm^2 , aunque algunos valores de f'_c estuvieron dentro del rango de 540 k/cm^2 a 595 k/cm^2 .

Es evidente que se requiere más trabajo experimental en los especímenes de concreto confinado para proporcionar más datos para el análisis estadístico, y así poder incluir más variables. En especial se necesitan con urgencia pruebas con distintos arreglos del acero transversal, incluyendo estribos traslapados y estribos con amarres cruzados suplementarios. Mientras tanto se pueden considerar las ecuaciones propuestas para el concreto confinado por estribos rectangulares sólo como aproximaciones, aunque se cree que darán resultados razonables.

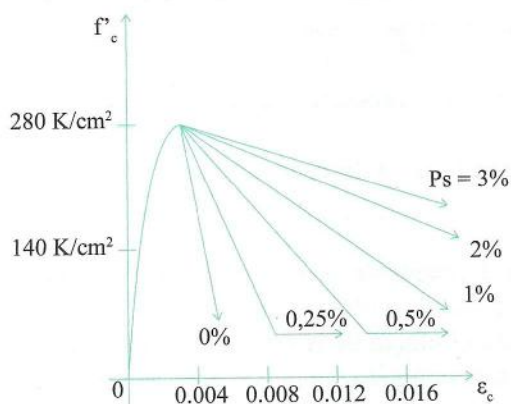


Fig. 1.15 Influencia en la cantidad de Estribos en la curva esfuerzo deformación para el concreto cuando

$$f'_c = 280 \text{ K/cm}^2 \text{ y } s_h/b'' = 0.5$$

Siendo: b'' = ancho del núcleo confinado medido al exterior de los estribos
 s_h = espaciamiento de los estribos al exterior de los estribos.

1.6 Retracción o contracción

Es una propiedad muy importante que está relacionada con la fisuración que presenta el concreto. La pasta de concreto necesariamente se contrae, debido a la reducción del volumen original de agua, por combinación química, lo cual es un proceso irreversible.

Existe además contracción relacionada con la pasta de cemento, llamada contracción por secado, que es la más importante debido a que se produce tanto en el estado plástico como en el estado endurecido, si se le permite la pérdida de agua en la mezcla. Este proceso no es irreversible como el anterior, debido a que si se repone el agua perdida por secado, podrá recuperarse gran parte de la contracción ocurrida.

Considerando que la contracción del concreto siempre se produce, es conveniente tomar las medidas pertinentes para evitar el agrietamiento. Esta contracción está en el orden de 3 a 7 mm /10mm, y está en función del espesor del elemento, su edad y la cantidad de agua empleada por m³ de mezcla. Para disminuir la retracción, se recomienda emplear aditivos reductores de agua, curar durante siete días y no usar aireantes.

1.7 Concreto ligero

El uso estructural del concreto que usa los agregados ligeros, o áridos ligeros, con pesos específicos menores de 1 850 k/m³, que van generalmente entre 1 600 a 1 750 k/m³ y resistencias entre 210 a 420 k/cm², se realiza en elementos prefabricados o pretensados.

$$E_c (\text{ligero}) = 1/2 \text{ a } 3/4 E_c (\text{c. normal}) \quad \text{Usar } E_c = 0.135 w^{3/2} \sqrt{f'_c}$$

Para concretos curados con humedad, las resistencias indirectas a tracción y el módulo de rotura, son similares en concreto ligero y concreto normal. Es conveniente tener consideraciones especiales cuando el concreto ligero tendrá un comportamiento bastante dependiente a esfuerzos de fluencia y retracción, como en la determinación de las flechas bajo cargas de larga duración o resistencia a cortante, y la adherencia para control de fisuración.

1.8 Acero de refuerzo

El acero es un material que tiene mucha mayor resistencia que el concreto. Numéricamente, el acero tiene una resistencia a compresión del orden de diez veces mayor que el concreto; y a tracción, la relación es de cien veces mayor. El costo del acero es mucho mayor que el concreto; por lo tanto, la combinación de ambos proporciona un balance adecuado para fabricar elementos resistentes y económicos.

A. El acero de refuerzo debe ser corrugado, excepto en espirales o cables en los que puede ser liso, y debe cumplir las especificaciones del ACI que son:

- a) "Specification for Deformed and Plain Billet - Steel Bars for Concrete Reinforced" ASTM A -615.

- b) "Specification" for Rail - Steel Deformed and Plain bars for Concrete Reinforcement" ASTM - 616, excepto que todas las varillas deben cumplir con los requisitos de la prueba de flexión de varillas de refuerzo de acero de ejes ASTM A - 617 Grado 42, y que las marcas laminadas sobre la superficie de la varilla incluyen la letra "R" para indicar que se trata de acero de riel que cumple con estos requisitos.
- c) "Specification for Axis - Steel Deformed and Plain Bars for Concrete Reinforcement ASTM A - 617.
- d) "Specification for Low - Alloy Steel Deformed Bars for Concrete Reinforcement ASTM A - 706.

B. Las varillas corrugadas de refuerzo con resistencia a fluencia (f_y) = 4,220 k/cm² se podrán emplear siempre que (f_y) sea el esfuerzo correspondiente a una deformación 0.35%, y que cumplan alguna de las especificaciones ASTM listadas anteriormente, o que según la parte 9.4 del reglamento ACI, donde dice que los diseños no deben basarse en una resistencia a la fluencia del refuerzo f_y que exceda de 5 625 k/cm².

- Las varillas de refuerzo soldadas deben indicarse y guiarse por las normas AWS D.14.
- Las mallas de varillas deben seguir la especificación ASTM A - 184 y cumplir las especificaciones ya enumeradas.
- El alambre corrugado para refuerzo debe cumplir con la especificación ASTM A - 496, no debe ser menor que el D4 y para una $f_y > 4,220$ k/cm², debe ser el refuerzo correspondiente a una deformación de 0.35%.
- La malla de alambre liso soldado para refuerzo del concreto debe cumplir la norma ASTM A - 185, excepto par $f_y > 4,220$ k/cm², debe ser el refuerzo correspondiente a una deformación de 0.35%. Las intersecciones soldadas no deben estar espaciadas a más de 30 cm en la dirección del esfuerzo calculado, excepto para mallas de alambre calculadas como estribos.
- La malla de alambre corrugado, soldado para refuerzo de concreto, debe cumplir la especificación ASTM A - 497, excepto para $f_y > 4,220$ k/cm², f_y debe ser el esfuerzo correspondiente a una deformación de 0.35%. Las intersecciones soldadas no deben ser mayores que 40 cm, en dirección del esfuerzo calculado, excepto para mallas de alambre utilizada como estribo.

1.8.1 Tipos de acero de refuerzo

a) Barras redondas

Son las que normalmente se usan en el concreto armado y se fabrican en una gama desde 6 mm a 35 mm de diámetro para usos normales, y de 43 mm a 57 mm para usos especiales. A partir de las barras de diámetro igual a 9.5 mm (3/8"), presentan corrugaciones superficiales que aumenta la adherencia entre hormigón y acero, de acuerdo a las especificaciones ASTM, que como resultado de muchas pruebas e investigaciones se han determinado requisitos mínimos de corrugaciones (espaciamiento, altura y distribución perimetral). Se pide que las corrugaciones tengan un espaciamiento promedio que no sea mayor que 0.7 del diámetro nominal de la varilla, y una altura mínima de 0.04 a 0.05 del diámetro nominal de la varilla; deben, además, encontrarse distribuidas en un 75% del perímetro nominal de la varilla. Las corrugaciones se insertan de manera que el ángulo al eje de la varilla no sea menor de 45°, por lo general hay también corrugaciones longitudinales presentes en la superficie de la varilla.

b) Malla soldada de alambre

Se compone de una serie de alambres de acero estirados en frío, en sentido longitudinal y transversal, formando una retícula rectangular y soldados en los puntos de intersección, con separación igual o desigual en ambos sentidos según la necesidad del proyecto.

c) Acero pretensado

Se usan como cordones de alambres de acero, alambres de acero o barras de alta resistencia pero este acero es materia del curso de concreto pre-tensado o postensado.

1.8.2 Calidades y resistencias del acero

Como puede verse en la tabla, existe una variedad de resistencias de aceros, aunque el que se utiliza en el país es el de $f_y = 4200 \text{ k/cm}^2$, o grado 60. Aunque también hay algunos aceros importados de $f_y = 2800 \text{ k/cm}^2$ en casos muy esporádicos. Para evitar confusiones y errores tanto de resistencia como de diámetro, se proveen de marcas laminadas que indican lo siguiente:

- El fabricante generalmente con una inicial.
- El diámetro con su número correspondiente (del 3 al 18).
- El tipo de acero
 - N = para el procedente de lingotes.
 - A = para el procedente de relaminación de ejes.
 - I = para el procedente de relaminación de carriles.
- Una marca para aceros de alta resistencia que son una o dos líneas longitudinales (acero 60 o 75).

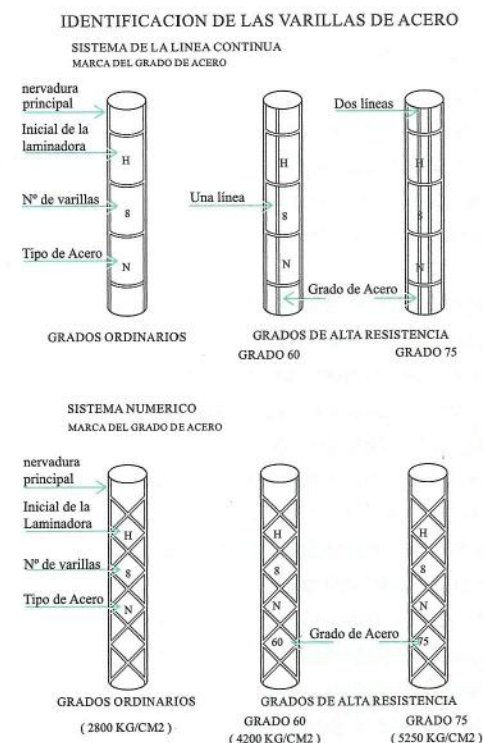


Fig. 1.16a

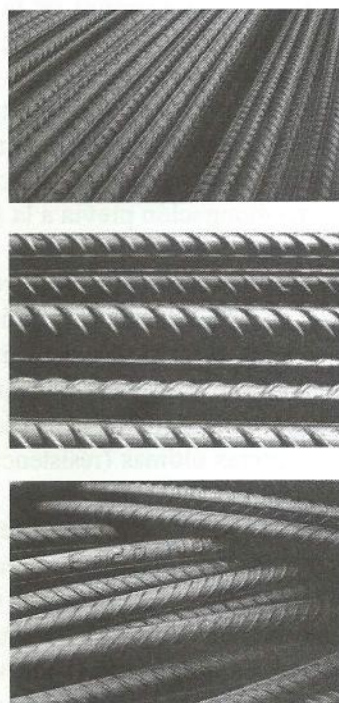


Fig. 1.16b Ejemplo de varios tipos de varillas

1.8.3 Curvas esfuerzo-deformación

Las curvas esfuerzo-deformación para varillas de acero se obtuvieron de varillas de acero cargadas monotónicamente a tracción. Las curvas exhiben una porción inicial elástica lineal, una plataforma de cedencia (zona más allá de la cual, la deformación aumenta con poco o ningún aumento del esfuerzo), una región de endurecimiento por deformación, en la que el esfuerzo nuevamente aumenta con la deformación; y, finalmente, una región en la que el esfuerzo decae hasta que ocurre la fractura.

El módulo de elasticidad del acero está dado por la pendiente de la porción elástica lineal de la curva. El módulo de elasticidad del acero de refuerzo es generalmente se toma igual a 2×10^6 k/cm².

Una propiedad muy importante del acero es el esfuerzo en el punto de cedencia, conocido como la resistencia de cedencia. A veces, a la cedencia le acompaña una disminución brusca en el esfuerzo, de manera que un diagrama esfuerzo-deformación tiene la forma que aparece en la Fig. 1.17. En tal caso, a los esfuerzos en A y en B se les conoce como las resistencias de cedencia superior e inferior, respectivamente. La posición del punto superior de cedencia depende de la velocidad de la prueba, la forma de la sección y la forma del espécimen. Por lo general, se considera que la resistencia de cedencia inferior es la verdadera característica del material, y se denomina simplemente como la resistencia de cedencia. Para los aceros que no tienen una plataforma bien definida de cedencia, generalmente se considera la resistencia a la cedencia como el esfuerzo que corresponde a una deformación específica, como se ilustra en la Fig. 1.18.

Por lo general, la longitud de la plataforma de cedencia es función de la resistencia del acero. Los aceros de alta resistencia con alto contenido de carbono, generalmente tienen una plataforma más corta de cedencia que los aceros de menor resistencia y menor contenido de carbono. En forma semejante, el trabajado en frío del acero puede producir un acortamiento de la plataforma de cedencia, a grado tal que el endurecimiento por deformación comienza inmediatamente después de principiar la cedencia. Los aceros de alta resistencia también tienen una elongación previa a la fractura más pequeña de los aceros de baja resistencia.

Las varillas de acero corrugado producidas respetando las especificaciones del ASTM, tienen una resistencia de cedencia especificada (2 760, 3 450, 4 140, ó 5 170 k/cm²); se les conoce como grados 40, 50, 60 y 75, respectivamente. Para los aceros que carecen de un punto de cedencia bien definido, se considera que su resistencia de cedencia es el esfuerzo que corresponde a una deformación de 0.005, para los grados 40, 50 y 60; y una de 0.0035 para el grado 75. Las resistencias últimas (resistencias a tracción), que corresponde a los grados 40, 50, 60 y 75, son por lo menos 70, 80, 90 y 100 kips/pulg² (4 830, 5 520, 6 210 y 6 900 k/cm²). Los alambres de acero normalmente tienen resistencias de cedencia y última en la parte superior de los rangos recién dados. La deformación mínima a la fractura del acero también está definida en las especificaciones, ya que es esencial para la seguridad de la estructura que el acero sea suficientemente dúctil, para que pueda sufrir grandes deformaciones antes de fracturarse. Las especificaciones del ASTM para varillas corrugadas requieren una elongación, definida por la extensión permanente de una longitud calibrada, de 8 pulg (203 mm) en la fractura de la muestra, expresada como un porcentaje de la longitud del calibre, que varía con el origen, grado y diámetro de la varilla de acero y va de 4.5% hasta 12%.

La resistencia especificada de cedencia normalmente se refiere a un mínimo garantizado. Por lo general, la resistencia de cedencia real de las varillas es algo mayor que este valor especificado. En algunos casos, como en la evaluación de la resistencia sísmica de los miembros, es indeseable tener una resistencia de cedencia mucho mayor que la considerada en el diseño. Esto se debe a que la resistencia a flexión incrementada de un miembro, por ejemplo, produce mayores fuerzas cortantes actuando en el miembro bajo carga última, lo que puede producir una falla cortante frágil del miembro en vez de una falla a flexión dúctil. En consecuencia, las especificaciones para el acero estructural en zonas sísmicas también deberían requerir que no se exceda determinada resistencia de cedencia para cierto grado del acero.

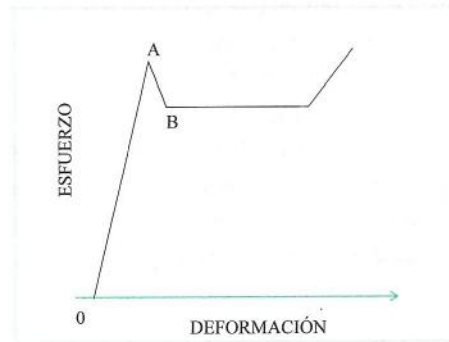


Fig. 1.17 Curva Esfuerzo - Deformación puntos A, B Superior e Inferior de cedencia



Fig. 1.18 Punto de cedencia para un acero sin plataforma de cedencia bien definido

Se supone que las curvas esfuerzo-deformación para el acero a tracción y compresión son idénticas. Las pruebas han demostrado que ésta es una suposición razonable.

El efecto de una tasa elevada de carga es aumentar la resistencia de cedencia. Por ejemplo, se ha informado que para una tasa de deformación de 0.01/s se puede aumentar la resistencia inferior de cedencia hasta en 14%.

En el diseño es necesario idealizar el perfil de la curva esfuerzo-deformación. Por lo general, la curva se simplifica idealizándola como dos líneas rectas, como en la Fig. 1.19 (a), ignorando la resistencia superior de cedencia y el aumento en el esfuerzo debido al endurecimiento por deformación. Esta es la curva esfuerzo-deformación que supone el código ACI para el acero. Si la deformación plástica, que ocurre a un esfuerzo casi constante después de la cedencia, es mucho mayor que la extensión elástica máxima, esta curva supuesta da muy buena exactitud. Esta simplificación es especialmente exacta para el acero que tiene una baja resistencia de cedencia. Si el acero se endurece por deformación poco después del inicio de la cedencia, esta curva supuesta subestima el esfuerzo del acero a deformaciones elevadas. En algunos casos puede ser necesario evaluar el esfuerzo del acero a deformaciones mayores que la de la cedencia, y así poder calcular con mayor exactitud la resistencia de los miembros bajo estas deformaciones. Esto es especialmente cierto en el diseño sísmico, donde los requerimientos de ductilidad pueden implicar la posibilidad de alcanzar deformaciones muchas veces más grandes que la deformación de cedencia. En las figuras 1.19 (b) y (c) se muestran idealizaciones más exactas utilizables para la curva esfuerzo-deformación. Para utilizar estas idealizaciones son necesarios los valores de los esfuerzos y deformaciones al inicio de la cedencia, al del endurecimiento por deformación y a la ruptura. Estos puntos se pueden determinar en las curvas esfuerzo-deformación obtenidas en pruebas.

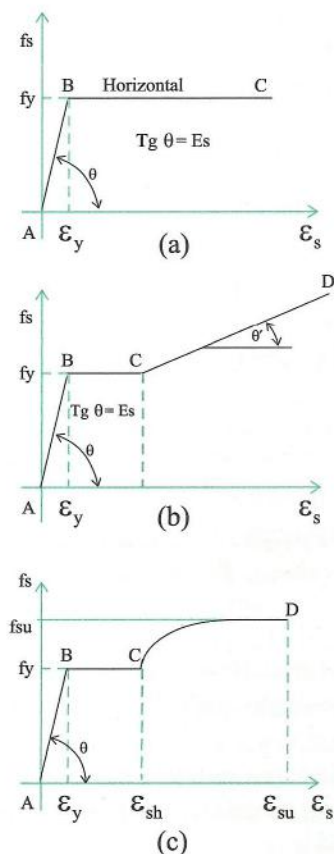


Fig. 1.19

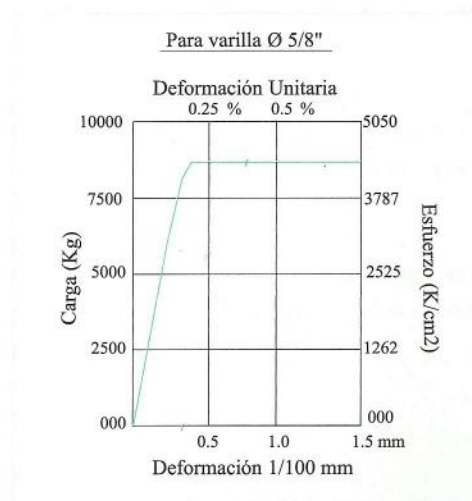
1.8.4 Aceros peruanos

En nuestro país tenemos principalmente aceros fabricados en la planta de la empresa Aceros Arequipa. Se fabrican varillas con dos tipos de acero, los fabrican con **aceros normales** en base a las normas ASTM A615 – 84, a grado 60 o ITINTEC 341 - 031 - A - 42.

Los fabricados con **aceros soldables**, de acuerdo a las normas ASTM A706-88, son llamados acero soldable AA 706.

La otra planta que fabrica aceros corrugados de construcción para concreto armado es la empresa SIDER PERU, que la hace en base a las normas ASTM A 615 – 68, y posteriores actualizaciones.

En el ANEXO final del libro se dan las tablas efectuadas para cada tipo de varillas y su utilización.



ACERO GRADO 60 (SIDERPERU)

Composición química:

CARBONO (C)	:	0.34 — 0.46 %
MANGANESO (Mn)	:	1.05 — 1.15 %
FOSFORO (P)	:	0.04 % máx.
AZUFRE (S)	:	0.05 % máx.
SILICIO (Si)	:	0.15 — 30 %

Soldadura: Usar electrodos EXX16 o EXX18. La temperatura de precalentamiento > 93° C

ANÁLISIS, DISEÑO, RESISTENCIA Y SERVICIABILIDAD

2.1 Métodos de diseño

En este tratado, siguiendo los métodos de diseño del ACI-2008, consideraremos básicamente el “Diseño por resistencia”. Podemos mencionar que el ACI admite, además, el diseño llamado “Diseño alternativo”, que se encuentra en el apéndice B de dicho reglamento.

El método de diseño por “resistencia” nos indica que los elementos deben proporcionarse para una resistencia adecuada, de acuerdo con las disposiciones del reglamento ACI, utilizando factores de carga y factores de reducción de resistencia ϕ , que explicaremos más adelante.

El método alternativo de diseño tiene similitud al método de “Cargas de servicio”, empleado en reglamentos de años anteriores al ACI, especialmente para elementos a flexión sin carga axial, pero notándose diferencias en los diseños de columnas, por cortante, longitud de anclaje y empalmes.

Independientemente de cuál de los métodos mencionados haya sido usado, deben cumplirse los requisitos generales de serviciabilidad del reglamento, tales como requisitos para el control de las deflexiones y los agrietamientos.

2.2 Cargas

El reglamento dispone que las estructuras deben diseñarse para resistir todas las cargas aplicables.

- Las cargas de servicio deben estar de acuerdo con los requisitos del reglamento nacional de construcciones, y con las reducciones de carga viva que en él se permite.
- En el diseño para carga de viento o sismo, las partes integrantes de la estructura deben diseñarse para resistir las cargas laterales totales (ver reglamento antisísmico).
- Debe tomarse en consideración los efectos que pudieran ocasionar las fuerzas debidas al presfuerzo, cargas de izaje, vibración, impacto, contracción, cambios de temperatura, fluencia y asentamientos diferenciales de los apoyos.
- Las partes estructurales monolíticas deben diseñarse para resistir la totalidad de las cargas laterales supuestas. Por ejemplo, los muros de corte de los edificios, no así los muros de tabiquería.

2.3 Métodos de análisis

Los elementos de marcos, pórticos o estructuras continuas, deben diseñarse para resistir los efectos máximos de las cargas factorizadas (son las cargas de servicios multiplicadas por factores de carga, que están indicados en las normas) según se determina por las teorías de análisis elástico, como son, entre otros, los métodos de Kani, Cross, Takabeya, etc., métodos matriciales ó métodos de análisis por elementos finitos. El Reglamento ACI modifica estas consideraciones porque permite la redistribución de momentos negativos en elementos continuos sujetos a flexión, debiendo utilizarse las suposiciones simplificadas de las secciones correspondientes del mismo reglamento.

2.4 Redistribución de momentos negativos en elementos continuos de concreto armado sujetos a flexión

Cuando los momentos negativos no sean calculados por medio de valores aproximados, sino más bien mediante la teoría elástica en los apoyos de elementos continuos sujetos a flexión para cualquier distribución supuesta de carga, estos pueden ser aumentados o disminuidos en no más de:

$$20 \times \left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} \right) \%$$

Donde:

- ρ = % de refuerzo a tracción A_s / bd
- ρ' = % de refuerzo a compresión A'_s / bd
- ρ_b = % de refuerzo balanceado de Deformación

Estos momentos negativos modificados deben usarse para calcular los momentos en las secciones dentro del claro. La redistribución de los elementos negativos debe hacerse solo cuando la sección, en la cual se reduce el momento, se diseña de tal manera que ρ o $\rho - \rho'$ no sea mayor que $0.50 \rho_b$.

Donde:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \times \frac{6115}{6115 + f_y}$$

2.5 Definiciones y consideraciones importantes

- **Módulo de elasticidad para el concreto “ E_c ”**

$$E_c = W_c^{3/2} \sqrt{f'_c} \text{ en (K/cm}^2\text{)}$$

Para $1\,440 \text{ k/cm}^3 \leq W_c \leq 2\,480 \text{ k/cm}^3$

$$E_c = 15\,100 \sqrt{f'_c} \text{ en (K/cm}^2\text{)}$$

para concreto de peso normal

- **Módulo de elasticidad para el acero “ E_s ”**

$$E_s = 2\,039\,000 \text{ k/cm}^2$$

A. Rigidez

Deberá asumirse alguna suposición razonable, y además congruente, a lo largo de todo el análisis para el cálculo de rigideces relativas a flexión y muros con vigas y losas, debiendo considerarse el efecto del acartelamiento para el cálculo de momentos y diseño de elementos.

B. Longitud del tramo

- a) Para elementos no contruidos monolíticamente con sus apoyos, será igual al claro más el peralte del elemento, pero igual o menor que la distancia entre centros de los apoyos.
- b) Al analizar pórticos, marcos o elementos continuos se considerará la distancia centro a centro de los apoyos al determinar los momentos.
- c) En el caso de vigas contruidas monolíticamente con sus apoyos, podrán utilizarse los momentos en la cara de los apoyos para el diseño.
- d) En las losas macizas o nervadas, con claros libres menores de 3 m. Y contruidos monolíticamente sobre apoyos libres con tramos libres iguales a los claros de la losa, despreciándose el ancho de las vigas.

2.6 Resistencia de diseño

La resistencia de diseño proporcionada por un elemento, sus conexiones con otros elementos, así como sus secciones transversales, en términos de flexión, carga axial, cortante y torsión, deben tomarse como la resistencia nominal calculada de acuerdo con los requisitos y suposiciones del Reg. ACI multiplicada por un factor ϕ de reducción de resistencia.

El factor de reducción de resistencia ϕ debe ser el siguiente:

a) Secciones controladas por tracción 0.90

Las secciones son controladas por tracción, si la deformación unitaria neta de tracción en el refuerzo de acero extremo en tracción, ϵ_t , es igual o mayor que 0.005, justo cuando el concreto en compresión alcanza su límite de deformación unitaria asumido de 0.003. Las secciones con ϵ_t , entre el límite de deformación unitaria controlada por compresión y 0.005, constituyen una región de transición entre secciones controladas por compresión y secciones controladas por tracción.

b) Secciones controladas por compresión

Las secciones se denominan controladas por compresión si la deformación unitaria neta de tracción en el acero extremo en tracción, ϵ_t , es igual o menor que el límite de deformación unitaria controlada por compresión, cuando el concreto en compresión alcanza su límite de deformación supuesto de 0.003. El límite de deformación unitaria controlada por compresión, es la deformación unitaria neta de tracción del refuerzo en condiciones de deformación unitaria balanceada. Para esfuerzo en aceros 420 K/cm², y para todos los esfuerzos presforzados, se permite fijar el límite de deformación unitaria controlada por compresión en 0.002.

- Elementos con refuerzo en espiral ACI 0.75
- Otros elementos reforzados 0.65

Para las secciones en las que la deformación unitaria neta a la tracción en el acero extremo en tracción en el estado de resistencia nominal, ϵ_t , se encuentra entre los límites para secciones controladas por compresión y las secciones controladas por tracción, se permite que ϕ aumente linealmente desde el valor correspondiente a las secciones controladas por compresión hasta 0.90, en la medida que ϵ_t aumente desde el límite de deformación unitaria controlado por compresión hasta 0.005.

En forma alternativa, cuando se usa el apéndice B, para elementos en los cuales f_y no exceda 4200 Kgf/cm², con refuerzo simétrico, y cuando $(d - d') / h$ no es menor de 0.70, se permite aumentar ϕ linealmente hasta 0.90, en la medida que ϕP_n disminuye desde $0.10f'_c A_g$ hasta cero.

Para otros elementos reforzados ϕ puede incrementarse linealmente a 0.90 en la medida que ϕP_n disminuye desde $0.10f'_c A_g$ o ϕP_b , el que sea menor, hasta cero.

c) Cortante y torsión 0.75

- d) Aplastamiento en el concreto (excepto para anclajes de postensado y modelos puntal-tensor) 0.65
- e) Zonas de anclaje de postensado 0.85
- f) Los modelos puntal-tensor (apéndice A) y puntales, zonas de nodos y aéreas de apoyo en esos modelos 0.75
- g) Las secciones a flexión en los elementos pretensados, donde la longitud embebida del torón es menor que la longitud de desarrollo (l_d) en una sección de un elemento, siempre que el esfuerzo de diseño del torón para esa sección no exceda los valores obtenidos a partir de la relación bilineal de la ecuación:

$$l_d = \left(\frac{f_{se}}{210} \right) d_b + \left(\frac{f_{ps} - f_{se}}{70} \right) d_b$$

- Desde el extremo del elemento hasta el extremo de la longitud de transferencia 0.75
- Desde el extremo de la longitud de transferencia hasta el extremo de la longitud de desarrollo, debe permitirse que ϕ sea incrementado linealmente de 0.75 hasta 0.9.

Donde la adherencia del torón no se extiende hasta el extremo del elemento, se debe asumir que el embebido del torón se inicia en el extremo de la longitud no adherida.

- h) Las longitudes de desarrollo especificadas en el A.C.I no requieren de un factor ϕ .
- i) Para estructuras que dependen de muros estructurales intermedios prefabricados de las categorías de diseño sísmico D, E o F, pórticos especiales resistentes a momento, o muros estructurales especiales para resistir los efectos sísmicos, E, ϕ debe modificarse de acuerdo con lo siguiente:
- En cualquier elemento estructural que se diseñe para resistir E, ϕ para cortante debe ser 0.60, si la resistencia nominal a cortante del elemento es menor que el cortante correspondiente al desarrollo de la resistencia nominal a flexión del elemento. La resistencia nominal a flexión debe determinarse considerando las cargas axiales mayoradas más críticas, e incluyendo E.
 - En diafragmas ϕ para cortante, no debe exceder el mínimo ϕ para cortante usado para los elementos verticales del sistema primario de resistencia ante fuerzas sísmicas.
 - En nudos y vigas de acople reforzados en forma diagonal ϕ para cortante 0.85
- j) Para flexión, compresión, cortante y aplastamiento en concreto estructural simple 0.60

2.7 Resistencia requerida para la combinación de cargas

La resistencia requerida U debe ser, por lo menos, igual al efecto de las cargas mayoradas en las ecuaciones siguientes. Debe investigarse el efecto de una o más cargas que no actúan simultáneamente.

- 1) $U = 1.4 D$
- 2) $U = 1.2 D + 1.6 L + 0.5 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R)$
- 3) $U = 1.2 D + 1.6 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) + (1.0 L \text{ ó } 0.5 W)$
- 4) $U = 1.2 D + 1.0 W + 1.0 L + 0.5 (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R)$ a torsión en columnas,
- 5) $U = 1.2 D + 1.0 E + 1.0 L + 0.2 S$
- 6) $U = 0.9 D + 1.0 W$
- 7) $U = 0.9 D + 1.0 E$

Excepto que:

- a) Su factor de carga, en la carga viva L en las ecuaciones (3) a (5), podrá ser reducida a 0.5, excepto para estacionamientos, aéreas utilizadas para reuniones públicas y todas las aéreas donde L sea mayor que 4.8 k N/m^2 .
- b) Donde W se basa en cargas de servicio de viento, $1.6W$ se usará en lugar de $1.0W$; se usará en lugar de $1.0W$ en las ecuaciones (4) y (6); y $0.8W$ se usará en lugar de $0.5W$ en fórmula (3).
- c) Donde E se basa en cargas de servicio, $1.4E$ será usada en lugar de $1.0E$, en las ecuaciones (5) y (7).
- d) Cargas de impacto: estas cargas se usan como L .
- e) Cargas (T) por cambios de temperatura, agrietamientos, asentamientos diferenciales.
- f) Deberá tenerse en cuenta en combinación con otras cargas, si ocurre la posibilidad de un máximo esfuerzo normativamente con estas. Si el efecto de T es mayor que el asumido, el factor de carga de T deberá ser mayor que 1.0.
- g) Cargas por fluidos (F). Se utilizará el mismo factor de carga que carga muerta (M), en ecuaciones de (1) al (5) y la ecuación (7).
- h) Cargas por presión lateral de suelos (H), cuando se presenta H debe incluirse en las combinaciones de carga del (1) al (7), con factores de carga de acuerdo a los siguientes casos:
 - 1) Cuando H actúa sola, o suma a los efectos de otras cargas, deberá incluirse con un factor de carga 1.6.

- II) Cuando el efecto de H es permanente, y en sentido contrario al efecto de otras cargas, se incluirá con factor de carga 0.9.
- III) Cuando el efecto de H no es permanente pero cuando está presente, va en sentido contrario al efecto de las otras cargas no se incluirá la carga H .
- i) Cargas de fango y hielo, se utiliza la información de ASCE/SEI7. En los EEUU existen planos o mapas que indican sus características; salvo exista esta información, pueden ser utilizados en la jurisdicción correspondiente.
- j) Para el diseño de zonas de anclaje de postensado debe usarse un factor 1.2 para la fuerza de preesfuerzo máxima aplicada por el gato.

Donde:

U = Resistencia requerida.

D = Cargas muertas, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

F = Cargas debidas al peso y presión de fluidos con densidades bien definidas y alturas máximas controlables, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

T = Efectos acumulados de variación de temperatura, flujo plástico, retracción, asentamiento diferencial, y retracción del concreto de retracción compensada.

L = Cargas vivas, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

H = Cargas debidas al peso y empuje del suelo, del agua en el suelo, u otros materiales, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

E = Carga por sismo.

L_r = Cargas vivas de cubierta, o momento y fuerzas internas correspondientes.

S = Cargas por nieve, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

R = Cargas por lluvia, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

W = Carga por viento, o momentos y fuerzas internas correspondientes.

FLEXIÓN

3.1 Generalidades y consideraciones fundamentales

La resistencia de un elemento o una sección transversal debe satisfacer las siguientes condiciones fundamentales:

- Equilibrio estático.
 - Compatibilidad de deformaciones.
- a) Las secciones planas antes de la flexión, permanecen planas después de la flexión: este es el principio de Bernoulli, implica que la deformación longitudinal en el concreto y el acero en los distintos puntos a través de una sección, es proporcional a la distancia del eje neutro. Esta suposición es aceptablemente correcta hasta alcanzar la falla a flexión, siempre que exista buena adherencia entre el concreto y el acero. Esta suposición de que las secciones permanecen planas es suficientemente exacta para fines de diseño, y no es válida para vigas de **gran peralte** o en regiones de cortante elevado.
- b) Se conoce la curva esfuerzo - deformación para el acero: se supone una curva bilineal esfuerzo - deformación despreciándose el endurecimiento por deformación. En las especificaciones del acero no se indica el punto en que empieza el endurecimiento por deformación, por lo que es difícil incluirlo. No es conveniente confiar en el aumento de resistencia debido al endurecimiento por deformación, ya que implicaría asumir deformaciones muy grandes de los elementos.

Si el aumento en resistencia pudiera provocar una situación desfavorable, como la falla frágil por cortante, en lugar de la falla dúctil a flexión en el diseño sísmico, entonces sí podría ser considerada la resistencia adicional por deformación del acero.

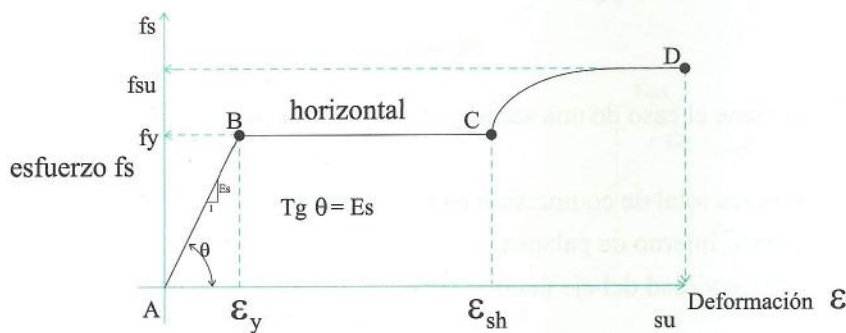


Fig. 3.1

- c) Puede despreciarse la resistencia a tracción del concreto: cualquier esfuerzo a tracción que exista en el concreto por debajo del eje neutro, es pequeño y tiene un pequeño brazo de palanca; por lo tanto, puede despreciarse.
- d) La curva esfuerzo - deformación en el concreto define la magnitud y distribución del esfuerzo a compresión, esta consideración es necesaria para evaluar el comportamiento verdadero de la sección, debido a las deformaciones en el concreto comprimido, y son proporcionales a la distancia desde el eje neutro, la curva esfuerzo - deformación del concreto se vio en el capítulo 2. El bloque de esfuerzos cambia al aumentar el momento flector en una sección de la viga, alcanzando su resistencia a flexión, o momento máximo de resistencia, cuando la fuerza total de compresión en el concreto, multiplicada por su brazo interno de palanca ($j d$) es un máximo.

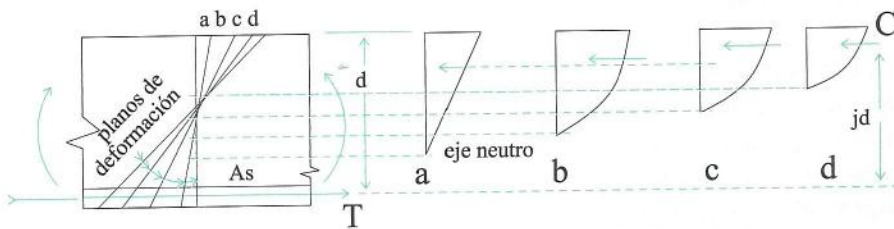


Fig. 3.2

Las propiedades del bloque de esfuerzo a compresión pueden definirse en la sección de momento máximo, mediante los parámetros K_1 , K_2 y K_3 .

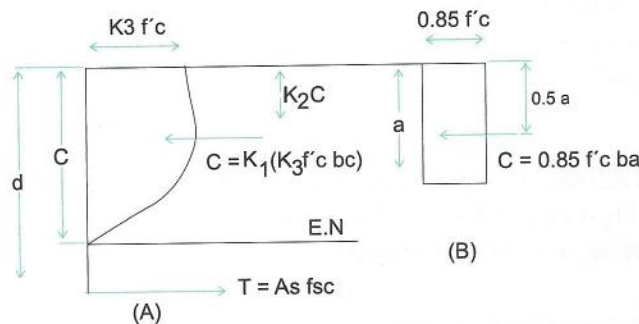


Fig. 3.3

En la Fig. 3.2 se tiene el caso de una sección rectangular de ancho “b” y peralte efectivo “d”, se tiene:

$K_1 K_3 f'c bc$ = fuerza total de compresión en el concreto.

$d - k_2 C$ = brazo interno de palanca.

C = profundidad del eje neutro.

Igualando las fuerzas externas, internas y momentos, se calcula K_1 , K_2 , K_3

En la Fig. 3.3 se aprecia el bloque de esfuerzos rectangular equivalente, que por simplificación reemplaza al de la figura “A” para obtener la resistencia a flexión.

Conociendo la magnitud (K_1 , K_3), la posición (K_2) de la fuerza de compresión del concreto el bloque rectangular simplifica y facilita considerablemente los cálculos. El bloque rectangular tiene:

- un esfuerzo medio $= 0.85 f'_c$
- una profundidad $= a$
- $a/c = \beta_1 = 0.85 \Rightarrow \text{para } f'_c \leq 281 \text{ K/cm}^2$
- para $f'_c > 281 \text{ K/cm}^2 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \text{se disminuirá en } 0.05 \text{ por cada } 70 \text{ K/cm}^2 \text{ de aumento.}$
- pero $\beta_1 \geq 0.65$

Para que las fuerzas resultantes de los bloques real y equivalente de esfuerzos tengan la misma magnitud y línea de acción, los valores de los parámetros son:

$$C = K_1 K_3 f'_c b c = 0.85 f'_c b a \therefore K_1 K_3 = 0.85 a/c = 0.85 \beta_1$$

$$K_2 c = 0.5 a \therefore K_2 = 0.5 a/c = 0.5 \beta_1$$

Debe mencionarse que en la distribución de esfuerzos inelásticos en el concreto de alta resistencia, a medida que vayan alcanzándose esfuerzos máximos, la relación Esfuerzo - Deformación en el concreto no es una línea recta, pero algunas curvas (inclusive el esfuerzo) no es proporcional a la deformación (ver Fig. 1.1).

La verdadera distribución de los esfuerzos en el concreto sometido a esfuerzo compresivo es muy compleja y generalmente no conocida, habiéndose considerado formas parabólicas, trapezoidales y rectangulares, y llegando siempre a resultados razonables aunque aparentemente la forma parabólica es la que más se adapta a nuestras consideraciones.

- e) La deformación máxima en la fibra extrema a compresión del concreto es 0.003 en la resistencia a flexión de la sección. Aunque la deformación máxima por compresión del concreto antes de la falla varía de 0.003 a 0.008, y la mayoría de los países usan, para fines prácticos, valores entre 0.003 y 0.004. Nosotros de acuerdo con las pruebas y normas del A.C.I. optaremos el valor conservador de 0.003.

a) Flexión

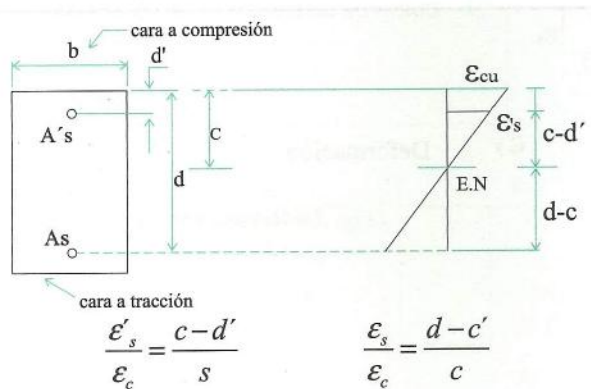


Fig. 3.4

b) Flexión y carga axial

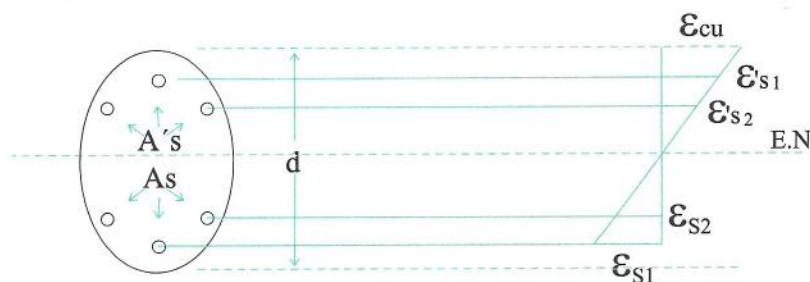


Fig. 3.5

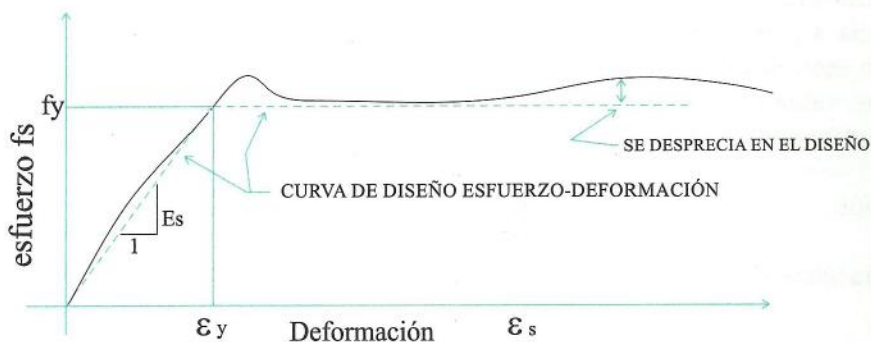
- f) El esfuerzo en el refuerzo que esté por debajo del esfuerzo de fluencia “fy”, se calculará como $f_s = E_s \epsilon_s$, para esfuerzos mayores de “fy”, el esfuerzo del refuerzo se considerará independiente a la deformación e igual a “fy”.

Luego cuando:

$$\epsilon_s \leq \epsilon_y \quad (\text{deformación de fluencia})$$

$$A_s f_y = A_s \times E_s \times \epsilon_s$$

$$\epsilon_s \geq \epsilon_y \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{donde } \epsilon_s \text{ es el valor de las} \\ \text{deformaciones (ver fig. 3.5)} \end{array} \right.$$

Fig. 3.6 Relación $f_s - \epsilon_s$

3.2 Casos de flexión en secciones rectangulares con acero en tracción

A medida que una viga es sometida a un incremento de carga en forma gradual, se producen tres etapas en su comportamiento a flexión que se describen a continuación:

3.2.1 Estado elástico no agrietado:

Esta situación sucede cuando la tracción en el concreto es inferior al módulo de rotura, de tal manera que todavía no aparecen grietas tracción en el elemento. Se considera que:

- El comportamiento de esfuerzos en el concreto y el acero es elástico.
- La deformación del acero y del concreto es igual para ambos.
- Puede convertirse el área de refuerzo en un área equivalente de concreto que sumada a la original de concreto tendríamos la sección transformada ($n A_s$).
- A partir de la sección transformada se pueden aplicar los métodos usuales de análisis de las vigas elásticas homogéneas, calculándose de forma normal las propiedades de la sección como I_c , S_c , y ubicación del eje neutro, pudiéndose usar las ecuaciones:

$$f = \frac{My}{I} = \frac{M}{S} \quad \text{y} \quad S = \frac{I}{C}$$

$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

Donde:

f = esfuerzo de flexión a la distancia “ y ” de la fibra neutra.

M = momento flector externo en la sección.

I = momento de inercia de la sección respecto al eje neutro.

C = distancia del eje neutro a la fibra exterior.

S = módulo de sección resistente.

v = el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal.

V = corte total en una sección.

b = ancho de la viga.

Q = momento estático respecto al eje neutro de la parte de la sección comprendida entre el punto considerado y la cara más próxima.

v_{Min} : en los bordes superior e inferior = 0

v_{Max} : para $Q = ba^2 / 8$ (eje neutro) = $\frac{ba^3}{12}$

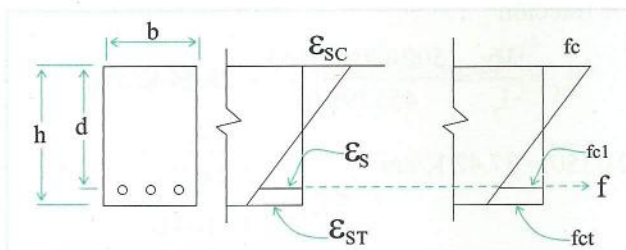


Fig. 3.7

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{fs}{Es} = \frac{fc_1}{Ec} \\ fs &= fc_1 \times \frac{Es}{Ec} \\ T &= As \times fs \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Si } n &= \frac{Es}{Ec} \\ fs &= n fc_1 \\ T &= As \times n \times fc_1 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Para una viga rectangular de $b = 25 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$, $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$, $f'_c = 350 \text{ K/cm}^2$ con $As = 3 \text{ } \emptyset 1''$, un $M = 5 \text{ T-m}$, calcular los esfuerzos producidos en ella.

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2 \quad Es = 2 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

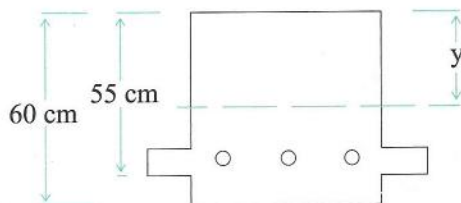
$$fc = 350 \text{ K/cm}^2 \quad Ec = 15000 \sqrt{350} = 280624.3 \text{ K/cm}^2$$

$$\text{Módulo de rotura} = 2\sqrt{f'_c} n = Es/Ec = 7.13$$

$$As = 3 \text{ } \emptyset 1'' = 3 \times 5.1 = 15.3 \text{ cm}^2$$

$$(n-1) As = (7.13 - 1) \times 15.3 = 93.79 \text{ cm}^2$$

Eje neutro:



$$Y = \frac{25 \times 60 \times 30 + 93.79 \times 55}{25 \times 60 + 93.79} = 31.47 \text{ cm}$$

$$I_t = \frac{25 \times 60^3}{12} + (25 \times 60) (31.47 - 30)^2 + 93.79 (55 - 31.47)^2$$

$$I_t = 450000 + 3241.35 + 51927.86 = 505169.21 \text{ cm}^4$$

Esfuerzo de tracción

$$f_{ct} = \frac{My}{I_t} = \frac{500000 \times 28.53}{453795.01} = 28.24 \text{ K/cm}^2$$

$$f_{\text{admisible}} = 2\sqrt{350} = 37.42 \text{ K/cm}^2$$

$$f_{ct} < f_{\text{adm}}$$

$$28.24/\text{cm}^2 < 37.42 \text{ K/cm}^2 \quad \text{No se agrieta}$$

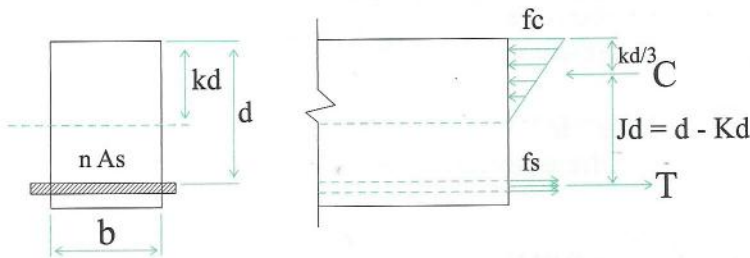
3.2.2 Estado elástico agrietado

Cuando: $f_{CT} > \text{Módulo de rotura}$
 $f_{cc} < 1/2 f'_c$
 $f_s < f_y$

El comportamiento de los materiales es aproximadamente elástico, y sucede bajo cargas y condiciones de servicio, asumiéndose que las grietas de tracción han avanzado hasta el eje neutro.

Para el cálculo de esfuerzos y deformaciones puede utilizarse el criterio de sección transformada, considerándose que la zona agrietada no existe para efectos de resistir esfuerzos.

Para la determinación del eje neutro, considerando la sección del concreto a compresión y la sección transformada en tracción, se igualan momentos de las superficies en compresión y en tracción:



$$b (kd/2)^2 - n A_s (d - Kd) = 0 \Rightarrow \text{se obtiene "Kd"}$$

$$C = bkd/2 \quad f_c \quad (\text{fuerza de compresión})$$

$$T = A_s f_s \quad (\text{fuerza de tracción})$$

El par formado por "C" y "T" debe ser numéricamente igual al momento exterior "M".

$$\Sigma M_c: \quad M = T \times j \times d = A_s \times f_s \times jd$$

$$\text{luego:} \quad f_s = \frac{M}{A_s \times jd}$$

$$\Sigma M_T: \quad M = C \times j \times d = \frac{b \times k \times d}{2} f_c \quad jd = \frac{bd^2}{2} \quad k \times j \times f_c$$

$$\text{luego} \quad f_c = \frac{M}{1/2 bd^2 kj}$$

$$\begin{aligned} \text{de la figura} \quad jd &= d - kd/3 \\ j &= 1 - k/3 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Encontrar el esfuerzo a compresión en el concreto, tracción en el acero y propiedades importantes de la siguiente viga:

$$\begin{aligned}
 b &= 25 \text{ cm} & f_y &= 4200 \text{ K/cm}^2 \\
 h &= 60 \text{ cm} & f'_c &= 350 \text{ K/cm}^2 \\
 d &= 55 \text{ cm} & A_s &= 3 \text{ } \varnothing \text{ 1"} = 15.3 \text{ cm}^2 \\
 I &= 505\,169.21 \text{ cm}^4 \text{ (no agrietado)} & f_r &= 37.42 \text{ K/cm}^2 \\
 M &= 10 \text{ T-m} & 2\sqrt{f'_c} &= 37.42 \text{ K/cm}^2 \\
 & & n &= \frac{E_s}{E_c} = 7.13
 \end{aligned}$$

Verificar si la sección está o no agrietada

$$f_{CT} = \frac{MY}{I} = \frac{1000000 \times 28.53}{505169.20} = 56.48 \text{ K/cm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} f_{CT} &= 56.48 \\ f_r &= 37.42 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f_{CT} > f_r \\ &\therefore \text{La sección está agrietada} \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{15.3}{25 \times 55} = 0.0111$$

$$K = -\rho n \pm \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} \text{ (de la ecuación de 2º)}$$

$$K = -0.011(7.13) \pm \sqrt{(0.011 \times 7.13)^2 + 2 \times 0.011 \times 7.13}$$

$$K = 0.325$$

$$j = 1 - \frac{K}{3} = 1 - \frac{0.325}{3} = 0.892$$

$$j = 0.892$$

$$f_c = \frac{M}{1/2 bd^2 K j} = \frac{1000000}{1/2 \times 25 \times 55^2 (0.325)(0.892)}$$

$$f_c = 91.23 \text{ K/cm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} f'_c/2 &= \frac{350}{2} = 175 \text{ K/cm}^2 \\ f_c &= 91.23 \text{ K/cm}^2 < 175 \text{ K/cm}^2 \end{aligned} \right\} \therefore \text{O.K.}$$

$$f_s = \frac{M}{A_s j d} = \frac{1000000}{15.3 \times 0.892 \times 55} = 1332.24 \text{ K/cm}^2$$

Cálculo del momento de inercia de la sección agrietada.

$$I_t = \frac{b(Kd)^3}{3} + A_s n(d - Kd)^2$$

$$I_t = \frac{250.325 \times 55^3}{3} + 15.3 \times 7.13 (55 - 0.325 \times 55)^2$$

$$I_t = 197947.62 \text{ cm}^4$$

3.2.3 Estado de rotura

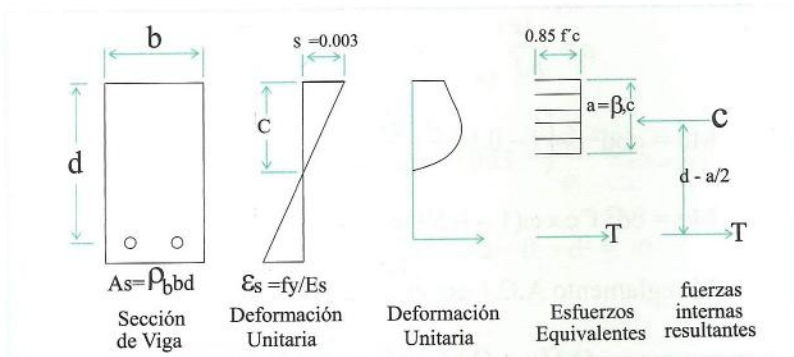
Los análisis de los estados I y II, para esfuerzos y deformaciones, siguen un comportamiento elástico en las vigas de concreto armado. El tener estado un análisis más realista para elementos que soportan cargas, las cuales llevan al elemento a esfuerzos próximos a la rotura o comportamiento inelástico.

Se analiza para valores de deformación en el concreto " ϵ_u " entre 0.003 y 0.004, asumiéndose el valor $\epsilon_u = 0.003$ para todos los análisis realizados. Se han hecho muchas pruebas para encontrar la forma de la curva de esfuerzo, se han asumido diversas formas como parabólica, trapezoidal, etc., habiéndose concluido que la forma de ésta no es tan importante; en cambio, sí lo es conocer el **valor** de la resultante "C" y la **ubicación** de ella.

Por lo tanto, es necesario conocer lo siguiente:

Fluencia del acero " f_y "

- aplastamiento del concreto para una deformación $\epsilon_u = 0.003$
- ubicación de "C" respecto a la fibra exterior a compresión.



$\beta_1 = 0.85$ para $f'_c \leq 280 \text{ K/cm}^2$, disminuir en 0.05 para cada 70 K/cm^2 de aumento a 280 K/cm^2 , pero β_1 no menor que 0.65

$$T = A_s f_y = \rho_b b d f_y$$

$$C = 0.85 f'_c a b = 0.85 f'_c \beta_1 c b$$

En este estado pueden ocurrir tres tipos de falla: a **tracción**, a **compresión** y **balanceada**.

A. Falla a tracción

Para un contenido pequeño de acero, este alcanzará la resistencia de cedencia " f_y ", antes que el concreto alcance su máxima capacidad de resistencia $T = A_s f_y$ permanece constante a mayores cargas, ante una pequeña carga adicional y consecuente elongación plástica del acero a través de las grietas de flexión, se reduce la profundidad del eje neutro aumentando el brazo de palanca; y, por tanto, el momento de resistencia. El cual se vuelve máximo cuando la fibra extrema a compresión del concreto es aproximadamente 0.003, a mayor deformación disminuye el momento resistente, comenzándose luego a aplastar el concreto.

Luego para falla a tracción:

$$f_s = f_y \text{ (resistencia a cedencia)} \quad C = T$$

$$0.85 f'_c a b = A_s f_y \Rightarrow a = \frac{A_s \times f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$M_u = A_s f_y (d - 0.5 a) \quad \text{1er tanteo}$$

$$M_u = A_s f_y \left(d - 0.59 \frac{A_s f_y}{f'_c b} \right)$$

Se sabe que:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\rho \times f_y}{f'_c}$$

$$M_u = \rho b d^2 f_y \left(1 - 0.59 \frac{\rho \times f_y}{f'_c} \right)$$

$$M_u = b d^2 f'_c \times \omega (1 - 0.59 \omega)$$

El reglamento A.C.I usa el factor ϕ

$$\phi M_n = \phi [A_s \times f_y (d - 0.5 a)]$$

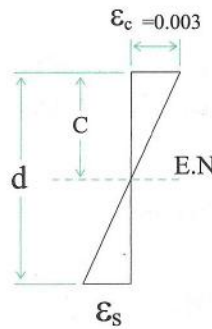
Similarmente en las demás ecuaciones.

B. Falla a compresión

Cuando el acero es relativamente grande, el concreto puede alcanzar su capacidad máxima antes que ceda el acero, aumentando la profundidad del eje neutro y provocando un aumento en la fuerza de compresión, compensándose ligeramente por una reducción en el brazo de palanca. Se alcanzará la resistencia a flexión a una deformación del concreto en compresión igual a 0.003, pudiendo producirse una falla “explosiva” o violenta sin aviso previo.

En este tipo de falla: $f_s < f_y$

f_s = en rango elástico, se calcula en base a la profundidad del eje neutro. Considerando triángulos semejantes en el diagrama de deformación:



$$\frac{E_s}{0.003} = \frac{d-c}{c} \Rightarrow \epsilon_s = 0.003 \frac{d-c}{c}$$

$$f_s = \epsilon_s E_s = 0.003 \frac{d-c}{c} \times E_s$$

$$f_s = 0.003 \frac{1 \times d - a}{a} E_s$$

por equilibrio $C = T$ (con ecuaciones del caso a)

$$0.85 f'_c ab = A_s f_s = 0.003 \frac{1 \times d - a}{a} E_s \times A_s$$

$$\left(\frac{0.85 f'_c}{0.003 E_s \rho} \right) a^2 + ad - \beta_1 \times d^2 = 0$$

Se obtiene el valor “a”

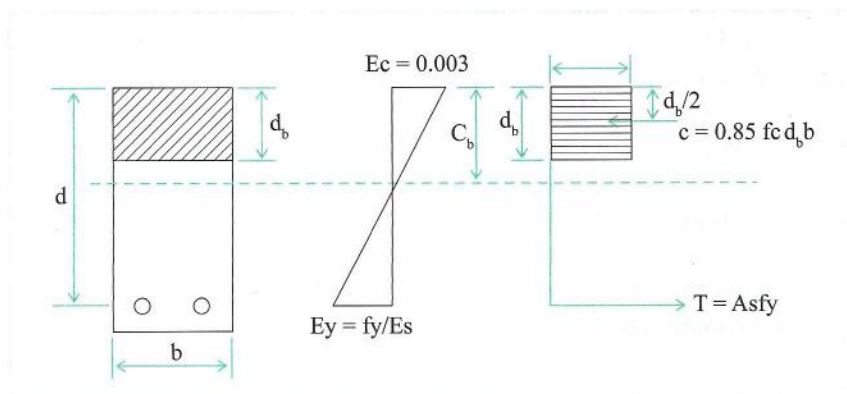
Sabemos que el momento de resistencia es:

$$M_u = T (d - 0.5 a) = C (d - 0.5 a)$$

Luego:

$$M_u = 0.85 f'_c ab (d - 0.5 a)$$

C. Falla balanceada (cuantía balanceada o básica)



Cuando simultáneamente se produce la falla por cedencia del acero " f_y ", y la falla a compresión del concreto que alcanza una deformación máxima de 0.003 en la fibra extrema.

Luego, analizando con los triángulos semejantes en el diagrama de deformación:

$$\epsilon_y = \epsilon_s = \frac{f_y}{E_s} \Rightarrow \frac{f_y / E_s}{0.003} = \frac{d - C_b}{C_b}$$

$$C_b = C \text{ (para falla balanceada)} \quad a_b = a \text{ (para falla balanceada)}$$

$$C_b = \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \times d$$

$$a_b = \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \times \beta_1 d$$

haciendo $C = T$ se tiene:

$$0.85 f'_c \times a_b \times b = A_s \times f_y = \rho_b \times b d \times f_y$$

$$\text{para } \rho_b = \frac{A_s}{b d} = \frac{0.85 f'_c a b}{f_y d} \text{ (cuantía balanceada)}$$

$$\text{de donde } a_b = \frac{\rho_b \times f_y \times d}{0.85 f'_c}$$

igualando " a_b " en las ecuaciones anteriores:

$$\frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \beta_1 d = \frac{b \times d \times f_y}{0.85 f'_c}$$

obtenemos:

$$\rho_b = \frac{0.85 \times f'_c \times \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y}$$

En conclusión:

$$\text{cuando } \rho = \bar{\rho}_b \begin{cases} \rho < \bar{\rho}_b \\ \rho > \bar{\rho}_b \end{cases} \text{ ó}$$

$$\text{si } \rho < \bar{\rho}_b \Rightarrow C < C_b \text{ y } \varepsilon_s > \frac{f_y}{E_s} \Rightarrow a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \text{ (falla tracción)}$$

$$\text{si } \rho > \bar{\rho}_b \Rightarrow C > C_b \text{ y } \varepsilon_s < \frac{f_y}{E_s}$$

$$\frac{0.85 f'_c}{0.003 E_s \rho} a^2 + ad - \beta_1 d^2 = 0 \quad (\text{falla compresión})$$

$$\text{si } \rho = \bar{\rho}_b \Rightarrow C = C_b \Rightarrow a_b = \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \times \beta_1 d \quad (\text{falla balanceada})$$

Reemplazando el valor de E_s :

$$C_b = \frac{6117d}{f_y + 6117}$$

Sabiendo que $a_b = \beta_1 C_b$

$$a_b = \beta_1 C_b = \frac{W_b d}{0.85} = \frac{\bar{\rho}_b f_y d}{0.85 f'_c}$$

donde: $\bar{\rho}_b$: cuantía balanceada o básica

Finalmente:

$$\bar{\rho}_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1 C_b}{f_y d} = \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \left(\frac{6117}{f_y + 6117} \right)$$

Por razones de seguridad el código limita $\varepsilon_t \leq 0.004$, que equivale aproximadamente a ρ_b que corresponde a $\varepsilon_t = 0.00376$

3.2.4 Cuantía máxima de refuerzo

Teóricamente la cuantía máxima de refuerzo sería la cuantía balanceada o básica; sin embargo, en la práctica, una sección con este refuerzo es antieconómica, por lo que se debe usar cuantías menores a $0.5 \bar{\rho}_b$ o incluso menores. En la tabla se muestran los valores de $\bar{\rho}_b$, $0.75 \bar{\rho}_b$, $0.5 \bar{\rho}_b$ y $0.18 \frac{f'_c}{f_y}$, para diferentes calidades de concreto.

f'_c (kg/cm ²)	210	280	350	420
β_1	0.85	0.85	0.80	0.75
$\bar{\rho}_b$	0.0214	0.0285	0.0335	0.0377
$0.75 \bar{\rho}_b$	0.0160	0.0214	0.0252	0.0283
$0.5 \bar{\rho}_b$	0.0107	0.0143	0.0167	0.0189
$0.18 \frac{f'_c}{f_y}$	0.0090	0.0120	0.0150	0.0180

3.2.5 Cuantía mínima de refuerzo

En ciertas oportunidades, ya sea por razones arquitectónicas o funcionales, se emplea elementos cuyas secciones tienen dimensiones mayores que las necesarias para resistir las cargas que les son aplicadas. Las cuantías de refuerzo disminuyen propiciando que el momento crítico sea superior a la resistencia nominal de la sección. En estos casos, la falla se presenta al superar el momento crítico, y es súbita y frágil. Para evitarla, es conveniente definir una cuantía mínima de acero que garantice que el momento crítico de la sección sea superior a su momento resistente.

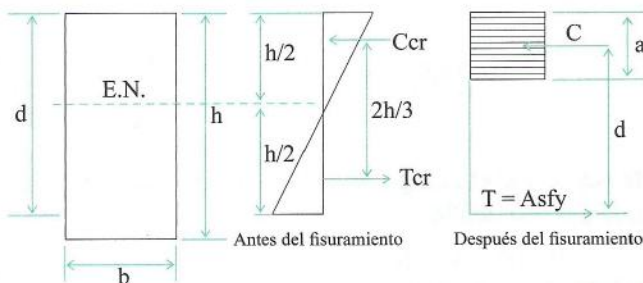
Para determinar la cantidad mínima de acero requerida, es necesario analizar la sección antes y después del agrietamiento. Las distribuciones de esfuerzos mostradas en las figuras siguientes corresponden a ambas situaciones. De la primera se puede plantear:

$$M_{cr} = \frac{2}{3} T_{cr} h = \frac{2}{3} \frac{f_r h b}{4} h$$

Donde: h : Peralte de la sección

f_r : Módulo de ruptura del concreto

En las secciones de mayor peralte, como las analizadas, se puede asumir que $h = d$. De este modo, el momento crítico se puede aproximar a:



Esfuerzos en una sección sometida a flexión antes y después del agrietamiento del concreto.

$$M_{cr} = \frac{2}{3} \frac{f_r d b}{4} d \quad (1)$$

Por otro lado, de la distribución de esfuerzos en la sección después del agrietamiento, se deduce:

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Puesto que la cantidad de refuerzo es reducida, el área de concreto comprimido también lo es. Por ello se puede asumir que "a" es muy pequeño, por lo tanto:

$$M_n = A_s f_y d \quad (2)$$

Al producirse el agrietamiento, las expresiones (1) y (2) son iguales, luego:

$$\frac{2}{3} \frac{f_r d b}{4} d = A_s f_y d$$

Simplificando y asumiendo que $f_r = 2\sqrt{f'_c}$ (ACI – Ec (9-9))

$$A_s = \frac{0.33 \sqrt{f'_c} b d}{f_y}$$

Considerando un factor de seguridad de 2.5 se obtiene:

$$A_s = 0.83 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b d$$

Esta expresión es aproximadamente igual a la propuesta por el código del ACI.

El código del ACI (ACI 10.5.1) recomienda un refuerzo mínimo igual a:

$$A_{s \min} = 0.8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \quad (3)$$

(ACI – Ec (10-3))

Pero no deberá ser menor que:

$$A_{s \min} \geq \frac{14.0}{f_y} b_w d \quad (4)$$

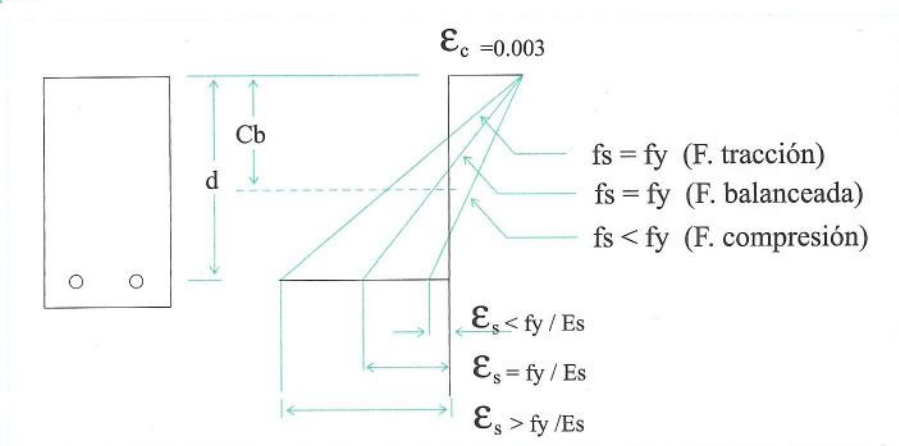
Donde: b_w : Ancho del alma de la viga. Para vigas de sección rectangular corresponde al ancho de la sección.

El término b_w se define para garantizar la expresión propuesta para la determinación de refuerzo mínimo, y hacerla extensiva a secciones no rectangulares.

En voladizos u otros elementos estáticamente determinados, donde no hay posibilidad de redistribución de momentos, se debe usar valores mayores para el esfuerzo mínimo.

Si el refuerzo provisto en una sección cualquiera, es un tercio mayor que el requerido por análisis, entonces no es necesario verificar que el área de acero sea mayor que el mínimo definido por el código (ACI – 10.5.3).

Para losas y cimentaciones de espesor constante, el refuerzo mínimo definido a través de las expresiones (3) y (4) no es válido.

Ejemplo:

Una viga rectangular de:

$$b = 25 \text{ cm.}$$

$$d = 45 \text{ cm}$$

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$E_s = 203\,000 \text{ K/cm}^2$$

$$f_y = 2\,800 \text{ K/cm}^2$$

Calcular:

(a) 25 cm^2

(b) 50 cm^2

(c) para falla balanceada

Solución:

Para ρ_b tenemos:

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 210 \times 0.85}{2800} \times \frac{0.003 \times 203\,000}{0.003 \times 203\,000 + 2800}$$

$$\rho_b = 0.0371$$

a) para $A_s = 25 \text{ cm}^2$

$$\rho_b = \frac{A_s}{bd} = \frac{25}{25 \times 45} = 0.0222 < \rho_b = 0.0371$$

∴ Falla atracción

$$M_u = A_s f_y \left(d - 0.59 \frac{A_s f_y}{f'_c b} \right) = 25 \times 2\,800 \left(45 - 0.59 \times \frac{25 \times 2\,800}{210 \times 25} \right)$$

$$M_u = 25.99 \text{ T - m}$$

b) para $A_s = 50 \text{ cm}^2$

$$\rho = \rho > \rho_b = \frac{50}{25 \times 45} = 0.044 > \rho_b = 0.0371$$

$$\rho > \rho_b$$

∴ Falla a compresión

Usar:

$$\left(\frac{0.85 f'_c}{0.003 E_s \rho} \right) a^2 + a d - \beta_1 d^2 = 0$$

$$\frac{0.85 \times 210}{0.003 \times 2.03 \times 106 \times 0.044} a^2 + a \times 45 - 0.85 \times (45)^2 = 0$$

$$a^2 - 67.56 a - 2584.46 = 0$$

$$a = 27.25 \text{ cm}$$

$$M_u = 0.85 f'_c a b (d - 0.5a)$$

$$M_u = 0.85 \times 210 \times 27.25 \times (45 - 0.5 \times 27.25)$$

$$M_u = 38.15 \text{ T} \cdot \text{m}$$

c) para $\rho = \rho_b = 0.0371$

de la fórmula

$$M_u = \rho b d^2 f_y \left(1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$M_u = 0.0371 \times 25 \times (45)^2 \times 2800 \left(1 - 0.59 \frac{0.0371 \times 2800}{210} \right)$$

$$M_u = 37.23 \text{ T} \cdot \text{m}$$

3.3 Vigas rectangulares con acero en tracción (diseño a la rotura) o por resistencia

Empezaremos recopilando los criterios más importantes vistos anteriormente.

- Es recomendable que las vigas lleguen a la falla por tracción, las cuales están precedidas por grietas grandes y tiene un carácter dúctil ($\rho < \rho_b$)
- No es recomendable que las vigas lleguen a la falla por compresión, porque este tipo de falla es violento y no avisa, es muy rápido no alerta y es frágil ($\rho > \rho_b$)
- Por tanto, es necesario limitar el área de acero a una fracción del área balanceada, porque si la resistencia del acero es mayor que la del concreto puede ocurrir una falla a compresión.
- Para secciones rectangulares con refuerzo a tracción solamente tenemos:

$$M_u \leq \phi M_n$$

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} = \frac{f'_c}{f_y} \frac{6115}{6115 + f_y}$$

$$E_s = 2039000 \text{ K/cm}^2$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.75 \rho_b$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.5 \rho_b \text{ (zonas sísmicas)}$$

Reemplazando valores y resolviendo:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left\{ \frac{6115}{6115 + f_y} \right\}$$

$$\rho_{\text{min}} = \frac{14}{f_y}$$

$$\rho_{\text{min}} = \frac{4}{3} \text{ (del acero por requisito de análisis)}$$

$$\rho_{\text{min}} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = (\text{ININVI E} - 60)$$

$$M_u = \phi M_n = \phi \left\{ A_s f_y d \left(1 - 59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right) \right\}$$

$$M_u = \phi M_n = \phi \left\{ A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \right\}$$

Tenemos:

$$\text{para } a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \text{ y } \omega = \frac{\rho f_y}{f'_c}$$

$$M_u = \phi \omega b d^2 f'_c (1 - 0.59 \omega)$$

Las variables de estas ecuaciones pueden ser b , d o A_s ; para evitar muchas soluciones tendrá que darse uno o dos valores iniciales a un igual número de variables. Como ayuda para simplificar el problema pueden usarse tablas de diseño, por ejemplo las de la referencia (4) o tabla N° 3-1 y N° 3-2.

También puede calcularse en función de la relación $\frac{M_u}{b d^2 f'_c}$ o el parámetro $R_u = \frac{M_u}{b d^2}$ de las ecuaciones:

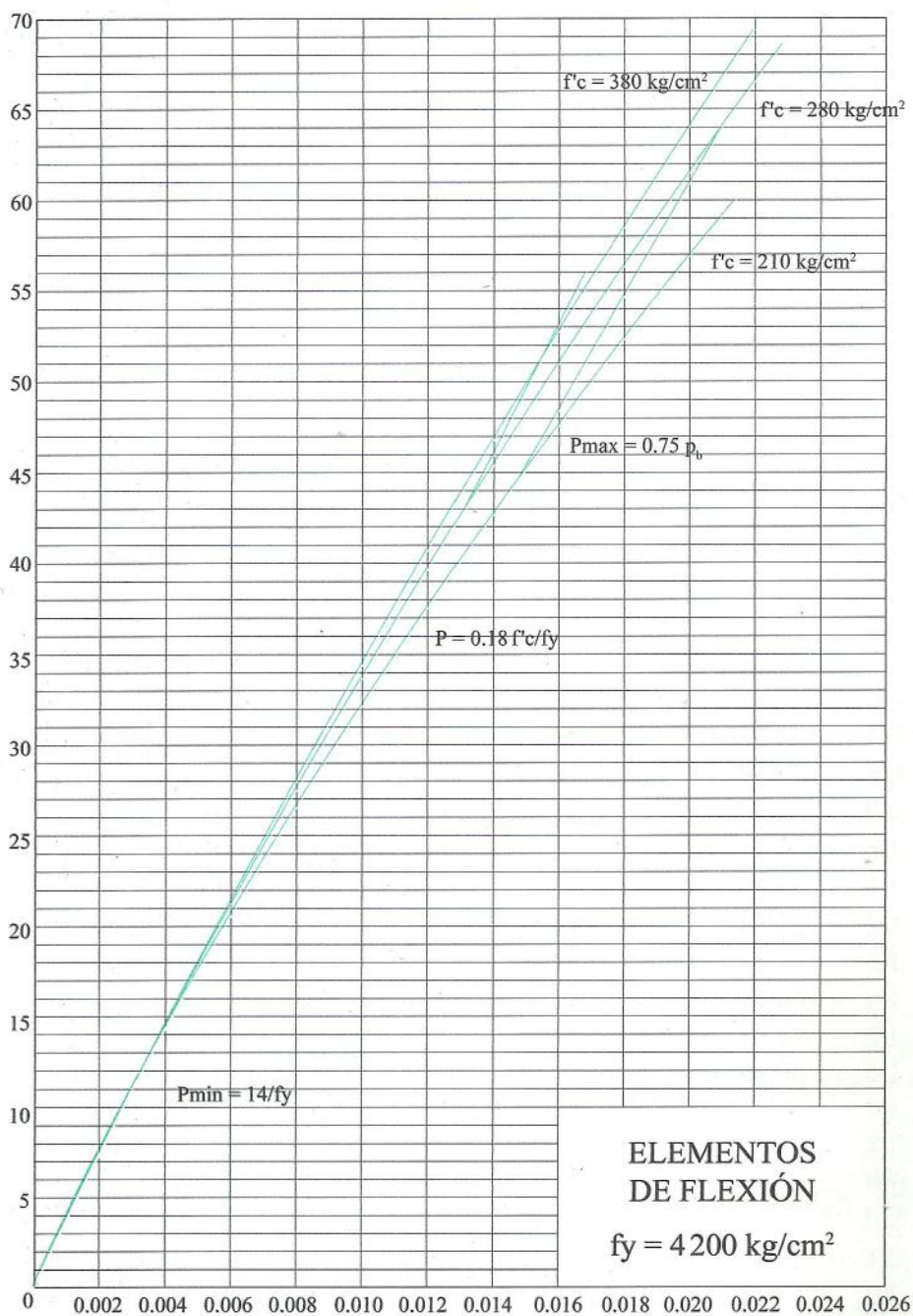
$$w = \frac{\rho f_y}{f'_c}; \quad M_n = b d^2 w f'_c (1 - 0.59 w) \quad ; \quad R_u = \frac{M_u}{b d^2}$$

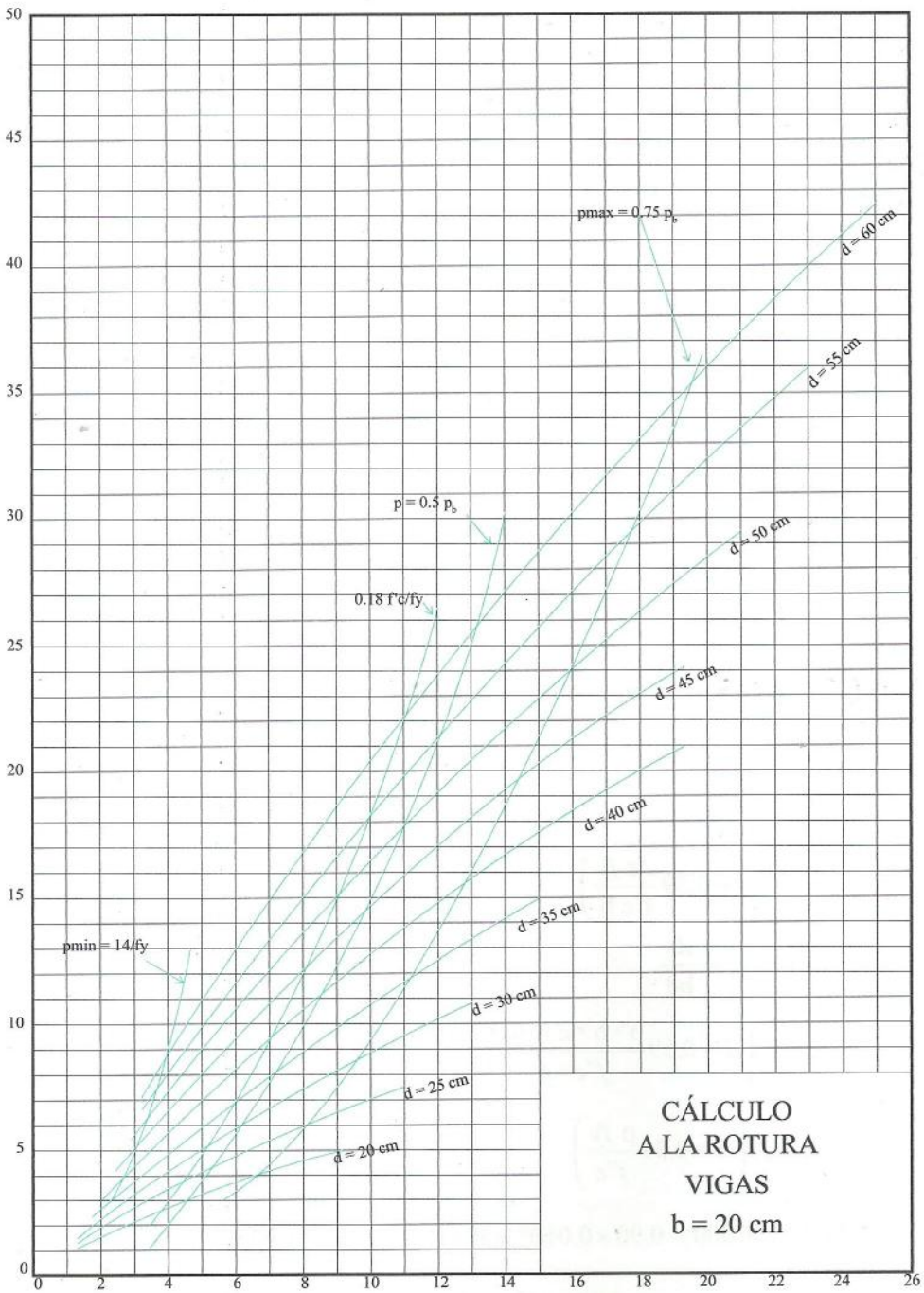
Reemplazando:

$$R_u = \phi w f'_c (1 - 0.59 w)$$

ó

$$R_u = \phi \rho f_y \left(1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \right)$$





Ejemplo: Se tiene una viga con $b = 30$ cm, y un momento último de 30.9 tm, $M_D = 8.75$ T - m, $M_L = 12.75$ T - m para $f'c = 210$ k/cm².

$$E_s = 2039000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$\beta_1 = 0.85$$

Se necesita encontrar:

a) diseñar para peralte mínimo.

b) diseñar para $d = 70$ cm

Solución:

$$M_u = 1.2 M_D + 1.6 M_L$$

$$M_u = 30.9 \text{ T - m} \quad \text{Momento último mayorado}$$

a) El peralte mínimo será para un ρ_{MAX}

$$\rho_{MAX} = 0.5 \rho_b \text{ (zonas sísmicas)}$$

$$\rho_{MAX} = 0.50 \left[\frac{0.85 f'c \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \right]$$

$$\text{Para } E_s = 2039000 \text{ K/cm}^2 \quad \beta_1 = 0.85 \quad f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$\rho_{MAX} = 0.50(0.02142)$$

$$\rho_{MAX} = 0.0107$$

$$\text{de } M_u = \phi A_s f_y \left(d - 0.59 \frac{A_s f_y}{f'c b} \right)$$

$$\text{Pero sabemos que } \rho_b = \frac{A_s}{bd}$$

$$M_u = \phi \rho \times bd \times f_y \left(d - 0.59 \frac{\rho \times b \times d \times f_y}{f'c \times b} \right)$$

$$M_u = \phi \rho \times bd^2 \times f_y \left(d - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'c} \right)$$

$$30.9 \times 100000 = 0.90 \times 0.0107 \times 30 \times d^2 \times 4200 \left(1 - 0.59 \times 0.0107 \times \frac{4200}{210} \right)$$

$$30.9 \times 10^5 = 1213.38 d^2 \quad (0.874)$$

$$2913.74 = d^2$$

$$d = 53.98 \text{ cm} \approx 54 \text{ cm}$$

$$d = 54 \text{ cm}$$

Para $d = 54$ cm tenemos:

$$A_s = \rho \times b \times d$$

$$A_s = 0.0107 \times 30 \times 54 = 17.33 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.00333$$

$$\therefore \rho'_{\min} < \rho_{\text{act}} \text{ OK}$$

Ver tabla N° 1 ó N° 2 en el apéndice

Usar: 4 Ø 1"

b) Diseñar para $d = 70$ cm

$$\text{de } M_u = \phi \rho b d^2 f_y \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$3\,090\,000 = 0.9 \times \rho \times 30 \times 70^2 \times 4\,200 \left(1 - 0.59 \rho \frac{4\,200}{210} \right)$$

$$\rho = 0.00637 > \rho_{\min} = 0.00333$$

$$A_s = 0.00637 \times 30 \times 70 = 13.38 \text{ cm}^2$$

Usar: 5 Ø 3/4" ver tabla N° 1 y N° 2 (Anexo)

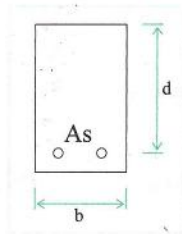
3.4 Tipos de sollicitación (tres casos)

• Caso I

Datos: b , d , A_s , f_y , f'_c

Incógnita: M_u

A_s , b , d



$$\rho = \rho_b = \frac{A_s}{b d} \quad \rho_b = \frac{\beta_1 \times 0.85 \times f'_c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y}$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b \quad \rho_{\min} = \frac{14}{f_y}$$

$$\rho_{\max} = 0.50 \rho_b \text{ (zonas sísmicas)}$$

$$\rho_{\max} = 0.18 \frac{f'_c}{f_y} \text{ (para no verificar deflexiones)}$$

a) Por tanteos:

$$M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 \times f'_c \times b}$$

(b) Por fórmula:

$$M_u = \phi A_s f_y d z \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$\phi = 9$$

• Caso II

Datos: M_u , f'_c , f_y , ρ Incógnitas: b , d , A_s

$$M_u = \phi \rho f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right) \quad \text{Fórmula general}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } \rho_{\text{MAX}} = 0.75 \rho_b \Rightarrow b d^2 = \frac{M_u}{0.260 f'_c} \\ \text{Para } \rho = 0.18 \frac{f'_c}{f_y} \Rightarrow b d^2 = \frac{M_u}{0.145 f'_c} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Generalmente} \\ b = d/2; \text{ o} \\ \text{tantear a} \\ \text{criterio} \end{array}$$

$$A_s = \rho b d$$

• Caso III

Datos: M_u , b , d , f_y , f'_c Incógnita: A_s

a) Por tanteos:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 \times f'_c \times b}$$

b) Por fórmula:

$$M_u = \frac{A_s}{b d} f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \frac{A_s}{b d} \times \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

Se resuelve la ecuación de 2do grado obtenida.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Asumir: } a \approx d/5 \text{ o} \\ (d - a/2) \approx 0.9 d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para un primer} \\ \text{tanteo} \end{array}$$

CASO I: Ejemplo

Encontrar el momento último que resiste una viga rectangular, armada a tracción:

$$M_u = ?$$

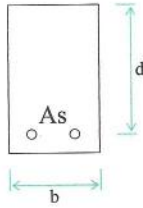
$$A_s = 10 \text{ cm}^2$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$



A_s , b , d .

Procedimientos:

- 1) Analíticamente usando las fórmulas
- 2) Por gráficos.

1) Usando la fórmula:

$$M_u = 0.9 A_s f_y (d - a/2)$$

a) Cuantía real: $\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{10}{25 \times 50} = 0.008$

b) Cuantía máxima: $\rho_{MAX} = 0.5 = \rho_b$ (sismo)

$$\rho_{MAX} = \left[\frac{0.85^2 \times 210}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200} \right] \times 0.5 = 0.0106$$

$$\rho = 0.008 < \rho_{MAX} = 0.0106 \quad \therefore \text{bien}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 \times f'_c \times b} = \frac{10 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25} = 9.41 \text{ cm}$$

$$M_u = 0.9 A_s f_y (d - a/2) = 0.9 \times 10 \times 4200 (50 - 9.41/2) = 1712151 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

$$M_u = 17.12 \text{ T} \cdot \text{m}$$

2) Usando gráficos:

- a) Utilizando cualquiera de los dos primeros gráficos para flexión (ver referencia 4).

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{10}{25 \times 50} = 0.008 \text{ (eje horizontal)}$$

Con este valor cortamos la curva para $f'_c = 210 \text{ k/cm}^2$ y luego, vamos al eje vertical para encontrar el valor:

$$\frac{M_u}{b d^2} = 27.6 \text{ K/cm}^2$$

luego:

$$M_u = 27.6 \times 25 \times 502 = 1\,725\,000 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

$$M_u = 17.25 \text{ T} \cdot \text{m}$$

- b) Escogiendo el gráfico específico para (ver referencia 4), $b = 25 \text{ cm}$, $f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$ buscamos la curva para $d = 50 \text{ cm}$ y con el valor $A_s = 10 \text{ cm}^2$ en el eje horizontal encontramos:

$$M_u = 17.1 \text{ T} \cdot \text{m} \text{ en el eje vertical}$$

$$M_u = 17.1 \text{ T} \cdot \text{m}$$

CASO II: Ejemplo

Dimensionar la viga para un momento dado:

$$M_u = 25 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$f'_c = 210 \text{ k/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ k/cm}^2$$

Usar relación $\frac{b}{d} \approx \frac{1}{2}$

Procedimientos:

- 1) Analítico por fórmulas
- 2) Por gráficos

1) Analítico por fórmulas:

- a) Para $\rho_{\text{MAX}} = 0.5 \rho_b$ (máximo por sismo)

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 0.85 \times 210}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200} = 0.0213$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.5 (0.0213) = 0.0106$$

$$\text{de } M_u = \phi \rho f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \rho \frac{f_y}{f'_c} \right)$$

$$b d^2 = \frac{2500000}{0.9 \times 0.0106 \times 4200 \left(1 - 0.59 \times 0.0106 \times \frac{4200}{210} \right)}$$

$$b d^2 = 71313.87 \text{ cm}^3$$

$$\frac{b}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{d}{2} \Rightarrow d^3 = \sqrt{71313.87} \quad \begin{aligned} d &= 52.25 \text{ cm} \\ b &= 26 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{para } b_1 = 25 \text{ cm} \Rightarrow d_1 = 53.4 \text{ cm} \approx 54 \text{ cm}$$

$$\text{para } b_2 = 30 \text{ cm} \Rightarrow d_2 = 48.8 \text{ cm} \approx 50 \text{ cm}$$

$$As_1 = \rho bd = 0.0106 \times 25 \times 54 = 14.31 \text{ cm}^2$$

$$As_2 = \rho bd = 0.0106 \times 30 \times 50 = 15.90 \text{ cm}^2$$

b) Para

$$\rho = 0.18 \frac{f'_c}{f_y} = 0.18 \frac{210}{4200} = 0.009$$

$$bd^2 = \frac{2500000}{0.9 \times 0.009 \times 4200 \left(1 - 0.59 \times 0.009 \times \frac{4200}{210} \right)}$$

$$bd^2 = 82217.7 \text{ cm}^3$$

$$\frac{b}{d} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow d^3 = 82217.7 \text{ m}^3 \quad d = 54.78 \text{ cm}$$

$$\text{Para } b_1 = 25 \text{ cm} \Rightarrow d_1 = 57.35 \text{ cm} \approx 58 \text{ cm}$$

$$\text{Para } b_2 = 30 \text{ cm} \Rightarrow d_2 = 52.35 \text{ cm} \approx 53 \text{ cm}$$

Luego:

$$As_1 = \rho bd = 0.009 \times 25 \times 58 = 13.50 \text{ cm}^2$$

$$As_2 = \rho bd = 0.009 \times 30 \times 53 = 14.31 \text{ cm}^2$$

2) Por gráficos:

- a) Usando los gráficos específicos (ver referencia 4): para $b = 25 \text{ cm}$, $f'_c = 210 \text{ k/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ k/cm}^2$ con $M_u = 25 \text{ T-m}$ (eje vertical) se intercepta la curva punteada $\rho = 0.5 \rho_b$, este se interpola entre las curvas respectivas para d obtenemos $d = 57 \text{ cm}$.

Luego para $b = 25 \text{ cm} \Rightarrow d = 57 \text{ cm} \Rightarrow As = 14.2 \text{ cm}^2$ similarmente para $b = 30 \text{ cm} \Rightarrow d = 47 \text{ cm} \Rightarrow As = 15.7 \text{ cm}^2$ para las áreas de acero (As) ver eje horizontal en cada gráfico.

- b) Para $\rho = 0.18 \frac{f'_c}{f_y}$ similarmente al anterior (a)

$$\text{para } b = 25 \text{ cm} \Rightarrow d = 57 \text{ cm} \Rightarrow As = 13 \text{ cm}^2$$

$$\text{para } b = 30 \text{ cm} \Rightarrow d = 52 \text{ cm} \Rightarrow As = 14.2 \text{ cm}^2$$

CASO III: Ejemplo

Encontrar el área de acero de la siguiente viga rectangular, armada sólo a tracción.

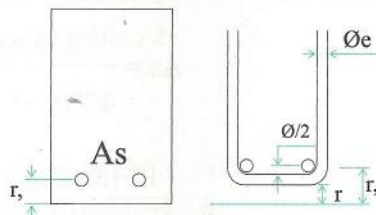
Datos:

Acero $f_y = 4200 \text{ k/cm}^2$

concreto $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

Usar estribos $\emptyset 3/8"$

$$As, b, d, (r + \emptyset/2 + \emptyset e) = r_1$$



$$M_u = 25 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$h = 60 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$A_s = ?$$

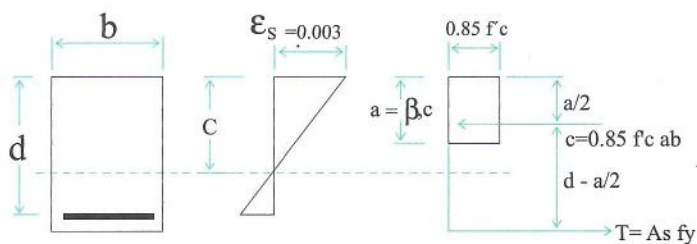
$$r_1 = r + \emptyset/2 + \emptyset e = \text{suponemos } 5 \text{ cm}$$

$$d = h - r' = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$$

Procedimientos:

- 1) Mediante tanteo
- 2) Usando la fórmula general
- 3) Por gráficos

1) Mediante tanteo:



Sabemos que para que exista equilibrio $C = T$

$$0.85 f'c ab = As fy \Rightarrow a = \frac{As fy}{0.85 \times f'c \times b}$$

de $\Sigma M = 0$ El momento resistente será:

$$M_r = As fy (d - a/2) \Rightarrow As = \frac{M_r}{fy (d - a/2)}$$

$$M_r = M_u$$

Reemplazando los datos en las fórmulas tenemos:

- Primer tanteo:

$$\text{Hacer } d - a/2 \approx 0.9 d \quad \text{ó} \quad a \approx 0.2 d$$

$$a \approx 12 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{2500000}{4200 \left(55 - \frac{12}{2} \right)} = 12.15 \text{ cm}$$

$$a = \frac{12.15 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 30} = 9.53 \text{ cm} \neq 12 \text{ cm}$$

Segundo tanteo:

$$A_s = \frac{2500000}{4200 \left(55 - \frac{9.53}{2} \right)} = 11.86 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{11.86 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 30} = 9.30 \text{ cm} \approx 9.53 \text{ cm}$$

$\therefore$ Usar $A_s = 11.86 \text{ cm}^2$

2) Usando la fórmula general:

$$M_r = M_u = b d^2 f'_c \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$\frac{M_u}{b d^2 f'_c} = \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$\frac{M_u}{b d^2 f'_c} = \frac{2500000}{30 \times 55^2 \times 210} = 0.131$$

$$0.131 = \omega - 0.59 \omega^2$$

$$0.592 \omega^2 - \omega + 0.131 = 0$$

$$\omega = 0.144$$

$$\rho = \omega \frac{f'_c}{f_y} = 0.144 \times \frac{210}{4200} = 0.0072$$

$$A_s = \rho b d = 0.0072 \times 30 \times 55 = 11.88 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 11.88 \text{ cm}^2$$

3) Por gráficos:

a) Se utiliza cualquiera de los dos primeros gráficos para flexión (ver referencia 4)

$$\frac{M_u}{b d^2} = \frac{2500000}{30 \times 55^2} = 27.54 \text{ K/cm}^2 \text{ (eje vertical)}$$

con este valor (27.54) en el eje vertical cortamos la curva para $f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$ y en el eje horizontal se observa lo siguiente:

$$\rho = 0.0075 \Rightarrow \text{gráfico 1}$$

$$\rho = 0.0070 \Rightarrow \text{gráfico 2}$$

$$\text{Sabemos } \rho = \frac{A_s}{b d} \Rightarrow A_s = \rho b d$$

$$\left. \begin{array}{l} A_s = 0.0075 \times 30 \times 55 = 12.38 \text{ cm}^2 \\ A_s = 0.0070 \times 30 \times 55 = 11.55 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Asumiendo} \\ A_s = 12.40 \text{ cm}^2 \end{array}$$

- b) Utilizando el gráfico específico para la viga (referencia 4) $b = 30 \text{ cm}$, $f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$, en este gráfico buscamos la curva para $d = 55 \text{ cm}$, la cual interceptamos con $M_u = 25 \text{ T - m}$ y en el eje horizontal obtenemos: $A_s = 12.5 \text{ cm}^2$ y observamos las siguientes cuantías:

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 0.85 \times 210}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200} = 0.0213$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.5 \rho_b = 0.5 \times 0.0213 = 0.0107 \text{ (zona sísmica)}$$

$$\rho_{\text{MIN}} = 1.4 = \frac{14}{f_y} = \frac{0.0033}{4200}$$

$$\rho = 0.18 \frac{f'_c}{f_y} = 0.18 \times \frac{210}{4200} = 0.009$$

$$\therefore \text{ Usar: } 3 \text{ } \emptyset 1" = 15.1 \text{ cm}^2$$

$$\text{ ó } 5 \text{ } \emptyset 3/4 = 14.25 \text{ cm}^2$$

Problema complementario 1

Calcular el acero necesario para que una viga de $b = 30 \text{ cm}$, y $d = 50 \text{ cm}$, resista $M_u = 20 \text{ T - m}$, sabiendo que el $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$ y $f'_c = 250 \text{ K/cm}^2$

Solución:

Datos

$$b = 30 \text{ cm}$$

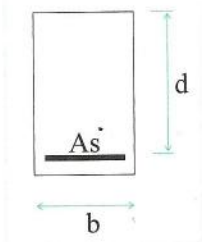
$$d = 50 \text{ cm}$$

$$M_u = 20 \text{ T - m}$$

$$A_s = ?$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$f'_c = 250 \text{ K/cm}^2$$



$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 \times f'_c \times b}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left(d - \frac{0.59 A_s f_y}{2 \times 0.85 \times f'_c \times b} \right)}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left(d - \frac{0.59 A_s f_y}{f'_c \times b} \right)}$$

$$M_u = A_s \phi f_y \left(d - \frac{0.59 A_s f_y}{f'_c \times b} \right)$$

$$M_u = \phi f_y A_s \left(d - \frac{0.59 A_s f_y}{f'_c \times b} \right)$$

$$20 \times 10^5 = 0.9 \times 4200 \times A_s \left(50 - \frac{0.59 A_s \times 4200}{250 \times 30} \right)$$

$$20 \times 10^5 = 3780 A_s (50 - 0.33 A_s)$$

$$\frac{20 \times 10^5}{3780} = 50 A_s - 0.33 A_s$$

$$A_s^2 - 50 A_s + 529.10 = 0$$

$$A_s = 11.45 \text{ cm}^2$$

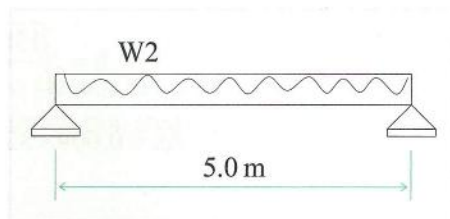
Ver Tablas N° 1 y N° 2 (Anexo)

Podría usarse 4 Ø 3/4

Nota: Este problema podrá desarrollarse totalmente por tablas (ver referencia 4) o parcialmente usando la tabla 3 - 1 de este capítulo.

Problema complementario 2

Diseñar una viga simplemente apoyada de $L = 5.0 \text{ m}$ sometida a una carga última de 12.7 T/m , $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$, $f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$.



$$W = W_M + W_L = 3 + 5 = 8 \text{ T/m}$$

$$W_u = 1.4 (3) + 1.7 (5) = 12.7 \text{ T/m}$$

$$M_u = W_u L^2 = \frac{12.7 (5)^2}{8} = 39.6875 \text{ T-m}$$

Se diseñará para:

$$\rho_{MAX} = 0.5 \rho_b$$

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 0.85 \times 210}{4200} \times \frac{0.003 \times 2030000}{0.003 \times 2030000 \times 4200}$$

$$\rho_b = 0.02138$$

$$\rho_{MAX} = 0.5 \times 0.02138 = 0.0107$$

De la tabla 3 - 1 o tablas de referencia 4, entramos con:

$$\rho = 0.0107 \Rightarrow \text{encontramos } \frac{Mu}{b d^2} = 37 \text{ K/cm}^2$$

$$\text{luego } b d^2 = \frac{Mu}{37} \text{ asumimos } b/d = 1/2$$

$$Mu = 3\,968\,750 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

$$\text{Entonces: } b (2b)^2 = \frac{3\,968\,750 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{37} = 107\,263.51$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{107\,263.51}{4}}$$

$$b = 29.93 \text{ cm} \approx b = 30 \text{ cm}$$

$$As = 30 \times 60 \times 0.0107 = 19.26 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar } 4 \text{ } \varnothing 1''$$

Si quiere calcularse para $\rho = 0.18 f'c/fy = 0.009$ para no verificar deflexiones, igualmente con las tablas mencionadas:

$$\rho = 0.009 \Rightarrow \frac{Mu}{b d^2} = 30 \text{ K/cm}^2$$

$$\text{Luego } b d^2 = \frac{Mu}{30} = \frac{3\,906\,250}{30} = 130\,208.33$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{130\,208.33}{4}} = 31.92 \text{ cm} \approx 32 \text{ cm}$$

$$As = 0.009 \times 32 \times 64 = 18.34 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar } 4 \text{ } \varnothing 1''$$

3.5 Relaciones a flexión, separación de varillas y recubrimientos

- A. Relaciones máximas de peralte a claro libre para poder considerarse que las deformaciones en el acero y en el concreto se supongan directamente proporcionales a la distancia al eje neutro.
 - Vigas en tramos continuos $d / L = 2 / 5$
 - Vigas en tramos simples $d / L = 4 / 5$
- B. Máxima deformación utilizable en la fibra extrema en compresión en el concreto = 0.003.
- C. El esfuerzo en el acero en tracción para fy = fluencia del acero especificado, puede tomarse como Es veces, la deformación del acero. Para deformaciones mayores que las correspondientes a fy , el esfuerzo se considerará independiente a la deformación e igual a fy .
- D. No considerar la resistencia a tracción del concreto.
- E. Ver en los gráficos de análisis de vigas por flexión, las distribuciones de presiones del concreto.

- F. Refuerzo mínimo en miembros sujetos a flexión excepto los casos “a” y “b” en zonas donde, por análisis, se requiera acero en tracción.

$$\rho_{\text{MIN}} = \frac{A_s}{bd} (\text{MIN}) = \frac{14 \times 1}{f_y}$$

En vigas “T” y en nervaduras, cuando el alma se encuentra en tracción, la relación “ ρ ” se calcularon usando el ancho del alma.

- a) En losas estructurales de peralte uniforme, donde el refuerzo por flexión sea en una sola dirección, se debe proporcionar refuerzo normal a este para resistir los esfuerzos de **contracción y temperatura**, según los siguientes criterios:

- Cuantía mínima (nunca menor) $\rho_{\text{MIN}} = 0.0014$
- Cuando se usa varillas $f_y = 2800 \text{ K/cm}^2$
Corrugadas $f_y = 3500 \text{ K/cm}^2$ $\left| \begin{array}{l} \text{min} = 0.0020 \end{array} \right.$
- Cuando se usa varilla corrugada o malla soldada de alambre (corrugado o liso):

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2 \quad \rho_{\text{MIN}} = 0.0018$$

- Cuando se usa $f_y > 4200 \text{ K/cm}^2$, medida a una deformación unitaria por influencia de 0.35 %:

$$\rho_{\text{MIN}} = \frac{0.0018 \times 4200}{f_y}$$

- b) El área de acero en tracción para una sección debe ser por lo menos 1/3 mayor que lo requerido por análisis o sea 1/3 mayor que lo requerido por análisis o sea 4/3 del valor requerido.

3.5.1 Separación de varillas por temperatura

Separación máxima: 5 h ó 45 cm (el menor)

h = espesor de la losa

3.5.2 Límites para el espaciamiento del refuerzo

- A. En primer lugar, veremos lo relacionado a agregados, ya que el tamaño de ellos tiene mucho que ver con la separación entre varillas, las cuales se ceñirán a las siguientes normas ASTM:

- a) ASTM C-33 “Especificaciones normalizadas para agregados en el concreto”
- b) ASTM C-33 “Especificaciones para agregados ligeros utilizados en el concreto estructural.”

Salvo el caso de agregados especiales que hayan sido sometidos a las pruebas respectivas y que sean aprobados por la supervisión.

B. Tamaño máximo de agregado. Debe cumplir:

- a) 1/5 de la menor separación entre las caras de los encofrados.
- b) 1/3 del peralte de la losa.
- c) 3/4 del espaciamiento mínimo libre entre varillas o alambres o entre paquetes de varillas.

C. Separación mínima del refuerzo:

- a) Siempre mayor que db (diámetro de una varilla o alambre) ó 2.5 cm.
- b) Para refuerzo colocado en 2 capas, la segunda capa debe colocarse exactamente encima de la primera y a 2.5 cm de distancia como mínimo.
- c) En elementos sometidos a compresión, reforzados con espirales o anillo, la distancia entre varillas longitudinales no será menor de 1.5 db ni 4 cm.
- d) Las limitaciones de la distancia entre varillas se aplica también a la distancia entre un traslape y los traslapes o varillas adyacentes.
- e) En muros y losas, excepto las losas nervadas, la separación del refuerzo principal no debe ser mayor que tres veces el espesor del muro o la losa, ni 45 cm.

D. Paquetes de varillas:

- a) Debe limitarse a un máximo de 4 varillas por paquete.
- b) Los paquetes deben estar confinados por estribos o anillos.
- c) Las varillas mayores que $\varnothing 1 \frac{3}{8}$ " no deben amarrarse en paquetes.
- d) Las varillas que se cortan de paquetes sometidos a flexión, los puntos de corte deben estar separados por lo menos a 40 db.
- e) Cuando las limitaciones de espaciamiento y recubrimiento mínimo de concreto estén en base del diámetro de la varilla, el diámetro del paquete se considerará como el diámetro del paquete equivalente a la suma de las áreas de las varillas del paquete.

3.5.3 Protección de concreto para el refuerzo o recubrimiento**A. Concreto vaciado en sitio**

Debe proporcionarse el siguiente recubrimiento de concreto al acero de refuerzo:

	Recubrimiento mínimo, cm
a) Concreto vaciado en contacto con el suelo y permanente expuesto a él	7.5
b) Concreto expuesto al suelo a la acción del clima:	
Varillas del N° 6 al N° 18	5
Varillas del N° 5, alambre w31 ó d31 y menores	4
c) Concreto no expuesta la acción del clima ni en contacto con el suelo:	
Losas, muros, nervaduras:	
• varillas del N° 14 y N° 18	4
• varillas del N° 11 y menores	2

Vigas, columnas:

- refuerzo principal, estribos, anillos, espirales 4

Cascarones y placas plegadas:

- varillas del N° 6 y mayores 2
- varillas del N° 5, alambres W31 ó D31 y menores 1.5

B. Concreto prefabricado (fabricado bajo condiciones de control en la planta)

Debe proporcionarse el siguiente recubrimiento mínimo de concreto al acero de refuerzo:

Recubrimiento
mínimo, cm

a) Concreto expuesto al suelo a la acción del clima tableros de muros:

- varillas del N° 14 y N° 18 4
- varillas del N° 11 y menores 2

Otros miembros:

- varillas del N° 6 al N°11 4
- varillas del N° 5, alambres W31 ó D31 y menores 3
- varillas del N° 14 al N°18 5

b) Concreto no expuesto a la acción del clima ni en contacto con el suelo:

Losas, muros, nervaduras:

- varillas del N° 14 y N° 18 3
- varillas del N° 11 y menores 1.5

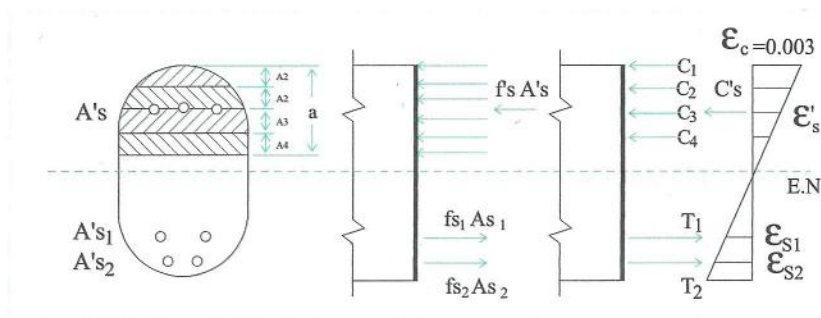
Vigas, columnas:

- refuerzo principal db, pero no menor de 1.5
ni mayor de 4
- anillos, estribos, espirales cascarones y placas plegables 1
- varillas del N° 6 y mayores 1.5
- varillas del N° 5, alambre W31 ó D31 y menores 1

C. Resumen:

- Zapatas 7.5 cm (vaciado contra el suelo)
5 cm (vaciado sobre solado)
- Vigas de cimentación 7.5 cm (vaciado contra el suelo)
5 cm (vaciado sobre solado o con encofrado)
- Columnas, placas y vigas peraltadas 4 cm
- Losas 2 cm
- Vigas chatas 2 ó 3 cm

3.6 Flexión en secciones simétricas de forma cualquiera



El criterio asumido en este problema para encontrar la resistencia a flexión de una sección cualquiera, se fundamenta en encontrar un estado de deformaciones, de tal manera que la sección se encuentre en equilibrio, verificando que la suma de las fuerzas que actúan en tracción en una sección. Luego se calcula el momento de las fuerzas internas respecto a un eje cualquiera, perpendicular al plano de flexión, el cual es el momento resistente de la sección.

3.6.1 Consideraciones principales

- Considerar que la sección alcanza su máxima resistencia al llegar a una deformación unitaria máxima a compresión de $\epsilon_u = 0.003$.
- Se considera que la distribución de las deformaciones es lineal de acuerdo a la tesis de Navier, para cualquier estado de esfuerzos.
- Podrá utilizarse la distribución equivalente de esfuerzos.

3.6.2 Pasos a seguir para resolver el problema

- Asumir un valor "C" y determinar la deformación para cada capa de acero.
- Encontrar el esfuerzo para cada capa de acero.
- Hallar las fuerzas de compresión del acero y del concreto, y fuerzas de tracción en el acero.
- Se considera

$$R = T - C$$

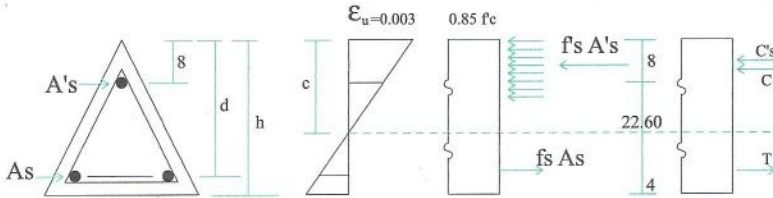
- Asumir otro valor de "C" y repetir los pasos anteriores, y así prosiga con los tanteos hasta un valor "C" que cumpla.

$$R = T - C = 0$$

- Encontrar el momento de las fuerzas internas respecto a un eje cualquiera perpendicular al plano de flexión, el cual es el momento resistente a flexión.

Ejemplo:

Encontrar la resistencia a flexión de una viga de sección triangular de 40 cm de lado que tenga su base a tracción y con armadura de 3 varillas de $\varnothing \frac{3}{4}$ " para una $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$ y $f'_c = 250 \text{ K/cm}^2$



$$h = \frac{L}{2} \sqrt{3} = \frac{40}{2} \sqrt{3} = 34.6 \text{ cm}$$

$$\text{Área de compresión} = \frac{2a^2}{\sqrt{3}} = 0.577 a^2$$

$$\frac{\epsilon'_s}{\epsilon_u} = \frac{C - B}{C} \quad \epsilon'_s = \epsilon_u (1 - 8/C)$$

$$\frac{\epsilon'_s}{\epsilon_u} = \frac{30.6 - C}{C} \epsilon'_s = \epsilon_s = \epsilon_u \left[\left(\frac{30.6}{C} \right) - 1 \right]$$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

$$\text{Para } C = 14 \text{ cm} \Rightarrow a = 0.85 C = 11.9 \text{ cm}$$

$$\text{a) Área a compresión } 0.577 (11.9)^2 = 76.70 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } \epsilon'_s = 0.003 (1 - 8/13.5) = 0.00122 < \epsilon_y = 0.0021$$

$$\text{c) } \epsilon'_s = 0.003 [(30.6/13.5) - 1] 0.0036 > \epsilon_y = 0.0021$$

Calculo de esfuerzos:

$$f'_s = \epsilon'_s E_s = 0.00122 \times 2 \times 10^6 = 2580 \text{ K/cm}^2$$

$$f_s = f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

Fuerzas:

$$C'_s = A'_s f'_s = 2.85 \times 2580 = 7353$$

$$C_1 = 76.30 \times 0.85 \times 250 = 16214$$

$$C = 23,567 \text{ K}$$

$$T = 2 \times 2.85 \times 4200 = 24000 \text{ K}$$

$$R = T - C = 24000 - 23567 = 433 \text{ K}$$

Podría afinarse más para que $R = T - C = 0$, pero lo consideramos suficiente.

(-) Encontrar la resistencia de la sección de la viga:

$$C_1 = 16214 \text{ K}$$

$$C's = 7353 \text{ K}$$

$$T = 24000 \text{ K}$$

$$C_1 \times \text{brazo} = 16214 \times 22.4 = 363193.6$$

$$C's \times \text{brazo} = 7353 \times 22.6 = 166177.8$$

$$M'u - C_1 + C's = 529371.4 \text{ K} - \text{cm}$$

$$Mu = \emptyset M'u = 0.9 \times 5.29 \text{ T} - \text{m} = 4.76 \text{ T} - \text{m}$$

El momento que resiste la viga es 4.76 T - m

3.7 Control de deflexiones

El reglamento ACI y consecuentemente el ININVI, se refieren a deflexiones que ocurren a niveles de cargas de servicio en condiciones estáticas, no pudiendo ser siempre aplicables a cargas dinámicas, como sismo, viento o impacto. Como consecuencia, es conveniente tener en cuenta los criterios de análisis para su confiabilidad.

3.7.1 Métodos para controlar las deflexiones:

- Mediante espesor mínimo
- Mediante las deflexiones calculadas

A. Mediante espesor mínimo

- Espesor mínimo para losas armadas en un sentido y vigas no presforzadas

a) Losas aligeradas continuas

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Vigetas de} & b = 10 \text{ cm} \\ \text{Ladrillos de Ancho} & = 30 \text{ cm} \\ \text{Losas Superior hf} & = 5 \text{ cm} \\ & s/c \leq 300 \text{ kg/cm} \\ \text{Luz} & L \leq 7.5 \text{ m} \end{array} \right\} h \geq L/25$$

b) Losas macizas Continuas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Luz} \\ \left\{ \begin{array}{l} L \leq 7.5 \text{ m} \\ s/c \leq 300 \text{ kg/m}^2 \end{array} \right. \end{array} \right\} h \geq L/30$$

c) En vigas que forman pórticos

$$h \geq L/16$$

Tabla 1
Peraltes mínimos de vigas no presforzadas o losas en una dirección,
a menos que se calcule las deflexiones (ACI)

PERALTE MINIMO, h				
ELEMENTOS	Simplemente apoyados	Con un extremo continuo	Ambos extremos continuos	En voladizo
	Elementos que no aporten o estén ligados a divisiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse por grandes deflexiones			
Losas en una dirección	$\frac{L}{20}$	$\frac{L}{24}$	$\frac{L}{28}$	$\frac{L}{10}$
Vigas o losas nervadas en una dirección	$\frac{L}{16}$	$\frac{L}{18.5}$	$\frac{L}{21}$	$\frac{L}{8}$

Factores de corrección para f_y y W_c

f_y (Tn/cm ²)	2.9	3.5	4.2	5.3	W_c (Tn/m ³)	1.44	1.68	1.76	1.92
F. de C.	0.80	0.90	1.00	1.15	F. de C.	1.20	1.15	1.10	1.09

Nota: Los peraltes mínimos en la Tabla 1 serán para elementos que no soporten o estén ligados a divisiones u otros elementos susceptibles a dañarse ante grandes deflexiones, salvo que se calculen las mismas.

El cálculo de deflexiones inmediatas por aplicación de carga se hará usando métodos y fórmulas usuales para deflexiones elásticas, considerando los efectos del agrietamiento y refuerzo en la rigidez del elemento.

- L = Luz en centímetros
- Para peso específico $W = 2.3 \text{ Tn/m}^3$ $f_y = 42\,000 \text{ kg/cm}^2$
- Para concreto ligero $1\,440 \text{ kg/m}^3 \leq W \leq 1\,840 \text{ kg/m}^3$
- Los valores de la tabla deben multiplicarse por $(1.65 - 0.0003 W_c)$ pero no menor a 1.09
- Para valores distintos a $f_y = 4\,220 \text{ kg/cm}^2$
- Los valores de la tabla deben multiplicarse por $\left(0.4 + \frac{f_y}{7\,000}\right)$

- Espesor mínimo para losas armadas en dos direcciones (además ver referencia 3 Concreto Armado II)

El espesor mínimo de losas o elementos diseñadas en dos direcciones se rigen con el artículo 9.5.3 de acuerdo con los requerimientos del ACI capítulo 13 ACI numeral 13.6.1.2.

- Espesor de losas sin vigas ACI 9.5.3.2 o 9.5.3.4
- Espesor de losas con vigas ACI 9.5.3.3 o 9.5.3.4

Talla ACI 9.5 (b) Máximas deflexiones aceptadas

Tabla ACI 9.25 (c) Espesor mínimos de losas sin vigas interiores

Fy † k/cm²	Sin lasas ábacos ‡			Con ábacos ‡		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde §		Sin vigas de borde	Con vigas de borde §	
280	Ln/33	Ln/36	Ln/36	Ln/36	Ln/40	Ln/40
420	Ln/30	Ln/33	Ln/33	Ln/33	Ln/36	Ln/36
520	Ln/28	Ln/31	Ln/31	Ln/21	Ln/34	Ln/34

- Para elementos en dos direcciones, Ln es la longitud de luz libre en la de 2 mayor medido cara a cara de los soportes en losas sin vigas y luz cara a cara de vigas u otro tipo de soporte de acuerdo al caso.

† Para Fy entre los valores dados en la tabla, el espesor mínimo debe ser determinado por interpolación.

‡ Los ábacos son según ACI.

§ Losas con vigas entre columnas a lo largo de bordes extremos el valor de para la viga de borde no debe ser menor a 0.8.

Para losas sea vigas exteriores que se soportan en sus apoyos y tenga una relación del lado de largo a corto no mayor de 2, el espesor mínimo se calculará de acuerdo a la tabla 9.2 (c) y no podrá ser menor de los siguientes valores.

- Losas sin ábacos (ACI 13.2.5) 12.5 cm
- Losas con ábacos (ACI 13.2.5) 10.0 cm

Para losas con vigas con soportes de vigas en todos los lados, el espesor necesario “h” será:

- para $\alpha_{fm} \leq 0.2$ utilizar (2.1)
- para $\alpha_{fm} > 0.2$ pero no mayor que 2.0

“h” será mayor o igual que lo siguiente

$$h = \frac{Ln(0.8 + Fy / 1400)}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)} \quad \text{ACI (9-12)}$$

$$h \geq 12.5 \text{ cm}$$

c) Para $\alpha_{fm} > 0.2$

h será mayor o igual a:

$$H = \frac{Ln(0.8 + F_y / 1400)}{36 + 9\beta} \text{ ACI (9-13)}$$

$$H \geq 9.0 \text{ cm}$$

d) En bordes discontinuos, una viga de borde será colocado con una relación de rigidez

$$\alpha_f > 0.80$$

El valor $h_{\min}$ de ecuaciones ACI (9.12) y ACI (9-13) deberá ser incrementado por lo menos en un 10 % en el panel con borde discontinuo Ln = en (b) y (c) es la longitud de luz libre en la dirección mayor medida de cara a cara de vigas.

β = en (b) y (c) es la relación libre entre largo o corta direcciones.

El mínimo espesor de losa dado por (2) (2.1) y (2.2) podrá darse cuando no exceda la deflexión de la tabla ACI 9.5 (b)

La deflexión se calculará teniendo en consideración el tamaño y la forma del panel, condiciones de apoyo y las condiciones de borde de los paneles.

- El valor E_c de acuerdo a (ACI 8.5.1)
- El valor de I_e será según (ACI 9-8)
- Otros valores serán permitidos si salen de cálculos de deflexiones de acuerdo a fórmulas de compresión.
- Deflexiones a largo tiempo adiciones se calcularon con (ACI 9.5.2.5).

B. Mediante las deflexiones calculadas

Se tienen dos tipos de deflexiones máximas calculadas:

1. Deflexiones inmediatas, iniciales o de corta dirección.
2. Deflexiones de larga duración.

• Deflexión Inmediata

Se calcularán con las fórmulas usuales de análisis elástico, pero tomando en consideración la fisuración y el acero de refuerzo en la rigidez del elemento, considerando la inercia de la sección efectiva " I_e ", que es un promedio entre las inercias de las secciones bruta y fisurada, excepto cuando las condiciones de servicio de cualquier sección del elemento no exceda el momento de agrietamientos " M_{cr} ", en este caso podrá utilizarse el " I_g " (sección no agrietada).

El momento de agrietamiento se calculará como se indica a continuación:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{Y_t}$$

Podrá tomarse:

$$fr = \sqrt{f'c}$$

El momento de inercia de la sección transformada agrietada (I_e) podrá calcularse como se indica a continuación:

a) Para elementos de sección rectangular sin refuerzo en compresión:

$$I_e = \frac{bc^3}{3} + n A_s (d - c)^2$$

Donde c es la distancia de la fibra más comprimida al eje neutro y puede evaluarse considerando que:

$$\frac{bc^2}{2} = n A_s (d - c)$$

b) Para sección rectangular doblemente reforzadas

$$I_e = \frac{bc^3}{3} + n A_s (d - c)^2 + (2n - 1) A'_s (c - d')^2$$

Donde c puede evaluarse considerando que:

$$\frac{bc^2}{2} + (2n - 1) A'_s (c - d') = n A_s (d - c)$$

c) En elementos continuos de sección constante, el momento de inercia que se utilice para calcular las deflexiones será un valor promedio calculado de acuerdo a:

$$I_e \text{ promedio} = \frac{I_{e_1} + I_{e_2} + 2I_{e_3}}{4}$$

Donde I_{e_1} e I_{e_2} son los momentos de inercia de las secciones extremas del tramo e I_{e_3} el momento de inercia de la sección central del tramo.

Si el tramo sólo es continuo en un extremo, el momento de inercia promedio se calculará con:

$$I_e \text{ promedio} = \frac{I_{e_2} + 2I_{e_3}}{3}$$

d) Para elementos simplemente apoyados se usará el momento de inercia calculado para la sección central.

e) Para elementos en voladizo se usará el momento de inercia calculado para la sección del apoyo del voladizo.

• Cálculo de las deflexiones diferidas

La deflexión diferida o adicional en el tiempo, resultante del flujo plástico del concreto y de la contracción de fraguado de los elementos en flexión, podrá estimarse multiplicando la deflexión inmediata causada por las cargas sostenidas (carga muerta y la porción de carga viva que se prevé actuará permanentemente) por el factor y que se obtiene por:

$$r = \frac{F}{1 + 50p'}$$

Donde p' es la cuantía del acero en compresión (p' As/bd) en el centro del tramo para elementos simples o continuos, y en la sección de apoyo para voladizo.

El factor F depende del tiempo en que se desee evaluar la deflexión diferida y podrá tomarse:

- $F = 1,0$ (3 meses)
- $F = 1,2$ (6 meses)
- $F = 1,4$ (12 meses)
- $F = 2,0$ (5 años o más)

• Deflexiones máximas permisibles

La diferencia total será la suma de la deflexión inmediata y la deflexión diferida.

La deflexión calculada de acuerdo con las secciones anteriores no deberá exceder los valores indicados en la tabla ACI 9.5 (b).

Tabla ACI 9.5 (b)
Deflexiones máximas permisibles calculadas (ACI)

Tipo de elementos	Deflexión considerada	Límite de deflexión
Azoteas planas que no soporten ni estén ligadas a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	Deflexión instantánea debida a la carga viva	$\frac{L^*}{180}$
Entrepisos que no soportan ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	Deflexión instantánea debida a la carga viva	$\frac{L^{\Psi}}{360}$
Sistema de entrepiso o azotea que soporte o esté ligado a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo plazo debida a todas las cargas sostenidas, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional. ^Ψ	$\frac{L^+}{480}$
Sistema de entrepiso o azotea que soporte o esté ligado a elementos no estructurales no susceptibles de sufrir daños por grandes deflexiones.		$\frac{L^{\&}}{240}$

- * Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el estancamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuados, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al agua estancada, y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas sostenidas, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las preparaciones para el drenaje.
- ψ Las deflexiones a largo plazo deben determinarse de acuerdo con la sección (ACI) 9.5.2.5 a la 9.5.4.3, pero se puede reducir según la cantidad de la deflexión que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determinará basándose en los datos de ingeniería aceptables con relación a las características tiempo - deformación de elementos similares a los que se están considerando.
- + Este límite se puede exceder si se toma medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyadas o unidos.
- & Pero no mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Este límite se puede exceder si se proporciona una contra flecha de modo que la deflexión total menos la contra flecha no exceda dicho límite.

En las fosas sin vigas que tengan ábacos que se extienden en cada dirección y así a partir del eje de apoyo a una distancia no menor de $1/16$ de la longitud del claro medida centro a centro de los apoyos en esa dirección, y que tengan una proyección hacia abajo de la losa de por menos $1/4$ de peralte requerido por las ecuaciones 2.11, 2.12 ó 2.13, se podrá reducir un 10%.

En bordes discontinuados debe disponerse una viga de borde que tenga una relación de rigidez, por lo menos de 0.80, o bien aumentarse el peralte mínimo requerido por las ecuaciones 2.11, 2.12 ó 2.13, por la sección (b), por lo menos un 10% en el tablero que tenga un borde discontinuo.

Se pueden utilizar peralte de losas menores que los mínimos requeridos en las secciones (a), (b) y (c) si se demuestra por el cálculo que la deflexión no exceda los límites estipulados en la tabla II. Las deflexiones deben calcularse tomando en cuenta el tamaño y la forma del tablero, las condiciones de apoyo y la naturaleza de los empotramientos en los bordes del tablero. Se pueden emplear otros valores para "Ec", ver sección 2.5, para "Ie" ec. 2.7, si los resultados de los cálculos de las deflexiones concuerdan razonablemente con los resultados de pruebas extensas. Las deflexiones adicionales a largo plazo deberán calcularse de acuerdo con las secciones 2.7.1 E.c. 2.10. Donde:

A_g = Área total de la sección, cm^2

A_s = Área del refuerzo a tracción, cm^2

A_s' = Área del refuerzo a compresión, cm^2

d' = Distancia de la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo en compresión cm.

d_s = Distancia de la fibra extrema en tracción al centroide del refuerzo en tracción cm.

f_{ct} = Resistencia promedio a la tensión del concreto hecho con agregado ligero, obtenida por medio de compresión diametral (prueba brasileña), kg/cm^2 .

f_r = Módulo de ruptura el concreto, kg/cm^2 .

F = Cargas debidas al peso y a las presiones de fluidos con densidades bien definidas y alturas máximas controlables, o a fuerzas y momentos internos relacionados.

h = Peralte total de un elemento, cm.

H = Cargas debidas al peso y a la presión del terreno, del agua en el terreno, y los materiales, o a fuerzas y momentos internos relacionados.

I_{cr} = Momento de inercia de la sección agrietada transformada a concreto.

I_e = Momento de inercia efectivo para el cálculo de las deflexiones.

3.8 Variaciones en información de corte según capítulo 11 ACI-2011

En el capítulo 11 del Reglamento ACI, se indica lo siguiente:

- Los valores de $\sqrt{f'c}$ utilizados actualmente en este capítulo no deberán exceder de 100 psi en unidades métricas $\sqrt{f'c} \leq 27 \text{ K/cm}^2$ excepto lo siguiente:

Se permitirán valores mayores:

$$\sqrt{f'c} \geq 27 \text{ K/cm}^2$$

Para el cálculo de “Vc”, “Vci” y “Vcw” para vigas de concreto armado o presforzado, y para losas con vigas que tengan un refuerzo mínimo en el alma de acuerdo a lo requerido en 11.4.6.3, 11.4.6.4 o 11.5.5.2 del ACI.

11.4.6.3 Cuando se requiere un refuerzo por corte según el ACI 11.4.6.1 y donde según el ACI 11.5.1 indica que puede despreciarse el esfuerzo por torsión. Av min para elementos preesforzados (excepto lo indicado en 11.4.6.4) y elementos no presforzados, se calcularán por

$$A_v \min = 0.2 \sqrt{f'c} \frac{b_w \times s}{f_{yt}} \quad (\text{I})$$

pero no será menor que

$$A_{vmin} \geq 3.5 \frac{b_w \times s}{f_{yt}}$$

11.4.6.4 Para elementos presforzados con una fuerza preesforzada efectiva no menor que 40% del esfuerzo de tracción del refuerzo a flexión, Avmin no debe ser menor que el valor de las ecuaciones (I) y (II).

$$A_{vmin} = \frac{A_{ps} f_{pu} \times s}{80 f_{yt} \times d} \sqrt{\frac{d}{b_w}} \quad (\text{II})$$

11.5.5.2 Donde se requiere refuerzo por torsión, según 11.5.5.2 que dice que el área mínima de refuerzo torsional se colocará en todas las regiones donde T_u exceda el límite dado en 11.5.1.

11.4.6.1 El área mínima de refuerzo por corte Av min se colocará en todos los elementos sometidos a flexión con refuerzo por corte (presforzados y no presforzados), donde

$$V_u > 0.52 \phi V_c$$

excepto en elementos que satisfagan uno o mas de los puntos de (a) a (f)

- Zapatas o losas sólidas
- Elementos huecos sin tope en su totalidad no mayor que 31.5 cm donde $V_u \leq 0.5 \phi V_{cw}$
- Uniones de concreto definido en 8.13
- Vigas con h no mayor que 25 cm
- Vigas integradas con losas con h no mayor que 60 cm y no mayor entre el mayor de 2.5 veces el espesor de ala y 0.5 veces el ancho del alma
- Vigas de concreto de fibra de acero de refuerzo de peso normal con $f'c$ no mayor que $h \leq 60 \text{ cm}$
 $V_u < \phi 0.53 \sqrt{f'c} b_w \times d$

3.9 Transferencia de momentos a columnas

Cuando se produzca transferencia de momentos de vigas a columnas en las conexiones de elementos de estructuras sometidas a cargas de gravedad - viento, sismo u otras fuerzas laterales, el corte resultante de la transferencia del momento deberá ser considerado en el diseño de refuerzo lateral en columnas.

Con excepción de las conexiones, ninguna parte de un sistema primario resistente a cargas sísmicas, que esté restringido en cuatro lados por vigas o losas de aproximadamente igual altura.

Las conexiones tendrán refuerzo lateral no menor que el necesario, según la ecuación:

$$A_v = 3.5 \frac{b w s}{f_y}$$

con la columna, para una altura no menor que el elemento de mayor altura en la conexión.

Es conveniente tener en cuenta la parte 7.9 del capítulo 7 del ACI.

Las pruebas realizadas nos muestran que las zonas de Nodos o conexiones de viga a columna en el interior del edificio, no necesitan refuerzo de corte siempre y cuando el nodo esté confinado en los cuatro lados por vigas de aproximadamente igual altura.

Sin embargo, los nodos sin confinamiento lateral, tales como las zonas laterales o exteriores en general del edificio, necesitan refuerzo por corte para prevenir deterioro, debido a agrietamiento por corte.

En regiones donde se producen sismos de gran intensidad, los nodos deberán estar preparados para resistir una variedad de efectos de cargas revertidas, que desarrollan la capacidad de flexión de las vigas colindantes.

LOSAS ARMADAS EN UN SENTIDO

4.1 Generalidades

El diseño de losas armadas en un sentido es un procedimiento simple, comparativamente al de otros elementos. Las losas podríamos definirlas como elementos que soportan básicamente cargas de gravedad aplicadas directamente sobre su superficie, y normalmente a esta, y cuya altura es bastante pequeña en comparación a sus otras dimensiones.

Tienen sus apoyos perpendicularmente al sentido del armado, los cuales pueden tener un determinado grado de restricción o, en el caso extremo, no tendrán restricción entre viga y losa, o apoyo y losa.

Las normas no permiten el uso de estribos en losas. Las consideraciones de refuerzo mínimo son para prevenir el agrietamiento, y por requisitos de temperatura. Por esta misma razón se pide colocar acero transversalmente a la armadura principal.

Los conocimientos básicos a ser usados y los criterios a tomarse en cuenta para el diseño de las losas armadas en un sentido, son los que se vieron en el capítulo anterior para vigas con armadura en tracción solamente.

4.2 Método simplificado de análisis

(Por los coeficientes del ACI)

El análisis estructural para el cálculo de momentos positivos (en los tramos centrales) y momentos negativos (en los apoyos), para las losas de concreto armado, puede efectuarse ya sea por los procedimientos tradicionales de aproximaciones sucesivas, como el de Hardy Cross o similares; como también por métodos matriciales, tanto manualmente o con la ayuda de computadoras. El ACI proporciona un simplificadorio para este efecto, siempre y cuando las características del elemento cumplan con las condiciones que limitan su aplicación, el mismo que es en base a coeficientes.

Con este procedimiento se evita hacer un análisis para cada combinación de carga y luego el respectivo envolvente de momentos, y también de cortantes, porque se dan coeficientes para ambos esfuerzos.

4.2.1 Condiciones para su aplicación

- a) Que la losa tenga dos o más claros o tramos.
- b) Que los claros sean aproximadamente iguales, sin que el mayor de los claros adyacentes exceda en más de 20% al menor.

- c) Las cargas estén uniformemente distribuidas.
- d) La carga viva unitaria no exceda en tres veces la carga muerta unitaria.
- e) Que los elementos sean prismáticos:

Si se cumple estas cinco condiciones, se pueden usar los siguientes coeficientes que multiplicados por " $W l_{n^2}$ " dan los valores de momentos para cada caso.

W = carga repartida por unidad de longitud.

l_n = Luz libre para momento positivo o cortante y promedio de las luces libres adyacentes para el momento negativo.

Momento positivo

Claros extremos

El extremo discontinuo no está empotrado

$$\frac{Wul_{n^2}}{11}$$

El extremo discontinuo no es monolítico con el apoyo

$$\frac{Wul_{n^2}}{14}$$

Claros interiores

$$\frac{Wul_{n^2}}{16}$$

Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior

Dos claros

$$\frac{Wul_{n^2}}{9}$$

Más de dos claros

$$\frac{Wul_{n^2}}{10}$$

Momento negativo en las demás caras de apoyos interiores

$$\frac{Wul_{n^2}}{11}$$

Momento negativo en las caras de todos los apoyos para:

Losas con claros que no excedan de 3 m y Vigas en las cuales la relación entre la suma de las rigideces de las columnas y la rigidez de la viga exceda de 8 en cada extremo del claro.

$$\frac{Wul_{n^2}}{12}$$

Momento negativo en la cara interior de los apoyos exteriores para los miembros contruidos monolíticamente con sus apoyos.

Cuando el apoyo es una viga de borde

$$\frac{Wul_{n^2}}{24}$$

Cuando el apoyo es una columna

$$\frac{Wul_n}{16}$$

Cortante en miembros extremos en la cara del primer apoyo interior

$$\frac{1.15Wul_n}{2}$$

Cortante en la cara de todos los demás apoyos

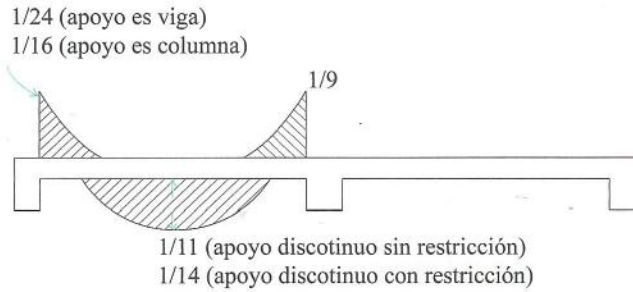
$$\frac{Wul_n}{2}$$

Podría interpretarse de la siguiente manera:

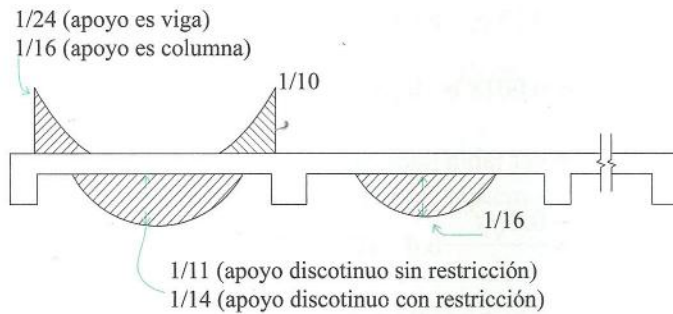
Los coeficientes se multiplicaran por $(W l_n)$ para hallar el momento.

A. Momentos

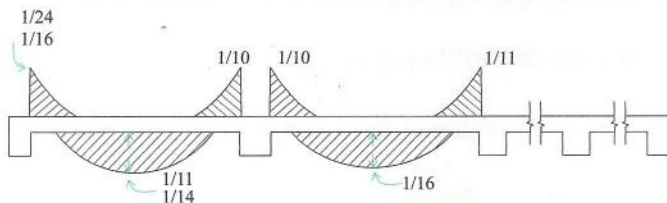
1) Losa de 2 tramos:



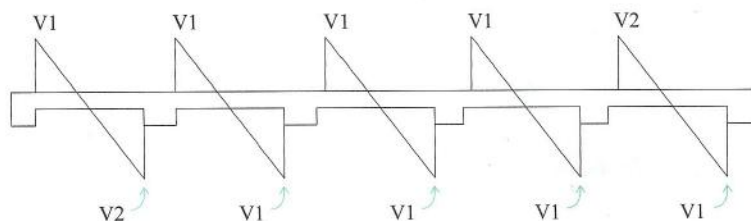
2) Losa de 3 tramos:



3) Losa de más de 3 tramos (Los momentos iguales que en el caso (2)) excepto el apoyo del 2° tramo.



B. Cortantes



$$V1 = \frac{1.15W1n}{2}$$

$$V2 = \frac{W1n}{2}$$

4.3 Losas sólidas o macisas armadas en una sola dirección

Son elementos estructurales que se usan como pisos, techos o entrepisos en edificios. Generalmente este tipo de losas pueden ser usadas cuando se necesitan elementos de muy poco espesor para resistir sobrecargas muy pequeñas, y generalmente tendrán armadura mínima.

También se utilizan cuando se tiene sobrecargas muy grandes, para resistir esfuerzos de corte verdaderamente altos, el refuerzo de acero a la flexión será también muy grande, por ejemplo para losas que resisten el peso del mineral en minas, etc.

A. Área de acero máxima y mínima

$$\text{Área Máxima} = 0.75 \rho_b \times b \times h$$

$$\text{Área Mínima} = 0.0018 b \times h \text{ (por temperatura)}$$

= ver tabla para cuantía mínima, capítulo 2.

$$A_s \text{ min} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} b.d \quad (\text{ININVI-89})$$

B. Serviciabilidad

Para losas armadas en un solo sentido, es necesario verificar el control por agrietamiento y el control de deflexiones. Se podrá verificar las limitaciones de ambos casos mediante el adecuado espaciamiento de las varillas en el primer caso, y el espesor de las losas para el segundo caso.

a) Separación máxima de varillas por agrietamiento

$$S = 3 h \quad \text{donde } h = \text{Espesor total de la losa}$$

ó

$$S = 45 \text{ cm} \quad \text{Escoger el menor}$$

b) Espesor mínimo para losas armadas en un sentido: para no verificar deflexiones.

Tipo de losa	Espesor
Tramo simple	$1n/20$
Un extremo continuo	$1n/24$
Ambos extremos continuos	$1n/28$
Losas en voladizo	$1n/10$

Ejemplo 1:

Efectuar el análisis y diseño de una losa macisa para los siguientes datos:

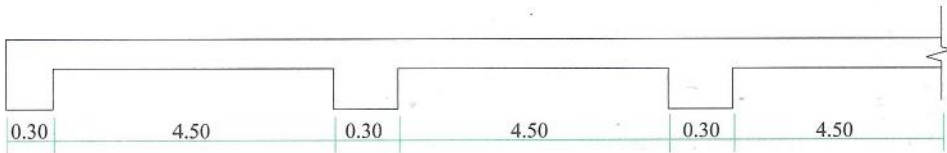
$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$f'_c = 280 \text{ K/cm}^2$$

$$S/C = 150 \text{ K/m}^2$$

$$\text{Acabados} = 80 \text{ K/m}^2$$

$$\text{Peso propio} = 456 \text{ K/m}^2$$



1) Hallar el espesor de la losa:

Para tramo extremo

$$h = \frac{450}{24} = 18.75 \text{ cm} \Rightarrow 19 \text{ cm}$$

Para tramo interno

$$h = \frac{450}{78} = 16.07 \text{ cm} \Rightarrow 16 \text{ cm}$$

2) Carga última:

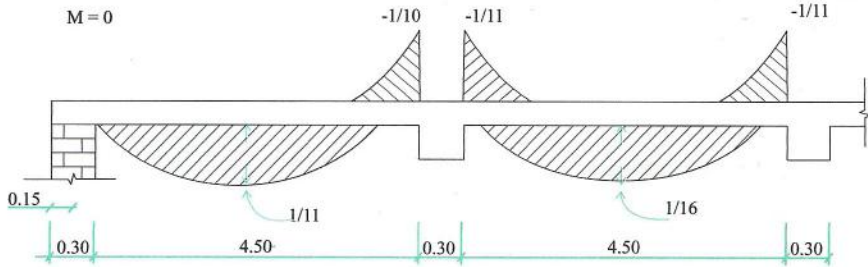
$$W_u = 750.4 + 255 = 1005.4 \text{ K/m}^2$$

Corte en el primer soporte interior:

$$V_u = (1/2)(4.50)(1005)(1.15) = 2.6 \text{ Tn}$$

Corte en los demás tramos:

$$V_v = (1/2)(4.50)(1005) = 2.26 \text{ Tn}$$

Momentos:

$$W_u l^2 n = (1.005)(4.50)^2 = 20.35 \text{ T - m/m}$$

3) Cálculo de área de acero para tramos interiores $h = 16 \text{ cm}$

$$A_{s \text{ min}} = (0.0018)(16)(100) = 2.88 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (Temperatura)}$$

$$A_{s \text{ min}} = \left(\frac{0.7}{f_y} \sqrt{f'_c} \right) b, d \text{ (ININVI-89)}$$

$$d = h - \text{recubrimiento} - \frac{1}{2} (1.27) = 16 - 2 - 0.64 = 13.36 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)} \text{ y } a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

Momento negativo en apoyo:

$$M = -\frac{1}{11} (20.35) = -1.85 \text{ T - m/m}$$

$$\frac{185000}{0.85 \times 4200 \left(13.36 - \frac{a}{2} \right)} \Rightarrow \text{tantear con } a \approx 0.70$$

$$A_s = 3.98 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{3.98 \times 4200}{0.85 \times 280 \times 1.00} = 0.702 \approx 0.70$$

$$\text{Usar } A_s = 3.98 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4 \text{ } \emptyset 1/2'' \Rightarrow 4 \text{ } \emptyset 1/2'' @ 25 \text{ cm}$$

Momento positivo en tramo:

$$M = \frac{1}{16} (20.35) = 1.27 \text{ T - m/m}$$

$$\frac{127000}{0.85 \times 4200 \left(13.36 - \frac{a}{2} \right)} \Rightarrow \text{tantear con } a \approx 0.50$$

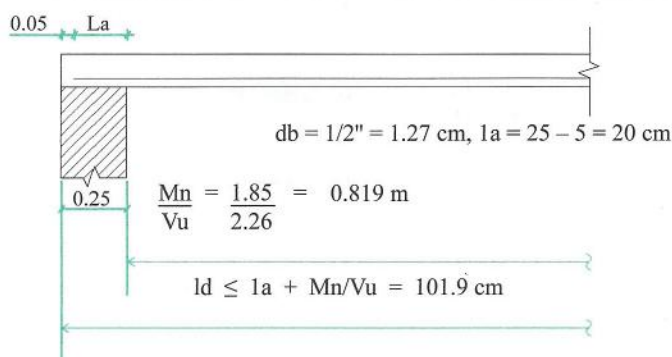
$$A_s = 2.71 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \frac{2.71 \times 4200}{0.85 \times 280 \times 100} = 0.48 \approx 0.50$$

$$A_s = 2.70 \text{ cm}^2 \Rightarrow 3 \text{ } \emptyset 1/2'' \Rightarrow \emptyset 1/2'' @ 33 \text{ cm}$$

Similarmente se procederá con el tramo Extremo para $h = 19 \text{ cm}$

- 4) Verificación de longitud desarrollo para $\varnothing 1/2''$, debido a que todas las varillas son de esa dimensión:

Hacerlo en la zona más crítica en el extremo discontinuo.



$$ld \text{ (MIN)} = 0.0060 db f_y = 0.006 \times 1.27 \times 4200 = 32 \text{ cm}$$

$$ld \text{ (ad)} = 0.06 A_b = \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} = 0.06 \times 1267 \times \frac{4200}{\sqrt{280}}$$

$$ld \text{ (ad)} = 19.08 \text{ cm}$$

- 5) Verificación de corte:

$$V_c = \left(0.5\sqrt{f'_c} - 176 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$$

$$V_c \leq 0.93\sqrt{f'_c} \quad \frac{V_u d}{M_u} \leq 1$$

{ $V_u \times M_u$ } ocurren simultáneamente

Usar simplifícadamente:

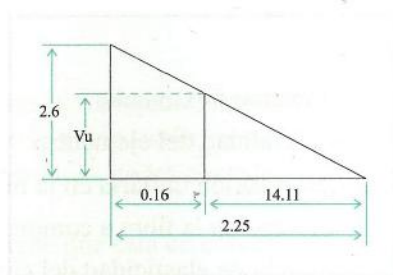
$$V_c = 0.53\sqrt{f'_c} b_w \times d$$

$$V_u = \frac{2.6 \times 2.09}{2.25} = 2.42 \text{ T}$$

$$\varnothing V_n = \varnothing V_c = \varnothing 0.53\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$\varnothing V_c = 0.85 \times 0.53 \times 100 \times 16.32 = 12302.52 \text{ kg}$$

$$V_u < \varnothing V_c \Rightarrow 2.42 \text{ T} < 12.3 \text{ T} \quad \therefore \text{O.K.}$$



6) Verificación de deflexiones:

Las deflexiones máximas permisibles pueden encontrarse con las siguientes fórmulas:

$$\text{tramo exterior } \Delta = \frac{3.25 W l_n^4}{384 E I} \quad (65\% \text{ del tramo simple})$$

$$\text{tramo interior } \Delta = \frac{2 W l_n^4}{384 E I} \quad (40\% \text{ del tramo simple})$$

El ACI - 2011 nos da un valor para momento de inercia efectivo.

$$I_e - \left(\frac{M c r}{M a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M c r}{M a} \right)^3 \right] \leq I_{cr}$$

$$\text{Donde } M c r = \frac{f_r I_g}{Y_t}$$

Para concreto de peso normal, $f_r = 2 \lambda_{\Delta} \sqrt{f' c}$

para concreto de peso ligero ver ACI sección 9.5.2.3

I_g = momento de inercia del concreto sin considerar "As"

Y_t = distancia del eje centroidal de la sección total a la fibra extrema en tracción sin considerar el "As".

$$I_{cr} = \frac{M \times K d}{E_c \times \epsilon_c} = \frac{M \times K d}{f_c}$$

$$\lambda_{\Delta} = \frac{\epsilon}{1 + 50 \rho'}$$

Donde:

M = momento flexionante

$K d$ = profundidad del eje neutro

ϵ_c = deformación unitaria en la fibra a compresión extrema del concreto

f_c = esfuerzo en la fibra a compresión extrema del concreto

E_c = Módulo de elasticidad del concreto.

λ_{Δ} = ACI 8.5.1 para concreto de peso normal o liviano

ρ' = Valor en el centro de luz para vigas simplemente apoyadas o continuas, y al apoyo en voladizos

ϵ = el factor por tiempo en la aplicación de cargas

5 años o mas	2.0
12 meses	1.4
6 meses	1.2
3 meses	1.0

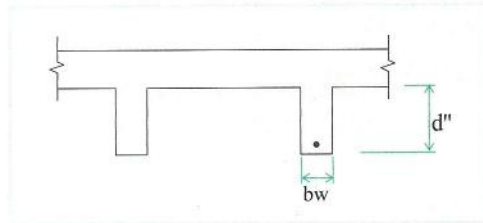
4.4 Losas Nervadas armadas en una sola dirección

La “Losa Nervada” armada en una sola dirección consiste en una combinación monolítica de nervadura, regularmente espaciada, y una losa colocada en la parte superior, que actúa en una dirección.

4.4.1 Características

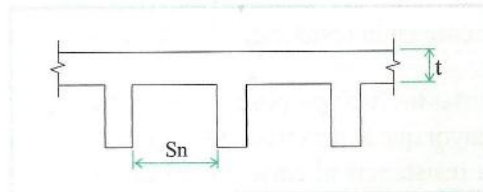
- a) El ancho de las nervaduras no debe ser menor de 10 cm, y el peralte no mayor de $3 \frac{1}{2}$ veces su ancho mínimo.

$$b_w \geq 10 \text{ cm}, d'' \leq 3.5 b_w$$



- b) El espaciamiento libre entre las nervaduras no debe exceder de 75 cm.

$$S \leq 75 \text{ cm}$$



- c) Si las losas nervadas no cumplen con la definición y las características anteriores se diseñarán como vigas y losas separadamente.
- d) Cuando se empleen ladrillos huecos de relleno permanente hechos de arcilla cocida, concreto u otro material con una resistencia a la compresión, por lo menos igual a la resistencia especificada del concreto en las nervaduras, podrá considerarse lo siguiente:
- La pared vertical del elemento vertical de relleno que está en contacto con la nervadura puede ser incluida en los cálculos de resistencia para el cortante y el momento negativo. Ninguna otra parte se incluirá en los cálculos de resistencia.
 - El espesor de la losa de concreto sobre rellenos permanentes no será menor de 4 cm ni de $1/12$ de la distancia libre entre nervaduras.

$$t \geq 5 \text{ cm} \quad \text{ó} \quad t \geq 1/12 S_n$$

- El refuerzo transversal al principal (por temperatura) se calculará de acuerdo al capítulo 2 de este libro a la sección 7.12 (ACI - 11).

e) Cuando se utilicen casetones o encofrados removibles que no cumplan con (d) se considerará:

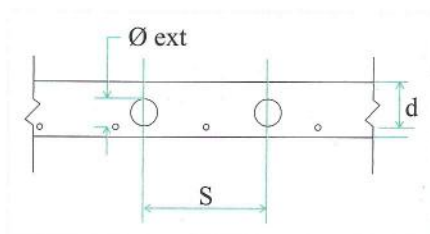
- El espesor de la losa no será menor de 5 cm ni de $1/12$ la distancia libre entre nervaduras.

$$t \geq 5 \text{ cm} \quad \text{ó} \quad t \geq 1/12 S_n$$

- Deberá suministrarse en la losa refuerzo perpendicular a las nervaduras de acuerdo con lo requerido por flexión, considerando la concentración de carga si las haya, pero no menor que capítulo 2 a este libro a la sección 7.12 (ACI - 11).
- Cuando se tengan tuberías ahogadas en una losa deben cumplir principalmente:

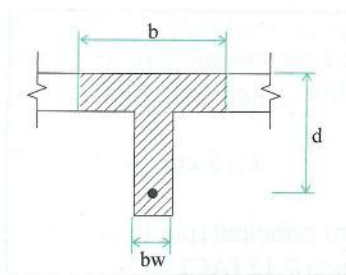
i. $\varnothing \text{ ext (tuberías)} \leq 1/3d$

$$\text{Stub} \geq 3 \varnothing \text{ ext.}$$



y otras restricciones de la sección 6.3 (ACI)

- El espesor en cualquier punto de ésta debe ser cuando menos 2.5 cm mayor que el presente total del ducto o tubería, no debiendo estos elementos afectar significativamente en la resistencia del elemento.
- La resistencia cortante “ V_c ” proporcionada por el concreto en las nervaduras se podrá tomar en 10 % mayor que la prevista en el capítulo de corte o capítulo 11 (ACI), pudiendo incrementarse la resistencia al corte colocando refuerzo por cortante, o aumentando el ancho en los extremos de las nervaduras.
 - **Encofrados:** Los encofrados o formas reusables para losas nervadas pueden ser fabricadas en base a varios tipos de materiales, como acero, madera, planchas de material prensado, fibra de vidrio, plástico reforzado, los cuales pueden ser comparados o alquilados por los constructores, pudiendo también usarse encofrados permanentes (que se quedan en la losa) hechos de concreto, concreto ligero o arcilla cocida.
 - **Dimensiones:** El Manual del CRSI da información para el análisis de Losas Nervadas, considerando las dimensiones standard para los encofrados de viguetas. Se proporciona una tabla que da dimensiones estándar en losas nervadas. (Tabla 4.1)



4.4.2 Refuerzo mínimo y máximo

$$\rho_{\text{MIN}} = 14/f_y \quad \text{ó} \quad A_s = 4/3 A_s \quad (\text{MIN por Análisis})$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.75 \rho_b \begin{cases} \text{para } M(-) & A_c = b \times d \\ \text{para } M(+) & A_c = b_w \times d \end{cases}$$

En momentos negativos, el acero se distribuirá en las zonas de esfuerzo máximo, y parte en zonas de ancho efectivo del ala. Se considerará el total de la losa superior con efectiva cuando $S \leq 16 h$, y generalmente se recomienda que la armadura para el momento negativo se distribuye totalmente en la losa superior.

4.4.3 Espaciamiento máximo de varillas (por control de grietas)

El espaciamiento máximo de varillas para momento negativo en la parte superior de la losa será limitado por $Z = f_s \sqrt{d c} A$, para una separación máxima entre varilla de $S_b = (Z / f_s)^3 / 2 d^2 c$ para $f_s = 0.6 f_y$, $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$

	Exp. Externa	Exp. Interna
Losas para $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$	$Z = 23035$	$Z = 27860$
Vigas para $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$	$Z = 25895$	$Z = 31250$

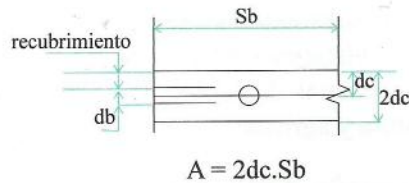
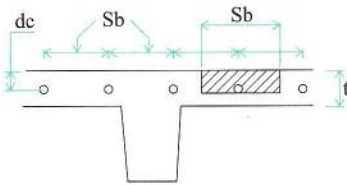


Tabla 4.1

Espaciamiento máximo del refuerzo para barras de refuerzo de momento negativo en la losa superior para el control de grietas (en cm)

Nº de Ø barra		Recubrimiento para losas expuestas interiormente			Recubrimiento para losas expuestas exteriormente		
		1.6 cm	2 cm	2.5 cm	3.2 cm	3.8 cm	5 cm
3	3/8"	45	45	45	27	20	-
4	1/2"	45	45	45	25	19	-
5	5/8"	45	45	45	24	17	-
6	3/4"	45	45	45	-	16	10
7	7/8"	45	45	45	-	15	8
8	1"	45	45	45	-	13	8
9	1 1/8"	45	45	41	-	13	8
10	1 1/4"	45	45	38	-	12	7
11	1 3/8"	45	45	35	-	11	7

Nota: El espaciamiento debe ser menor de "5 t" ó 45 cm.

4.4.4 Recubrimiento mínimo y mínimo espesor de losa superior para resistencia al fuego

Cada Reglamento da valores para este efecto, pero como referencia se dará básicamente el criterio establecido por el Código de Edificios Unificados 1976 - USA (Comparar con los del capítulo 2 y usar el mayor).

Tabla 4.2

Espesor mínimo para la losa superior y recubrimiento para diferentes tiempos de incendio.

Tipo de concreto	Tiempo de resistencia al fuego (horas)		
	1 h	2 h	3 h
Concreto de peso normal			
- Recubrimiento del refuerzo	2 cm	2.5 cm	3.5 cm
- Espesor de la losa superior	9 cm	11.5 cm	14.0 cm
Concreto ligero estructural			
- Recubrimiento del refuerzo	2 cm	2.5 cm	3.5 cm
- Espesor de la Losa superior	8 cm	10.0 cm	11.5 cm

Cuantía mínima de acero:

El reglamento ACI no especifica la cuantía mínima para el refuerzo de momento negativo, algunos autores opinan que si el acero positivo no está traslapado en los apoyos, deberá colocarse suficiente refuerzo por momento negativo en los apoyos, y que sea igual a 0.0018 por el área total de la vigueta, incluyendo la losa superior, para resistir los efectos de temperatura y agrietamiento.

El refuerzo por temperatura y agrietamiento perpendicular al sentido de las viguetas y colocado en las losas superiores, debe ser colocada a una distancia menor o igual que "5 h" o "45 cm", siendo "h" el espesor de losa, el que sea menor.

Corte: Lo referente al corte se verá en el capítulo 7, pero como adelanto diremos que la siguiente fórmula, como medida de la tracción diagonal, nos cuantifica el corte admisible tomado por el concreto armado:

$$V_u \leq V_n$$

$$V_n = V_c + V_s$$

V_c = esfuerzo nominal de corte que toma el concreto.

V_s = esfuerzo nominal de corte que toma el refuerzo (estribos).

El corte que toma el concreto en viguetas podrá considerarse 10% mayor que los valores asumidos para otros elementos estructurales. Ver capítulo 7 (capítulo II del ACI '83), pudiendo usarse directamente la siguiente fórmula:

$$V_c = \phi 0.583 bwd \text{ ó más afinada}$$

$$V_c = \left(0.55 \sqrt{f'_c} + 193.6 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) bwd \text{ pero } V_u d \leq \frac{1}{M_u}$$

- Para concreto con agregado ligero (sección 4.2 ACI - 83), deberá sustituirse $f'c/1.8 \Rightarrow$ por $\sqrt{f'c}$ pero $f'c/1.8 \leq \sqrt{f'c}$

Luego: $V_c = 0.583 f'c/1.8 b_w.d$

- Cuando $f'c$ no está especificado se usará $0.75\sqrt{f'c}$ para “concreto ligero” y $0.85\sqrt{f'c}$ para “concreto ligero con arena” en lugar de $\sqrt{f'c}$

Luego se usará:

$$V_c = 0.4373\sqrt{f'c} b_w.d \text{ (para concreto ligero)}$$

$$V_c = 0.4956\sqrt{f'c} b_w.d \text{ (para concreto ligero con arena)}$$

De todas maneras, si quiere usarse más exactamente los valores de corte admisibles, podrá tomarse en cuenta los valores de momento o carga axial compresiva a la losa, que se toman en cuenta en las fórmulas que se dan en el capítulo 7 o en la sección II (ACI).

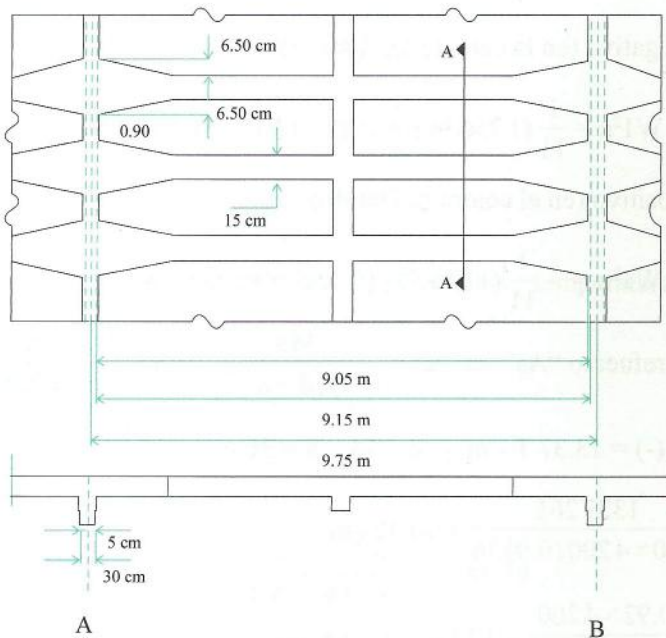
En conclusión, el corte en las losas nervadas podrá ser tomado por el concreto, el refuerzo de acero (estribos), y como ayuda podrá utilizarse el ensanche de viguetas cuando se requiera hacerse este procedimiento con el fin de una mayor resistencia al corte.

Ejemplo:

Diseñar una losa de las características que se ven en la figura y las siguientes características de material:

$$f'c = 280 \text{ K/cm}^2 \text{ (normal)}$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$



Solución:

1) Cargas:

C.M.

Peso propio de la losa = 375.0

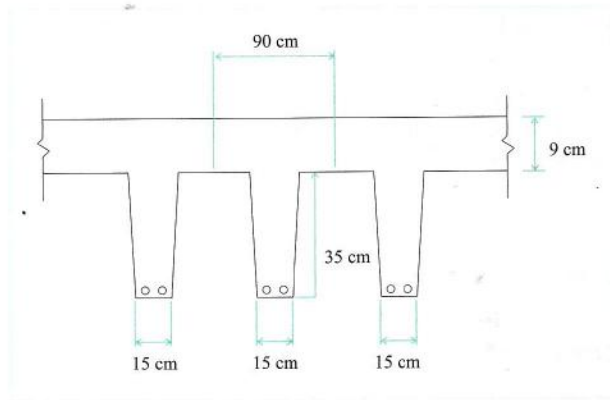
Acabados = 100.0

Tuberías, AA, equipos = 178.5

653.5 K/m²CV = Sobrecarga = 730 K/m²

$$653.5(1.2) + 730(1.6) = 1952.2 \text{ K/m}^2$$

$$W_u \text{ (m.l. vigueta)} = 1952.2 \times \frac{90}{100} = 1756.98 \text{ K/mlv}$$



2) Cálculo de momentos y cortantes usando los coeficientes del ACI

Momento negativo (en la cara de los apoyos)

$$M_u = -1/11 W l^2 n = -\frac{1}{11} (1756.98)(9.15)^2 = 13372.61 \text{ K-m}$$

Momento positivo (en el centro del tramo)

$$M_u = -1/16 W l^2 n = -\frac{1}{11} (1756.98)(9.15)^2 = 9193.67 \text{ K-m}$$

$$\text{Cálculo del refuerzo "As"} \Rightarrow As = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} \text{ y } a = \frac{As f_y}{0.85 f'_c b}$$

a) para $M_u (-) = 13.37 \text{ T-m}$ y $d = 44 - 8 = 36 \text{ cm}$

$$As = \frac{1337261}{0.90 \times 4200 (0.9) 36} = 10.92 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{10.92 \times 4200}{0.85 \times 280 \times 15} = 12.84$$

$$A_s = \frac{1337261}{0.90 \times 4200 \left(36 - \frac{12.84}{2} \right)} = 12.66 \text{ cm}^2$$

Haciendo dos tanteos más $A_s = 11.95 \text{ cm}^2$, usar $\varnothing 5/8 @ 15 \text{ cm}$ (varillas superiores).

b) Para $M (+) = 9193.67 \text{ K-m}$ y $d = 36 \text{ cm}$

$$A_s = \frac{919367}{0.90 \times 4200 (0.9) 36} = 7.51 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{7.51 \times 4200}{0.85 \times 280 \times 90} = 1.47 \Rightarrow A_s = 6.90 \text{ cm}^2$$

$a = 1.43 < hf = 9 \therefore$ tratar como viga rectangular de " $b \times d$ "

$$A_s = 7.30 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{usar } 2 \varnothing 7/8'' \text{ (cada vigueta)} = A_s = 7.758 \text{ cm}^2$$

3) Verificar límites mínimo y máximo del refuerzo de acero:

Para momento negativo:

$$\rho = \frac{A_s}{bwd} = \frac{13.18}{28 \times 36} = 0.0130$$

$$\rho = 0.85 \times 0.85 \times \frac{280}{4200} = \frac{6000}{6000 + 4200} = 0.0283$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 0.75 \quad \rho_b = 0.75 \times 0.0283 = 0.0212$$

$$\rho_{\text{MAX}} = 14/f_y = 0.0033 \text{ (ACI)}$$

$$\rho_{\text{MIN}} = 14/f_y = 0.0033 \text{ (ACI)}$$

$$\rho_{\text{MIN}} = 0.7 \left(\frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} \right) \text{ (ININVI)}$$

$$\rho_{\text{MIN(A-T)}} = 0.0018 \text{ (por agrietamiento y temperatura)}$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} 0.0033 \\ 0.0018 \end{array} \right\} < 0.0130 \quad 0.0212 \therefore \text{O.K.}$$

Para momento positivo:

$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{7.758}{90 \times 36} = 0.00239$$

$$0.0018 < 0.00239 < 0.0212 \therefore \text{O.K.}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bwd} = \frac{7.758}{15 \times 36} = 0.0143$$

$$0.0033 < 0.0143 < 0.0212 \quad \therefore \text{O.K.}$$

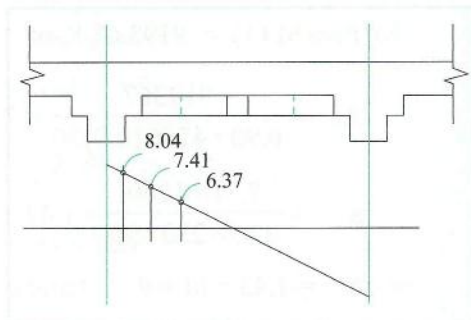
4) Verificación del corte:

A la distancia "d" de la cara del apoyo para un

$$b = 15 + 13 \times \frac{59}{90}$$

$b = 23.52$ cm, debido a que el ancho "b" es variable.

$$V_v = \frac{1756.98 \times 9.15}{2} = 8038.18 \text{ Kg} = 8.04 \text{ T}$$



Corte a la distancia "d"

$$V_v = 7405.67 \text{ K}$$

$$\phi V_c = \phi 0.583 \sqrt{f'_c} b w d$$

$$\phi V_c = (0.85) 0.583 \sqrt{280} (23.52)(36)$$

$$\phi V_c = 7021.12 \text{ kg} < 7405.6 \text{ kg} \text{ (El concreto no toma el corte)}$$

Haremos un cálculo más exacto para "Vc"

$$\phi V_c = \left(0.55 \sqrt{f'_c} + 193.6 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b w d \text{ pero } \frac{V_u d}{M_u} \leq 1$$

$$\phi V_c = \left(0.55 \sqrt{280} + 193.6 (0.013) \frac{7405.6 \times 36}{10240.5} \right) 23.52 \times 36$$

$$\phi V_c = 9923.39 \text{ kg} > 7405.6 \text{ kg} \quad \therefore \text{No necesitan estribos}$$

Corte en la vigueta $b = 15$ cm

$$V_v = 6369.05 \text{ K}$$

$$V_c = (0.85) \times 0.583 \sqrt{280} \times 15 \times 36$$

$$\phi V_c = 4477.75 \text{ K} < 6369.05 \text{ O.K.}$$

Haciendo un cálculo más exacto para "Vc"

$$\phi V_c = \left\{ 0.55 \sqrt{280} + 193.6 (0.0244) \frac{6369.05 \times 36}{4418.96} \right\} b w d$$

$$\phi V_c = 7520.58 \text{ K} > 6369.05 \text{ (no necesita estribos)}$$

5) Verificación de deflexiones: $M(+)$

$$a = 1.43 \text{ cm (ver paso 2)} \quad hf = 9 \text{ cm}$$

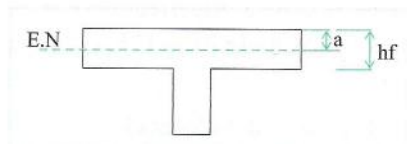
$$\rho = \frac{7.758}{36 \times 90} = 0.00239$$

$$\rho_{L.D} = 0.18 \frac{f'_c}{f_y} = 0.18 \frac{280}{4200} = 0.012 \text{ (límite para deflexiones)}$$

$$\rho = 0.00239 < \rho_{L.D} = 0.012 \quad \therefore \text{no necesita verificar deflexiones}$$

En caso que no cumpla esta relación, verificar deflexiones

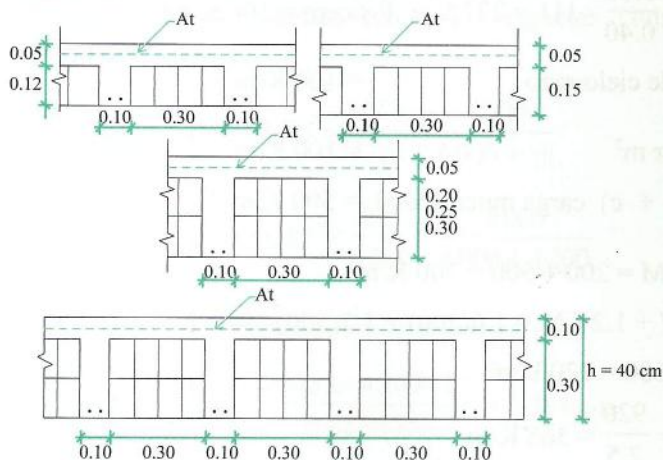
Con base a la sección 9.5.2 (ACI - 2011)



4.5 Diseño de aligerados o losas aligeradas (armadas en una sola dirección)

Estas losas son las que se usan con mayor frecuencia en nuestro medio, especialmente en las edificaciones de casas y edificios de vivienda u oficinas. El diseño de aligerados es similar al de las losas nervadas, y estas a su vez tienen su fundamento en el diseño de vigas “T”, que se estudia con bastante detalle en el capítulo 7. La diferencia fundamental con las losas nervadas es que las losas aligeradas utilizan ladrillos huecos livianos en lugar de las formaletas, que se utilizan en las losas nervadas. Estos ladrillos sirven también para que el acabado de la parte inferior de la losa tenga una superficie plana, y además producen una mejor comportamiento de la losa en aspectos y acústicos.

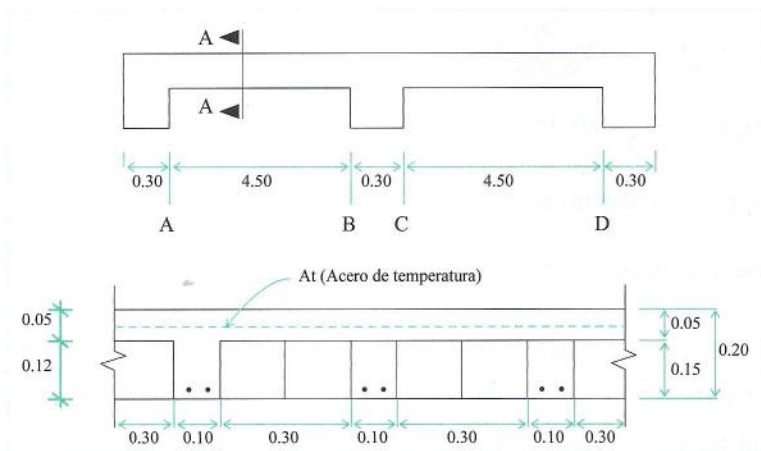
Las dimensiones de los ladrillos de techo serán escogidos en función del espesor de la losa, los mismos que generalmente son de 12 ó 15 cm de altura para aligerados de 17 ó 20 cm de espesor total; considerándose una losa superior de 5 cm de altura, pudiéndose usar ocasionalmente ladrillos de 20 ó 25, para aligerados de 25 ó 30 cm, respectivamente. Las dimensiones en planta de los ladrillos son de 30×30 cm ó 30×25 cm, y las viguetas de 10 cm de ancho.



Ejemplo: Diseñar una losa aligerada para el techo de una vivienda. Para cubrir dos tramos de 4.50 m usaremos concreto de $f'c = 175 \text{ K/cm}^2$, por no haber un control muy estricto en la mezcla $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$

Solución: Dimensionado del aligerado $h = \frac{L}{25} = \frac{450}{25} = 18 \text{ cm}$

Usar $h = 20 \text{ cm}$



1) Cargas:

CV : sobrecargas 200 K/m^2

CM: peso propio por vigueta (concreto + ladrillo)

$$\text{losa} = 0.05 \times 0.40 \times 1.00 \times 2400 = 48$$

$$\text{vigüeta} = 0.10 \times 0.15 \times 1.00 \times 2400 = \frac{36}{84}$$

$$\text{Ladrillo} = \frac{1.00}{30} \times 8 = \frac{27}{111}$$

$$\text{Total por vigüeta} = 111 \text{ kg}$$

$$\text{a) Peso por m}^2: \frac{1.00}{0.40} \times 111 = 277.5 + \text{P. acero} = 300 \text{ K/m}^2$$

$$\text{b) Peso por m}^2 \text{ de cielo raso} = 100 \text{ K/m}^2$$

$$\text{c) Tabiquería por m}^2 = 100 \text{ K/m}^2$$

$$(\text{a} + \text{b} + \text{c}) \text{ carga muerta total} = 500 \text{ K/m}^2$$

$$W = CV + CM = 200 + 500 = 700 \text{ K/m}^2$$

$$W_u = 1.6 CV + 1.2 CM = 1.6(200) + 1.2(500)$$

$$W_u = 320 + 600 = 920 \text{ k/m}^2$$

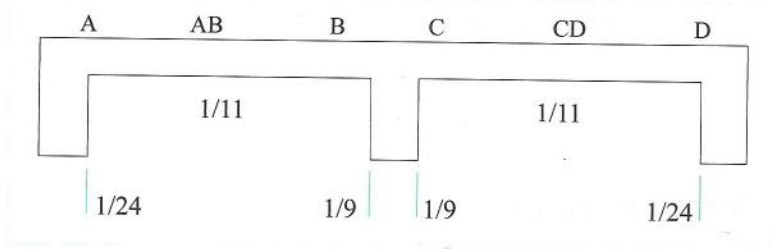
$$W_u/\text{vigüeta} = \frac{920}{2.5} = 368 \text{ K/m}$$

2) Análisis estructural:

Podemos efectuar el análisis estructural por los métodos conocidos, ya sea de aproximación sucesiva o matricial, pudiendo también usar el método del ACI, siempre y cuando cumpla con las condiciones para su uso:

- | | |
|---|--------|
| a) Que existan dos ó más claros contiguos | cumple |
| b) Diferencia entre claros adyacentes $\leq 20\%$ | cumple |
| c) Cargas uniformemente repartidas | cumple |
| d) $CV = 200 < 3 CM = 3 \times 500 = 1500$ | cumple |
| e) Los elementos son prismáticos | cumple |

Al cumplir las usaremos condiciones usaremos el método de los coeficientes del ACI por simplificación:



Momentos negativos (apoyos)

$$M_A = M_D = 1/24 W l_n^2 = 1/24 (368) \times 4.5^2 = 310.5 \text{ K-m}$$

$$M_B = M_C = 1/9 W l_n^2 = 1/9 (368) \times 4.5^2 = 828 \text{ K-m}$$

Momentos positivos (tramos)

$$M_{AB} = M_{CD} = 1/11 W l_n^2 = 1/11 (368) \times 4.5^2 = 677.45 \text{ K-m}$$

3) Cálculo de áreas de acero:

Momento máximo admisible: que puedan tomar las viguetas considerándolas como rectangulares (en los apoyos)

$$\rho_{MAX} = 0.75 \times 0.85 \times \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y}$$

$$\rho_{MAX} = 0.75 \times 0.85^2 \times \frac{175}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$\rho_{MAX} = 0.0133$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.0133 \times 4200 \times 17}{0.85 \times 175} = 6.384 \text{ cm}$$

$$Mu_{(MAX)} = 0.85 \times b \times f'c \times a (d - a/2) = 0.85 \times 10 \times 175 \times 6.384 \left(17 - \frac{6.384}{2}\right)$$

$$Mu_{(MAX)} = 0.85 \times 10 \times 175 \times 6.384 \left(17 - \frac{6.384}{2}\right) = 131\,123.5 \text{ K} \cdot \text{cm} = 1.31 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$Mu = 1.31 \text{ T} \cdot \text{m} > M_A, M_D, M_B, M_C \quad \therefore \text{O.K.}$$

$$\text{Verificar } \rho_{MAX} = 0.18 \frac{f'c}{f_y} \text{ (para no verificar deflexiones)}$$

$$\rho = 0.18 \frac{175}{4200} = 0.00075$$

$$\rho_{MIN} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

$$\rho_{MIN} = 0.0018 \text{ (por agrietamiento y temperatura)}$$

$$As = \frac{Mu}{\phi f_y (d - a/2)} \quad \text{y} \quad a = \frac{As f_y}{0.85 f'c b}$$

$$\left(d - \frac{a}{2}\right) \approx 0.9 d \text{ para 1}^\circ \text{ aproximación}$$

$$\bullet \text{ para } M_A = M_D = 310.5 \text{ K} \cdot \text{m} (-)$$

$$As = \frac{310.5}{0.90 \times 4200 (0.9 \times 17)} = 0.53 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{0.60 \times 4200}{0.85 \times 175 \times 10} = 1.69$$

$$As \approx 0.58 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{usar } 1 \text{ } \emptyset \text{ } 3/8''$$

$$\bullet \text{ para } M_B = M_C = 828 \text{ K} \cdot \text{m} (-)$$

$$As = \frac{828}{0.90 \times 4200 (0.9 \times 17)} = 1.43 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{1.62 \times 4200}{0.85 \times 175 \times 10} = 4.57$$

$$As = 1.70 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{usar } 1 \text{ } \emptyset \text{ } 1/2'' + 1 \text{ } \emptyset \text{ } 3/8''$$

$$\bullet \text{ para } M_{AB} = M_{CD} = 677.45 \text{ K} \cdot \text{m} (+)$$

Verificar si la vigueta trabaja como viga "rectangular" o "T" para $h_f = 5 \text{ cm}$

$$As = \frac{677.45}{0.90 \times 4200 (0.9 \times 17)} = 1.17 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{1.32 \times 4200}{0.85 \times 175 \times 40} = 0.93$$

$a = 0.93 \text{ cm} < hf = 5 \text{ cm} \therefore$ analizar como viga rectangular.

$$A_s = \frac{677.45}{0.90 \times 4200 \left(17 - \frac{0.93}{2} \right)} = 1.08 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{1.08 \times 4200}{0.85 \times 175 \times 40} = 0.76$$

$$A_s = 1.07 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{usar } 2 \text{ } \varnothing 3/8''$$

4) Verificación por corte:

Corte actuante:

$$V_{AB} = V_{DC} = \frac{W l_n}{2} = \frac{368 \times 4.5}{2} = 828 \text{ K}$$

$$V_{BA} = V_{CD} = \frac{1.15 W l_n}{2} = \frac{1.15 \times 368 \times 4.5}{2} = 952.2 \text{ kg}$$

Corte admisible:

$$V_c = \varnothing \times 1.1 \times 0.53 \sqrt{f'_c} \times b_w \times d$$

$$V_c = 0.85 \times 1.1 \times 0.53 \sqrt{175} \times 10 \times 17 = 1114.44 \text{ K}$$

Podríamos comparar el corte actuante a la distancia "d" con el admisible, pero observamos que:

$$V_{U(\text{MAX})} = 952.2 \text{ kg} \quad V_{C(\text{admisible})} = 1114.44 \text{ kg} \quad \text{O.K.}$$

$$V_U < V_{C \text{ Ad}} \therefore \text{O.K.}$$

DISEÑO DE VIGAS CON ACERO EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

5.1 Generalidades

Se necesita diseñar vigas con acero en tracción y compresión, generalmente cuando la altura peralte de viga no es suficiente, para que funcione como se vio en el capítulo 3; de manera que el acero tome la tracción, y el concreto la compresión. Por esta razón, la viga tomará la compresión con la zona de concreto especificada, más un refuerzo de acero diseñado para este fin. Este caso se produce cuando existen limitaciones en el peralte y el ancho de las vigas, y estas tienen luces o sobrecargas relativamente altas.

La utilización de armadura en compresión puede ser usado para reducir la deflexión de las vigas bajo carga de servicio (deformaciones a largo plazo), debido a que cuando el concreto comienza a fluir plásticamente, la fuerza de compresión en la viga tiende a transferirse del concreto al acero; por lo tanto, al disminuirse el esfuerzo en el concreto se reducen las deflexiones por flujo plástico. También podrán disminuirse las deflexiones inmediatas haciendo uso de acero en compresión.

El acero en compresión en las vigas podrá utilizarse también para aumentar la ductibilidad en la resistencia a flexión, debido a que cuando hay acero en compresión en una sección, la profundidad del eje neutro es menor, porque la compresión será compartida por el acero y el concreto, luego la curvatura última (ϵ_c/c) de la sección, con acero en compresión será mayor.

Al analizar las combinaciones de carga posibles, y cuando intervienen en estas el sismo o el viento vemos que el momento puede cambiar de signo; por tanto, requieren refuerzo en ambas zonas (superior e inferior) de la sección. Conservadoramente hablando, no es conveniente considerar el acero superior como refuerzo a compresión. Sin embargo, puede ser evaluado en caso de ser requerido.

Por último, el acero superior es usado también para satisfacer los requerimientos de momentos mínimos o para sujeción de los estribos.

5.2 Análisis

De una sección con refuerzo a tracción y compresión

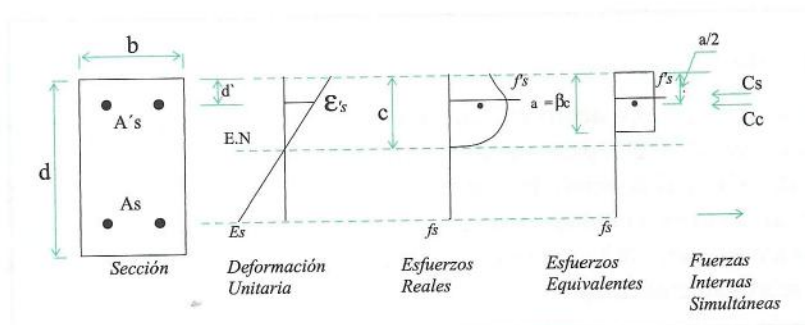
- a) Se observa una sección de viga doblemente reforzada cuando se alcanza la resistencia a flexión.
- b) Inicialmente no se sabe si para el momento de diseño, el acero, tanto a tracción como a compresión, está o no en la resistencia a cedencia.
- c) Para analizar simplíficamente es conveniente asumir que todo el acero está en cedencia.
- d) Modificar los cálculos si se verifica que parte o todo el acero no está en cedencia.

e) Si todo el acero está en cedencia $\epsilon'_s = f'_s = f_y$ donde:

ϵ'_s = esfuerzo en el acero a tracción

f'_s = esfuerzo en el acero a compresión

f_y = resistencia a cedencia del acero



Sección de concreto doblemente armada a flexión:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Compresión en el concreto} \quad C_c = 0.85 f'_c a b \\ \text{Compresión en el acero} \quad C_s = A'_s f_y \\ \text{Tracción en el acero} \quad T = A_s f_y \end{array} \right\} C = C_c + C_s$$

A_s = área de acero a tracción.

A'_s = área de acero a compresión.

• Por equilibrio se tiene:

$$C = C_c + C_s = T$$

Reemplazando:

$$0.85 f'_c a b + A'_s f_y = A_s f_y \Rightarrow a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$

- Del diagrama de deformaciones.
- Ver si el acero está cediendo.
- El acero está en cedencia si $\Rightarrow E > f_y / \epsilon_s$

Luego:

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \quad \text{I}$$

$$\epsilon_s = 0.003 \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \quad \text{II}$$

$$f'_s = f_y \Rightarrow si \Rightarrow 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \geq \frac{f_y}{E_s} \quad \text{III}$$

$$f_s = f_y \Rightarrow si \Rightarrow 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} \geq \frac{f_y}{E_s} \quad \text{IV}$$

- Como se asume todo el acero está en cedencia.
- Tomando momentos respecto al “As”.
- El Mu será:

$$Mu = 0.85 f'c a b (d - a/2) + A's fy (d - d') \quad V$$

Sabiendo que

$$a = \frac{(As - A's) fy}{0.85 f'c b} \quad VI$$

Cuando las ecuaciones III y IV no cumplen la relación que se indica, el acero no está cediendo; y, lógicamente, la ecuación para “a” cambiará de esta manera:

$$a = \frac{As fs - A'sy f's}{0.85 f'c b} \quad VII$$

Luego del diagrama de deformaciones tenemos:

$$f's = \epsilon'_s \times Es = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} Es \quad VIII$$

$$fs = \epsilon_s \times Es = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} Es \quad IX$$

Tenemos:

$$Mu = 0.85 f'c a b (d - a/2) + A's f's (d - d') \quad X$$

En conclusión: El momento resistente de diseño “Mu” para una viga con acero superior e inferior (doblemente reforzada).

5.3 Cedencia total del acero

$$Mu = \phi \left[0.85 f'c a b \left(d - \frac{a}{2} \right) + A's \times fy (d - d') \right] \quad XI$$

Donde:

$$a = \frac{(As - A's) fy}{0.85 f'c b} \quad XII$$

Para el equilibrio $0.85 f'c a b = (As - A's) fy$ se tiene:

$$Mu = \phi \left[(As - A's) fy \left(d - \frac{a}{2} \right) + A's \times fy (d - d') \right] \quad XIII$$

Para que el acero a compresión fluya de Fig. 5 - 1

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \geq \frac{fy}{Es} \quad IX$$

se necesita que

$$a \geq \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s - f_y} \times \beta_1 d' \quad \text{XV}$$

para que el acero este cediendo: (Ec. XII = Ec. XV)

$$\frac{(A_s - A's) f_y}{0.85 f'_c b} \geq \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s - f_y} \beta_1 d'$$

haciendo: $\rho = \frac{A_s}{bd}$ $\rho' = \frac{A's}{bd}$

$$\rho - \rho' \geq \frac{0.85 f'_c \beta_1 d'}{f_y d} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s - f_y} \quad \text{XVI}$$

5.4 Acero a comprensión no cede

Luego:

$$f's = E's E_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s \quad \text{XVII}$$

$$\rho_{\text{MIN}} = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{d'}{d} \times \frac{6000}{6000 - f_y} + \rho'$$

Donde:

$$Mu = \phi \left[0.85 f'_c a b \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_s \times f's (d - d') \right] \quad \text{XVIII}$$

$$a = \frac{A_s f_y - A's f's}{0.85 f'_c b} \quad \text{XIX}$$

Reemplazando XIX en XVIII

$$Mu = \phi \left[(A_s f_y - A's f's) \left(d - \frac{a}{2} \right) + A's f's (d - d') \right]$$

5.5 Falla balanceada

Para este caso:

- El acero a tracción cede para evitar una falla frágil.
- El concreto alcanza simultáneamente una deformación a compresión de su fibra extrema de 0.003
- De los triángulos semejantes de la Fig. 5 - 1, se tiene:

$$\epsilon_s = 0.003 \frac{d - C_b}{C_b} = 0.003 \frac{\beta_1 d - a_b}{a_b} = \frac{f_y}{E_s}$$

$$a_b = \frac{0.003 E_s}{0.3 E_s + f_y} \beta_1 \times d \quad \text{XX}$$

Por equilibrio: $0.85 f'_c ab = b = A_s f_y - A'_s f'_s$

Haciendo:

$$\rho_b = \frac{A_s}{bd} \quad \rho = \frac{A'_s}{bd}$$

$$ab' = \frac{(\rho_b f_y - \rho' f'_s)d}{0.85 f'_c} \quad \text{XXI}$$

Sustituir $ab = a$ de la Ec. XX en la Ec. XVII

Considerar el menor valor entre f'_s ó f_y

$$f'_s = 0.003 E_s \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a_b} \right)$$

$$f'_s = 0.003 E_s \left(1 - \frac{d'}{d} \frac{(0.003 E_s - f_y)}{0.003 E_s} \right) \quad \text{XXII}$$

Comparar f'_s con f_y escoger al menor:

- Igualando Ec XX y Ec XXI se obtiene:

$$\rho_b = \underbrace{\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y}}_{\rho_b \text{ Viga de acero a tracción solamente}} + \underbrace{\frac{\rho' f'_s}{f_y}}_{\rho' \text{ Debido al acero a compresión}}$$

- Para evitar falla frágil o violenta se hará:

$$\rho_{MAX} = 0.75 \left(\rho_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y} \right)$$

si $f'_s = f_y$

$$\rho_{MAX} = 0.75 (\rho_b + \rho')$$

$$\rho_{MAX} = \rho_{MAX} \leq 0.75 \left(\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \right) \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} + \frac{\rho' f'_s}{f_y}$$

$$\rho = 0.75 \left(\frac{0.85 \times 210 \times 0.85}{2800} \right) \times \left(\frac{0.003 \times 2 \times 106}{0.003 \times 2 \times 106 + 2800} \right)$$

$$\rho = 0.0277 + 0.75 \rho' \text{ o también}$$

Ejemplo N° 1

Calcular la resistencia a flexión de la siguiente sección rectangular:

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

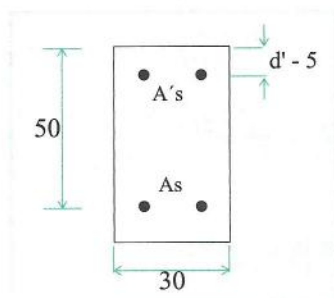
$$f_y = 2800 \text{ K/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$A'_s = 6.5 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 26 \text{ cm}^2$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

**Solución:**

1) Suponemos que todo el acero está cediendo:

$$C_c = 0.85 f'_c a \cdot b = 0.85 \times 210 \times a \times 30 = 5355 a \text{ K}$$

$$C_s = A'_s f_y = 6.5 \times 2800 = 18200 \text{ K}$$

$$T = A_s f_y = 26 \times 2800 = 72800 \text{ K}$$

$$T = C_c + C_s \Rightarrow 72800 = 5355a + 18200$$

$$a = \frac{72800 - 18200}{5355} = 10.20 \text{ cm}$$

$$\text{como } \beta_1 = 0.85 \quad c = a/\beta_1 = \frac{10.20}{0.85} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{La deformación de cedencia es } f_y/E_s = \frac{2800}{2 \times 10^6} = 0.0014$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{12 - 5}{12} = 0.00175 > \frac{f_y}{E_s} = 0.0014$$

$$\therefore f'_s = f_y$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{50 - 12}{12} = 0.0095 > \frac{f_y}{E_s} = 0.0014$$

$$\therefore f'_s = f_y$$

Puede verse que todo el acero cede o fluye tal como se ha supuesto.

Luego:

$$M_u = C_c (d - 0.5 a) + C_s (d - d')$$

$$M_u = 5355 \times 10.2 (50 - 5.1) + 18200 (50 - 5)$$

$$M_u = 3271482.9 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

Ejemplo N° 2

Calcular las áreas de acero requeridos para una sección rectangular.

- a) para $\rho - \rho' = 0.5 \rho_b$
 b) para un "A's" mínimo

Datos:

$$MCV = 22 \text{ T} \cdot \text{m}$$

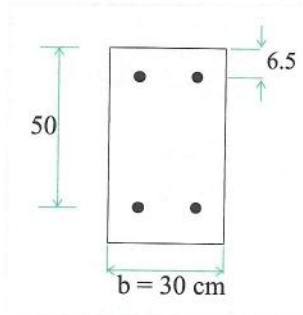
$$MCM = 17 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$f_y = 2800 \text{ K/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ K/cm}^2$$

$$d = 50 \text{ cm} \quad d' = 6.5 \text{ cm}$$

**Solución:**

- a) para $\rho - \rho' = 0.5 \rho_b$

$$1) M_u = 1.4 \text{ CM} + 1.7 \text{ (CV)}$$

$$M_u = 1.4 (17) + 1.7 (22) = 61.2 \text{ T} \cdot \text{m}$$

- 2) $\rho - \rho' = 0.5 \rho_b$ (sección simplemente reforzada)

$$\rho - \rho' = 0.5 \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y}$$

$$\rho - \rho' = \frac{0.5 \cdot 0.85 \times 210 \times 0.85}{2800} \times \frac{0.003 \times 2 \times 10^6}{0.003 \times 2 \times 10^6 + 2800}$$

$$\rho - \rho' = 0.0185$$

$$A_s - A's = (\rho - \rho') b d = 0.0185 \times 30 \times 50 = 27.75 \text{ cm}^2$$

- 3) Suponer a todo el acero cede:

$$a = \frac{(A_s - A's)}{0.85 f'_c b} f_y \times \frac{27.75 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 30} = 14.51$$

$$M_u = \phi \left[(A_s - A's) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A's f_y (d - d') \right]$$

$$6120000 = 0.9 [27.75 \times 2800 (50 - 7.26) + A's \times 2800 (50 - 6.5)]$$

$$A's = 28.56 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 27.75 + 28.56 = 56.31 \text{ cm}^2$$

$$E's = 0.003 \frac{c-d'}{c} = 0.003 \frac{17.07-6.5}{17.07} = 0.00186$$

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{2800}{2 \times 10^6} = 0.0014 \Rightarrow \text{El acero en compresión está cediendo luego } f's = f_y \text{ como suponíamos}$$

$$\rho = \frac{56.31}{30 \times 50} = 0.0375$$

$$\rho' = \frac{28.56}{30 \times 50} = 0.019$$

4) Verificar la cuantía de acero:

$$\rho = 0.75 \left(\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \times \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} + \frac{\rho' \times f's}{f_y} \right)$$

$$\rho = 0.75 \left(\frac{0.85 \times 2100.85}{2800} \times \frac{0.003 \times 2 \times 10^6}{0.003 \times 2 \times 10^6 + 2800} + \frac{0.019 \times 2800}{2800} \right)$$

$$\rho = 0.042 > 0.0375 \text{ O.K.}$$

b) Para un "A's" MINIMO

1) Para una máxima resistencia a compresión del concreto y el acero a compresión cediendo:

Donde $f's$ se da en la Ec. XXII, o se usa f_y el que sea menor, para asegurar que fluya el acero a tracción para que la falla sea dúctil y no frágil.

$$A_s = (0.0277 \times 30 \times 50) + 0.75 A's$$

$$A_s = 41.55 + 0.75 A's$$

Sustituyendo "A's" en la siguiente ecuación:

$$a = \frac{(A_s - A's) f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$a = \frac{(41.55 + 0.75 A's - A's) 2800}{0.85 \times 210 \times 30} = 21.73 - 0.131 A's$$

Reemplazar "A's" y "a" en la ecuación:

$$M_u = \phi \left[(A_s - A's) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A's f_y (d - d') \right]$$

- Se obtiene una ecuación de 2° grado para "A's"
- Sustituyendo "A's" en la ecuación para "As" Se encuentra "As"
- Para verificar si "A's" está cediendo sustituir "A's" en la ecuación para "a"

Luego $c = a/\beta_1$

- Por triángulos semejantes en el diagrama de deformación.

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c}$$

- Además f_y/E_s
- Verificar si $f'_s = f_y$ como se supuso si cumple el acero "As" fluye

4) Verificar el esfuerzo en el acero a compresión:

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{14.51}{0.85} = 17.07 \text{ cm}$$

del diagrama de deformaciones Fig. 5 - 1.

Ejemplo N° 3

Calcular el momento último en la viga:

1) Cuando el acero en compresión llega a la fluencia al momento de producirse la falla.

$M_u = ?$

$A's = 2 \text{ } \varnothing 1 \frac{1}{8}"$

$As = 6 \text{ } \varnothing 1 \frac{1}{4}"$

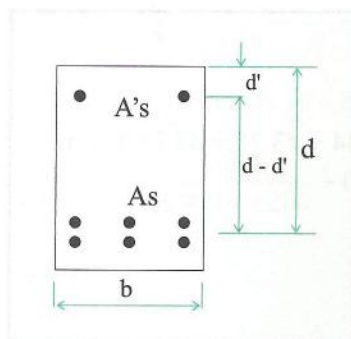
$b = 30 \text{ cm}$

$d = 45 \text{ cm}$

$d' = 7 \text{ cm}$

$f_y = 3500 \text{ K/cm}^2$

$f'_c = 350 \text{ K/cm}^2$



Solución:

$$\text{Para } As = 6 \times 8.19 = 49.14 \text{ cm}^2 \Rightarrow \rho = \frac{49.14}{30 \times 45} = 0.0364$$

$$\text{Para } A's = 2 \times 6.45 = 12.9 \text{ cm}^2 \Rightarrow \rho' = \frac{12.9}{30 \times 45} = 0.0090$$

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.85 \times 0.80 \times \frac{350}{3500} \times \frac{6000}{6000 + 3500}$$

$$\rho = 0.0429$$

$$\rho_{MAX} = 0.75 \rho_b = 0.75 \times 0.0429 = 0.0322$$

$$\rho = 0.0364 > \rho_{MAX} = 0.0322 \quad \therefore \text{usar acero en compresión}$$

Primero verificaremos los límites:

$$\rho_{MAX} = 0.75 (\rho_b + \rho') = 0.75 \times (0.0429 + 0.0096)$$

$$\rho_{MAX} = 0.0394$$

$$\rho_{MIN} = 0.85 \times 0.80 \times \frac{350}{3500} \times \frac{7}{45} \times \frac{6000}{6000 - 3500} + 0.0096$$

$$\rho_{MIN} = 0.03499$$

Debido a que $\rho_{MIN} < \rho < \rho_{MAX}$, la falla empezará por fluencia en tracción y el acero en compresión fluirá en la falla.

Luego:

$$M1 = \phi A's f_y (d - d') = 0.9 \times 12.9 \times 3500 (45 - 7) = 1\,544\,130 \text{ k-cm}$$

$$M1 = 15.44 \text{ T - m}$$

$$M2 = \phi (A_s - A's) f_y (d - a/2) = 0.9 (49.14 - 12.9) 3500 (45 - a/2)$$

$$a = \frac{(A_s - A's) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{(49.14 - 12.9) \times 3500}{0.85 \times 350 \times 30} = 14.21 \text{ cm}$$

$$M2 = 43.27 \text{ T - m}$$

$$M2 = M1 + M2 = 15.44 + 43.27 = 58.71 \text{ T - m}$$

$$Mu = 58.71 \text{ T - m}$$

Ejemplo N° 4

Cuando el acero en compresión no alcanza la fluencia en el momento de la falla.

$$Mu = ?$$

$$A_s = 8 \text{ } \phi 1'' = 40.8 \text{ cm}^2$$

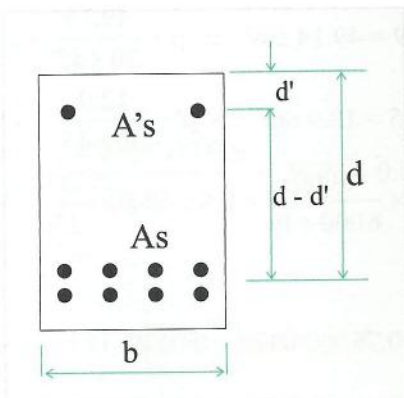
$$A's = 2 \text{ } \phi 1 \frac{1}{8}'' = 12.9 \text{ cm}^2$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$f'_c = 350 \text{ k/cm}^2$$



Solución:para $A_s = 40.8 \text{ cm}^2$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{40.8}{30 \times 50} = 0.0272$$

$$\text{para } A'_s = 12.9 \text{ cm}^2 \quad \rho' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{12.9}{30 \times 50} = 0.0086$$

Cuantía balanceada para As:

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 f'_c \times \frac{6000}{f_y 6000 + f_y} = 0.85 \times 0.80 \times \frac{350}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$\rho_b = 0.0333$$

$$\rho_{MAX} = 0.75 \rho_b = 0.75 \times 0.0333 = 0.025$$

Comparamos:

$$\rho_{MAX} = 0.025 < \rho = 0.0272$$

$\therefore$ se analiza como viga reforzada a tracción y compresión

Calcular límites ρ_{MIN} y ρ_{MAX} :

$$\rho_{MIN} = 0.85 \times \beta_1 \times \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{d'}{d} \times \frac{6000}{6000 - f_y} + \rho$$

$$Mu = 0.85 f'_c a b (d - a/2) + A'_s f_y (d - d')$$

V

$$\rho_{MIN} = 0.85 \times 0.80 \times \frac{350}{4200} \times \frac{7}{50} \times \frac{6000}{6000 - 4200} + 0.0086 = 0.035$$

$$\rho_{MAX} = 0.75 \left(\rho_b + \rho_1 \frac{f'_s}{f_y} \right)$$

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = \left[\epsilon_u - \frac{d'}{d} (\epsilon_u + \epsilon_y) \right] \leq f_y; \quad \epsilon_y = \frac{f}{E_s}$$

$$f'_s = 2 \times 10^6 \left[0.003 - \frac{7}{50} \left(0.003 + \frac{4200}{2 \times 10^6} \right) \right] = 4572$$

Usar 4200 K/cm^2

$$\rho_{MAX} = 0.75 \left(0.0272 + 0.0086 \frac{4200}{4200} \right) = 0.0314$$

$$\text{Comparando } \begin{cases} \rho < \rho_{MIN} \Rightarrow 0.0272 < 0.035 \\ \rho < \rho_{MAX} \Rightarrow 0.0272 < 0.0314 \end{cases}$$

Luego: $f's$ se pone en función de C desconocida:

$$f's = \epsilon_u \times E_s \times \frac{(c-d')}{c} \quad \text{ó} \quad f's = \frac{0.003 \times 2 \times 10^6 (c-7)}{c}$$

Despejando C de la siguiente igualdad:

$$A_s f_y = 0.85 f'c \times \beta_1 \times c \times b + A's \epsilon_u / c (c-d) E_s$$

$$40.8 \times 4200 = 0.85 \times 350 \times 0.80 \times C \times 30 + 12.9 \times \frac{0.003}{c} (c-7) \times 2 \times 10^6$$

$$7.140 C^2 - 93.96 C - 541.8 = 0$$

$$C = 17.50 \text{ cm}$$

$$f's = \frac{0.003 \times 2 \times 10^6 \times (17.50 - 7)}{17.50} = 3600 \text{ K/cm}^2$$

$$a = \beta_1 \times C = 0.80 \times 17.50 = 14 \text{ cm}$$

$$M_u = [0.85 f'c a b (d - a/2) + A's f's (d - d')] \quad \emptyset$$

$$M_u = 0.9 [0.85 \times 350 \times 14 \times 30 (50 - 14/2) + 12.9 \times 3600 (50 - 7)]$$

$$M_u = 6632793 \text{ K} \cdot \text{cm} = 66.33 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_u = 66.33 \text{ T} \cdot \text{m}$$

Ejemplo N° 5

Cálculo del área de acero para un momento dado.

$$A_s = ?$$

$$A's = ?$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$M_u = 30 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$d = 45 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$d' = 4 \text{ cm}$$

$$f'c = 210 \text{ K/cm}^2$$

Hallar M_{MAX} que puede tomar esta viga con acero en tracción solamente

Solución:

$$\text{Encontrar: } \rho_b \Rightarrow \rho_{MAX} = 0.75 \rho_b$$

$$0.85 \beta_1 \frac{f'c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.85 \times 0.85 \times \frac{210}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$\rho_b = 0.02125 \quad \rho_{MAX} = 0.02125 \times 0.75 = 0.01594$$

$$A_s = \rho_{MAX} \times b \times d = 0.01594 \times 25 \times 45 = 17.93 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'c b} = \frac{17.93 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25} = 16.88 \text{ cm}$$

$$M_{MAX} = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) = 0.9 \times 17.93 \times 4200 \left[45 - \left(\frac{16.88}{2} \right) \right]$$

$$M_{MAX} = 2477868.5 \text{ T} \cdot \text{cm} = 24.78 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_u = 30 \text{ T} \cdot \text{m} > M_{MAX} = 24.78 \text{ T} \cdot \text{m} \quad \therefore \text{usar acero en compresión}$$

Por lo tanto sabemos que $M_u = M_1 + M_2$; $M_2 = M_{MAX}$

$$\therefore M_1 = M_u - M_2 = 30 - 24.78 = 5.22 \text{ T} \cdot \text{m}$$

$$M_1 = \phi A_{s1} f_y (d - d')$$

$$A_{s1} = \frac{M_1}{\phi f_y (d - d')} = \frac{522000}{0.9 \times 4200 (45 - 4)} = 3.37 \text{ cm}^2$$

(A_{s1}) es el área de acero adicional requerida por la viga de iguales dimensiones con acero en tracción solamente.

Además, (A_{s1}) es también el área de acero necesaria en compresión, y se incrementará de acuerdo a las normas.

$$\rho_{MAX} = 0.75 (\rho_b + \rho'); \quad \underbrace{\rho_{MAX} bd}_{A_s} = \underbrace{0.75 \rho_b b \times d}_{A_{sb}} + \underbrace{0.75 \rho' d \times d}_{A_{s1} \times 0.75}$$

$$A_s = 3.37 = 4.49 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{usar } 2 \text{ } \emptyset \frac{3}{4}'' = 5.68 \text{ cm}^2$$

Área de acero total en tracción:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 3.37 + 17.93 = 21.30 \text{ cm}^2$$

Verificar que el acero en compresión fluya en rotura de acuerdo al criterio supuesto.

$$\rho' = \frac{A'_{s1}}{bd} = \frac{4.49}{25} \times 45 = 0.004$$

$$\rho_{MIN} = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{d'}{d} \times \frac{6000}{6000 - f_y} + \rho'$$

$$\rho_{MIN} = 0.85 \times 0.85 \times \frac{210}{4200} \times \frac{4}{45} \times \frac{6000}{6000 - 4200} + 0.004$$

$$\bar{\rho}_{MIN} = 0.011 + 0.004 = 0.015$$

$$\bar{\rho}_{MIN} = \frac{A_s}{bd} = \frac{21.30}{25 \times 45} = 0.019$$

$$\bar{\rho}_{MIN} = 0.015 < \bar{\rho} = 0.019 \quad \therefore \text{Cumple}$$

DISEÑO DE VIGAS “T”

6.1 Generalidades

El procedimiento constructivo de los techos hace que el sistema de losa - viga sea un sistema monolítico, debido a que el encofrado del sistema tiene los fondos de losas y vigas, más los verticales de las vigas continuos. Y los estribos de las vigas que pasan hasta la losa colaborarán aún más en el comportamiento monolítico de estos elementos.

De esta manera es que se presenta este caso del diseño de vigas “T”, para lo cual el reglamento ACI – 2008 nos da las siguientes recomendaciones:

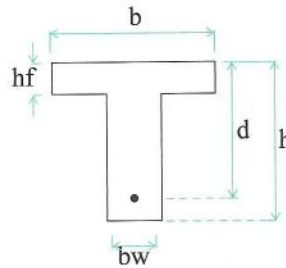
- 1) Para considerarse como vigas “T”, el patín que es la losa superior y el alma de la viga, deben ser contruidos monolíticamente o estar unidas entre sí en forma probada y efectiva.
- 2) El ancho efectivo de la losa usada como patín en las vigas “T” no debe exceder de $\frac{1}{4}$ de la longitud del claro de la viga.
 - El ancho efectivo de la losa en voladizo a cada lado del alma no debe exceder de:
 - a) 8 veces el peralte de la losa
 - b) $\frac{1}{2}$ de la distancia libre a la siguiente viga.
 - Para vigas que tengan losa en un solo lado, el ancho efectivo del patín no excederá de:
 - a) $\frac{1}{12}$ de la longitud del claro de la viga.
 - b) 6 veces el peralte de la losa
 - c) $\frac{1}{2}$ de la distancia libre a la siguiente alma.
 - En vigas aisladas en las que solamente se utilice la forma “T” para proporcionar con el ala un área adicional de compresión, el patín será un área adicional de compresión, el ala tendrá un peralte no menor de $\frac{1}{2}$ del ancho del alma, y un ancho afectivo no mayor de 4 veces el ancho del alma.
 - Cuando el refuerzo principal por flexión en una losa se considera como patín de una viga “T” (excluyendo las nervaduras), sea paralelo a la viga, debe proporcionarse refuerzo perpendicular a la viga en la parte superior de la losa, de acuerdo con lo siguiente:
 - a) El refuerzo transversal debe diseñarse para resistir la carga factorizada que actúa sobre la porción considerada como patín, suponiendo que trabaja como voladizo. Para vigas aisladas debe considerarse el ancho total del patín.
Para otros tipos de vigas “T” sólo es necesario considerar el ancho efectivo del patín.
 - b) El espaciamiento del refuerzo transversal no debe exceder de cinco veces el peralte de la losas, ni de 45 cm.

6.2 Interpretación de la recomendaciones del ACI-2011 para vigas "T" (con acero en tracción solamente)

a) Vigas:

$$hf \geq \frac{bw}{2}$$

$$b \leq 4 bw$$

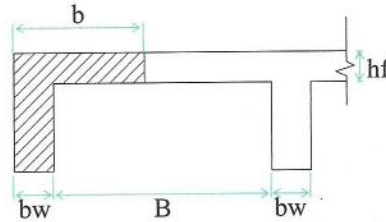


b) Viga con ala a un solo lado:

$$b - bw \leq \frac{L}{12}$$

$$b - bw \leq \frac{B}{2}$$

$$b - bw \leq 6 hf$$



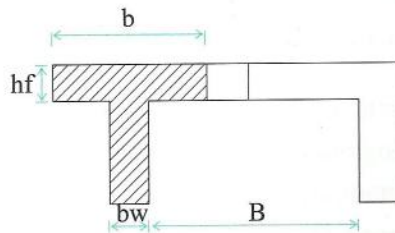
c) Viga simétrica:

$$b \leq \frac{L}{4}$$

$$b - bw \leq B$$

$$b - bw \leq 16 hf$$

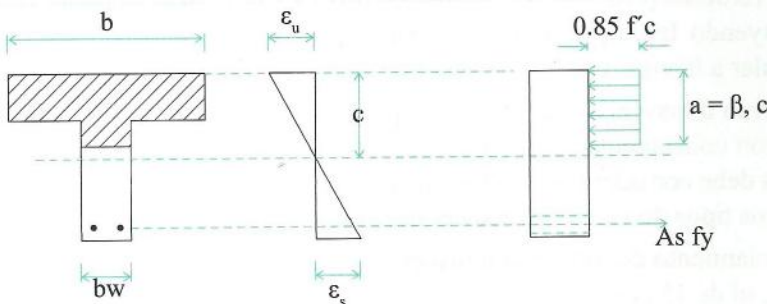
$$L = \text{Luz Libre}$$

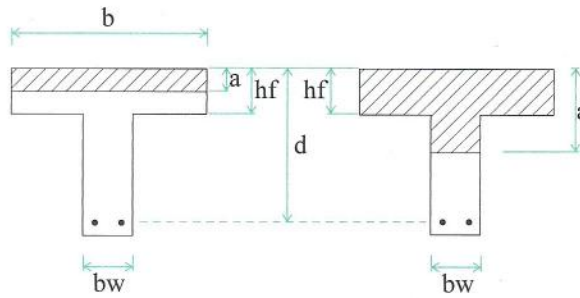


Nota: En todos los casos usar el menor valor "b"

6.3 Diseño de vigas "T"

De acuerdo a la ubicación del eje neutro, pueden diseñarse de las dos siguientes formas:





Caso (1)

$$a \leq hf$$

se diseña como viga rectangular
de ancho "b"

$$a = \frac{As \times fy}{0.85 f'c \times b}$$

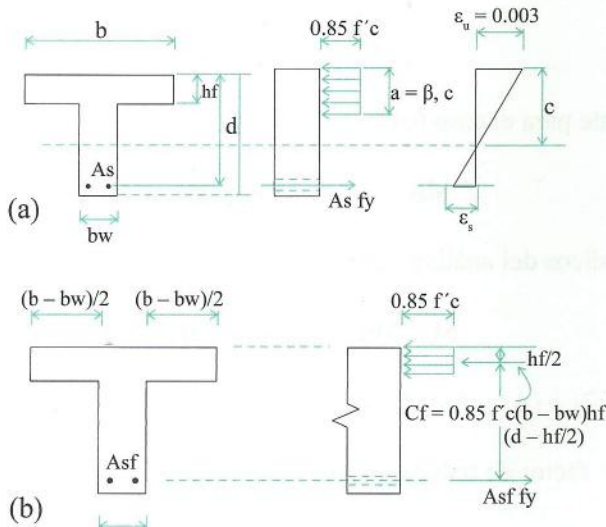
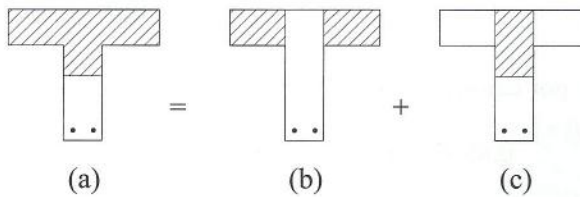
Caso (2)

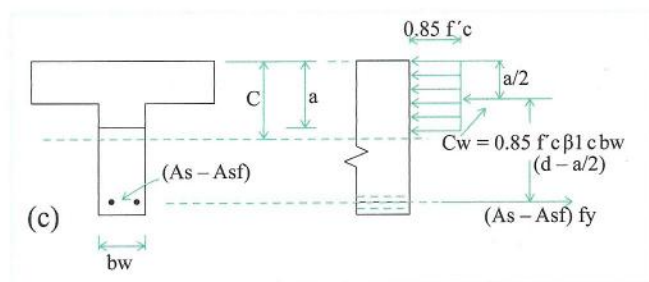
$$a > hf$$

se diseña como viga "T"

$$C = \frac{As \times fy}{0.85 f'c \times b \times \beta_1} a = \beta_1 c$$

6.4 Análisis de vigas "T"





Análisis hecho para el estado de falla o rotura. Se muestran los diagramas de esfuerzo y deformación.

De la Fig. (b):

$C_f = A_s f_y$ por equilibrio reemplazando

$$f'c (b - bw) / hf = A_s f_y$$

$$A_s f_y = \frac{0.85 f'c (b - bw) / hf}{f_y}$$

Luego el momento resistente en el caso (b) será:

$$M(b) = A_s f_y (d - hf/2)$$

De la Fig. (c):

$C_w = (A_s - A_{sf}) f_y \Rightarrow$ por equilibrio; reemplazando

$$0.85 f'c \times \underbrace{\beta_1 \times c \times bw}_a = (A_s - A_{sf}) f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0.85 \times f'c \times bw}$$

El momento resistente para el caso (c) será:

$$M(c) = (A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2)$$

De acuerdo a los gráficos del análisis sabemos:

$$M = M(b) + M(c)$$

M = Momento resistente total

$$M = A_s f_y (d - hf/2) + (A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2)$$

$\mu_u = \phi M \Rightarrow \phi$ = factor de reducción ACI

$$\mu_u = \phi (A_s f_y (d - hf/2) + (A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2))$$

Similarmente a las vigas rectangulares, debe limitarse la cuantía para que la falla se inicie por fluencia del acero: luego E_y del acero se producirá antes que E_u del concreto, para lo cual partiremos primero de la falla balanceada $\therefore E_y$ con E_u se producirán simultáneamente.

$$\frac{C}{d} = \frac{E_u}{E_u + E_y}$$

de la Fig. (c); igualando fuerzas por equilibrio:

$$A_s f_y = 0.85 \beta_1 \times f'_c \times b_w \times C + 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$A_s f_y = 0.85 \beta_1 \times f'_c \times b_w \times C + A_s f \times f_y$$

Sabemos que:

$$\rho_w = \frac{A_s}{0.85 b_w \times d} \quad \rho_f = \frac{A_s f}{b_w \times d}$$

Luego:

$$\rho_{wb} = 0.85 \beta_1 \times \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{E_u}{E_u + E_y} + \rho_f$$

$$\rho_w \text{ MAX} = 0.75(\rho_b + \rho_f)$$

Si igualamos:

$$T = T_w + T_f$$

$$\rho_b \times b \times d \times f_y = \rho_b \times b_w \times d \times f_y + \rho_f \times b_w \times d \times f_y$$

$$\text{Dividiendo entre } b \times d \times f_y \Rightarrow \rho_b = \frac{b_w}{b} (\rho_b + \rho_f)$$

$$\rho_b = \rho_b \text{ (en vigas rectangulares)}$$

6.5 Ejemplos

Ejemplo N° 1

Encontrar el máximo momento que pueda soportar la siguiente viga "T" aislada:

$$B = 70 \text{ cm}$$

$$hf = 15 \text{ cm}$$

$$bw = 25 \text{ cm}$$

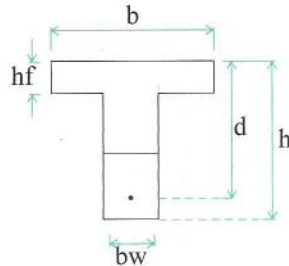
$$h = 75 \text{ cm}$$

$$d = 65 \text{ cm}$$

$$f'c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$fy = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$As = 6 \text{ } \varnothing 1 \frac{1}{4}'' = 49.14 \text{ cm}^2$$



Solución:

a) Verificar la dimensión del ala:

$$hf \geq \frac{bw}{2} \quad hf = 15 \text{ cm} \quad \frac{bw}{2} = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ cm} \quad \therefore \text{bien}$$

$$b \leq 4 bw \quad b = 70 \text{ cm} \quad 4 bw = 4(25) = 100 \text{ cm}$$

b) Encontrar la ubicación del eje neutro

$$\rho = \frac{As}{bd} = \frac{49.14}{70 \times 65} = 0.0108$$

$$a = \frac{\rho \times fy \times d}{0.85 f'c} = \frac{0.0108 \times 4200 \times 65}{0.85 \times 210} = 16.25 > hf$$

Analizar como viga "T"

$$Asf = \frac{0.85 f'c (b - bw) hf}{fy} = \frac{0.85 \times 210 (70 - 25) 15}{4200} = 28.68 \text{ cm}^2$$

$$As - Asf = 49.14 - 28.68 = 20.46 \text{ cm}^2$$

Luego tenemos las siguientes cuantías:

$$\rho_w = 49.14 / 25 \times 65 = 0.0213$$

$$\rho_f = 28.68 / 25 \times 65 = 0.0176$$

Encontramos la cuantía balanceada

$$\rho_b = \frac{\beta_1 - 0.85 \times f'c}{fy} \times \frac{6000}{6000 + fy} = 0.0213$$

$$\rho_w \text{ MAX} = 0.75 (\rho_b + \rho_f) = 0.75 (0.0213 + 0.0176)$$

$$\rho_w \text{ MAX} = 0.0292$$

$$\rho_w \text{ MAX} = 0.0292 < \rho_w = 0.0302 \quad \therefore \text{habrá falla dúctil}$$

$$A_s \text{ MAX} = \rho \text{ MAX } b_w d = 0.0292 \times 25 \times 65 = 47.93 \text{ cm}^2$$

Encontrando momentos para $M = M(b) + M(c)$

$$M(b) = A_{sf} \times f_y (d - hf/2) = 28.68 \times 4200(65 - 15/2) = 6926220 \text{ K-cm}$$

Encontrar $M(c)$

$$a = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0.85 f'_c \times b_w} = \frac{(47.93 - 28.68)}{0.85 \times 210 \times 25} = 18.12$$

$$M(c) = (A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2) = 19.25 \times 4200 \left(65 - \frac{18.12}{2} \right)$$

$$M(c) = 4522749 \text{ K-cm}$$

$$M_T = M(b) + M(c) = 114.49$$

$$M_u = 0.9 M_T = 0.9 \times 114.49 = 103.04 \text{ T-m } \phi = 0.9$$

Ejemplo N° 2

Encontrar área de acero

$$A_s = ?$$

$$hf = 7.5 \text{ cm}$$

$$b_w = 27 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

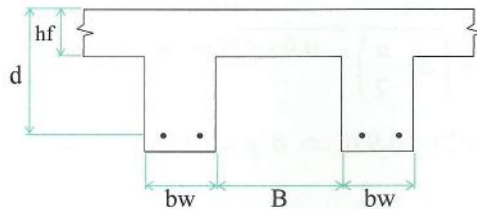
$$M_u = 70 \text{ T-m}$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$L = 7.0 \text{ m}$$

$$B = 90 \text{ cm}$$



a) Encontrar el ancho efectivo del ala

$$b = 16 hf + b_w = 16 (7.5) + 27 = 147 \text{ cm}$$

$$b = \frac{L}{4} = \frac{700}{4} = 175 \text{ cm}$$

$$b = B + b_w = 90 + 27 = 117 \text{ cm}$$

Se escoge el menor $b = 117 \text{ cm}$

b) Asumiendo $a = hf$ para un primer tanteo

$$A_s = \frac{Mu}{\phi f_y (d - a/2)} = \frac{7000000}{0.9 \times 4200 \left(50 - \frac{75}{2}\right)}$$

$$A_s = 40.04 \text{ cm}^2$$

$$\rho' = \frac{40.04}{117 \times 50} = 0.00685$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.00685 \times 4200 \times 50}{0.85 \times 210} = 8.06 \text{ cm}$$

c) $hf = 7.5 < a = 8.06$ analizar como viga "T"

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b_w) hf}{f_y} = \frac{0.85 \times 210 (117 - 27) 7.5}{4200}$$

$$A_{sf} = 28.69 \text{ cm}^2$$

$$M_T = M(b) + M(c)$$

$$M(b) = \phi A_{sf} \times f_y (d - hf/2) = 0.90 \times 28.69 \times 4200 (50 - 7.5/2)$$

$$M(b) = 5015729 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

$$M(c) = M_T - M(b) = 7000000 - 5015729 = 1984271 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

$$(A_s - A_{sf}) = \frac{M(c)}{\phi f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)} = \frac{1984271}{0.9 \times 4200 (50 - 10/2)} = 11.66 \text{ cm}^2$$

$$\text{asumiendo } (d - a/2) \approx 0.9 d \Rightarrow \text{ó } a \approx 10 \text{ cm} \Rightarrow d/5$$

Verificar:

$$a = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0.85 f'_c \times b_w} = \frac{11.66 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 27} = 10.16 \text{ cm}$$

$$10.16 \approx 10 \text{ (asumida)} \quad \text{tomamos } (A_s - A_{sf}) \text{ hallado}$$

$$A_s = A_{sf} + (A_s - A_{sf}) = 28.69 + (11.66) = 40.35 \text{ cm}^2$$

Verificar que la fluencia en tracción controle la falla

$$\rho_w = \frac{40.35}{27 \times 50} = 0.0299$$

$$\rho_f = \frac{28.69}{27 \times 50} = 0.0213$$

$$\rho_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y} = \frac{0.85^2 \times 210}{4200} \times \frac{6000}{10200} = 0.0213$$

$$\rho_w \text{ MAX} = 0.75(0.0213 + 0.0213) = 0.0426 \times 0.75$$

$$\rho_w (\text{MAX}) = 0.0320$$

$$\rho_w < \rho_w \text{ MAX} \quad \therefore \text{ está bien}$$

Luego: $A_s = 40.35 \text{ cm}^2$

RESISTENCIA AL CORTE Y TRACCIÓN DIAGONAL

7.1 Generalidades

A diferencia de los miembros sometidos a flexión cuyo comportamiento a flexión ha sido totalmente aclarado y definido, las investigaciones hechas para miembros que actúan a flexión y cortante juntos, demuestran no haber podido llegar a esa claridad por la complejidad que tiene este comportamiento.

Generalmente, los elementos estructurales tienen que resistir fuerzas cortantes, las que vienen acompañadas de flexión, carga axial, torsión; debiéndose analizar el corte independientemente en el elemento. Los miembros solicitados a flexión y corte tienen que ver con la adherencia entre el concreto y el refuerzo, y el anclaje de este último.

En vigas de concreto armado, la transmisión del cortante es función de la resistencia a tracción y compresión del concreto; por lo tanto, las fallas por cortante pueden ser no dúctiles. Estas fallas deben ser evitadas en absoluto en el diseño, especialmente en diseños antisísmicos. Para diseños donde es esencial la ductilidad, la resistencia al corte debe ser mayor que la resistencia a flexión que el elemento pueda desarrollar.

Todavía se considera para los análisis que el concreto es un elemento homogéneo, isotrópico, elástico, con los factores de seguridad correspondiente para la formación de grietas en la teoría elástica. Aunque con el desarrollo de las grietas se origina un comportamiento muy complejo de esfuerzos al extremo que algunas ecuaciones usadas para corte tienen muy poco de similitud con lo que sucede en la realidad.

7.1.1 Deducción del esfuerzo cortante

Como se vio en el curso de Resistencia de Materiales, la intensidad de la fuerza de corte se podrá obtener mediante un diagrama cortantes. La fuerza de corte en una sección del elemento debe equilibrar a la fuerza cortante externa, las fuerzas de corte horizontal y vertical en un elemento deben ser las mismas.

Para una viga homogénea, isotrópica, no agrietada, partiendo de consideraciones de equilibrio interno del esfuerzo a flexión, la parte sombreada de la sección de la viga estará en equilibrio cuando el esfuerzo cortante horizontal sea:

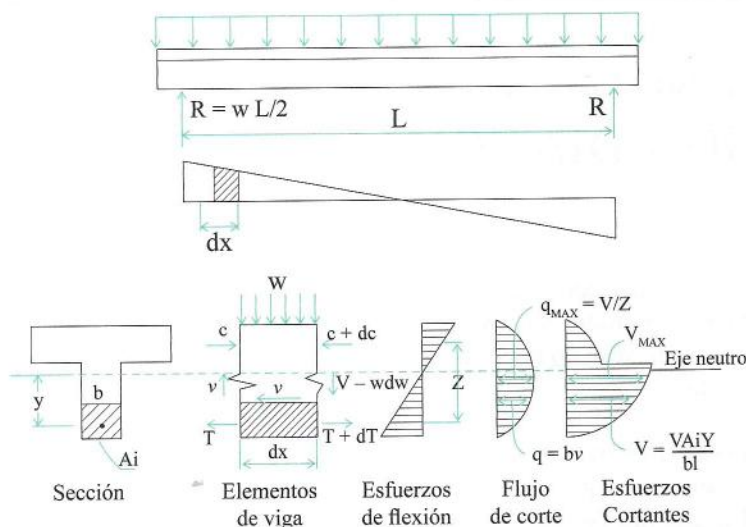
$$U = \frac{V \times A \times i \times \bar{Y}}{b \times I} \quad Z = \frac{I}{A i - Y} \quad q_{MAX} = \frac{V}{Z}$$

$q = v \times b$ flujo de cortante siempre es un máximo

I = momento de inercia de la sección

Z = brazo de palanca interno

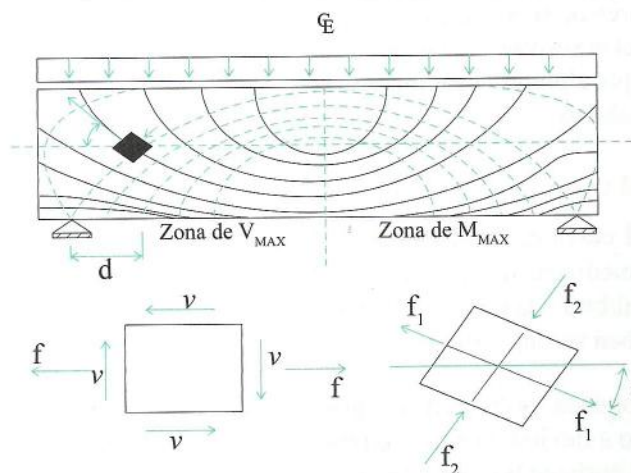
b = ancho de la viga



En forma simplificada, el ACI-2011 adoptó la siguiente ecuación:

$$U = \frac{V}{bw \times d}$$

7.2 Comportamiento del cortante y esfuerzo que toma el concreto



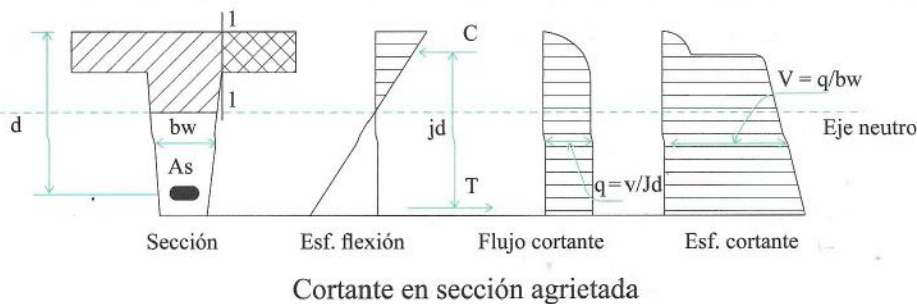
En la figura puede verse la combinación de cortante y flexión en una viga de concreto, produciendo como resultado un estado biaxial de esfuerzo. Cuando los esfuerzos principales de tracción exceden a la resistencia a tracción del concreto, se formarán las grietas. En la zona de " M_{MAX} " se producen grietas de flexión perpendiculares al eje del elemento. En la zona de " V_{MAX} " se genera grandes esfuerzos de tracción, también conocidos como tracción diagonal, los que se forman aproximadamente a 45° del eje del miembro, aunque en algunos casos estas grietas se deben a la flexión.

Al aceptar este comportamiento veremos que luego de la formación de grietas, o el elemento falla o se produce un nuevo mecanismo de sección agrietada, habiéndose encontrado en las pruebas que las grietas son mucho más pequeñas de lo que podrían esperarse, debido a una serie de factores.

Antiguamente no se aceptaba la formación de grietas en los elementos de concreto armado, actualmente se aceptan pero condicionados a que los anchos de ellas no sean mayores a las generadas por flexión.

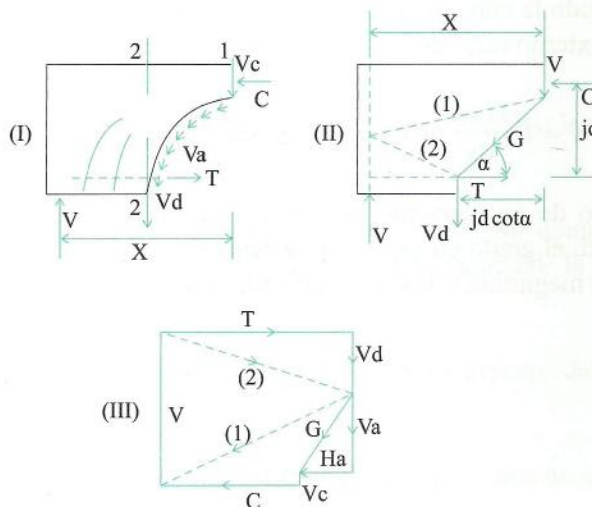
La fuerza horizontal a transferirse a través de la zona agrietada de la sección, permanece constante. Luego: Para $dt = vbw \times dx$

$$V = \frac{1}{bw} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dM}{dx \times jd} \times \frac{V}{bw \times jd}$$



7.2.1 Equilibrio en el tramo de cortante de una viga

En el cuerpo libre de una viga simplemente apoyada con esfuerzo cortante constante, pueden apreciarse las fuerzas externas e internas que mantienen en equilibrio a este tramo, limitado en un extremo por una grieta diagonal. La fuerza "V" transversal externa es resistida por las siguientes fuerzas internas:



V_c = Fuerza cortante a través de la zona **a compresión**.

V_d = Esfuerzo de flexión a través de la grieta que genera una fuerza o acción de dovela.

V = Componente vertical de los esfuerzos cortantes transmitido a través de la grieta inclinada debido a la trabazón de las partículas de agregado.

G = Sumatorio de los esfuerzos de cortante producida por la trabazón de agregados.

M = momento de resistencia de la viga.

$M = V \times X = jd (T + V_d \cos \alpha)$

Ignorando la acción de dovela se simplifica:

$$M = T \times jd$$

Como “ M ” y “ T ” fueron deducidas en las fórmulas, no se producen en la misma sección. La tracción en el refuerzo a flexión a distancia $(X - jd \cot \alpha)$ del soporte está gobernada por la distancia “ X ” del soporte de la viga.

Cuando $\alpha < 45^\circ \Rightarrow jd \cot \alpha \approx d$

Los mecanismos principales de la resistencia al corte:

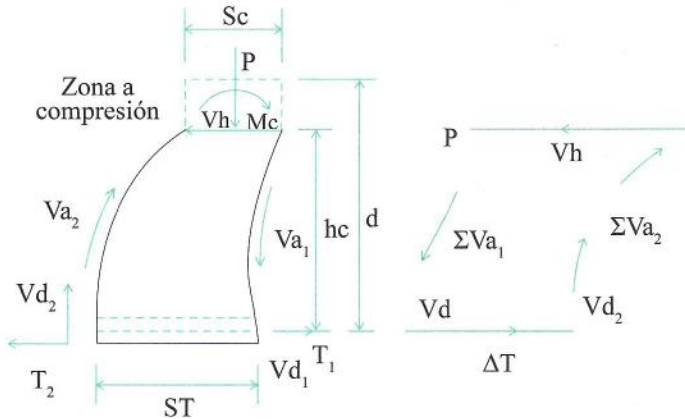
$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d(T \times jd)}{dx} = \underbrace{jd \frac{dT}{dx}}_I + \underbrace{T \frac{d(jd)}{dx}}_{II}$$

El termino $I = jd (dT/dx)$ expresa como un miembro prismático a flexión, donde “ T ” que es variable, cambia a lo largo de la viga para balancear el valor del momento externo.

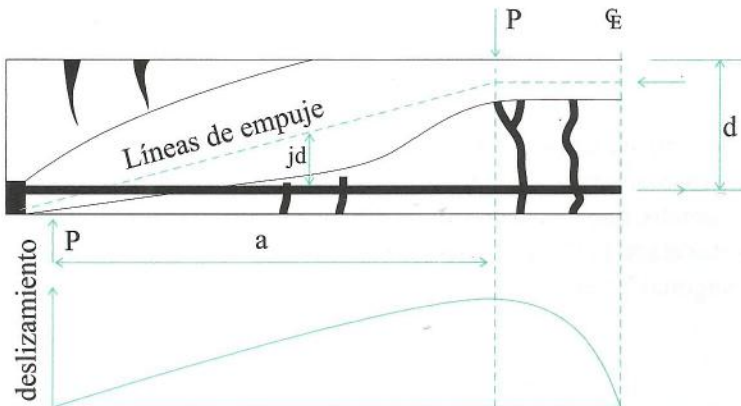
Si el brazo de palanca se supone que permanece constante donde $d(jd)/dx = 0$ surge la acción de “viga perfecta” y se obtendrá. $V = jd dT/dx = q \times jd$ (resistirá toda la fuerza “ q ” de adherencia), cuando la adherencia entre varilla de acero y concreto es “cero” $dT/dx = 0$. Luego, el cortante externo será resistido mediante compresión interna inclinada entonces:

$$V = T \frac{d(jd)}{dx} = C \frac{d(jd)}{dx} \text{ donde “C” sustituye a “T”}$$

En un caso práctico de un elemento de concreto armado, donde “ q ” (adherencia) no se desarrolló a plenitud, el grado en que cada mecanismo (I y II) contribuye a la resistencia al cortante en distintas magnitudes de carga, depende de la compatibilidad de deformación para estas acciones.



I. Acciones en un voladizo en el claro cortante de una viga



II. Deslizamiento asociado con la acción de arco en una viga idealizada ($q = 0$)

7.2.2 Tipos de falla a cortante

Según la relación " a/d " se tiene:

Tipo I: Cuando $3 < a/d < 7$, el mecanismo de arco no puede soportar la carga de agrietamiento, falla de mecanismo de viga.

Tipo II: Cuando $2 < a/d < 3$, falla por acción de arco, falla por compresión por cortante, o falla de tracción por flexión de la zona a compresión por encima de la carga de agrietamiento diagonal.

Tipo II: Cuando $a/d < 2.5$ se produce la falla por aplastamiento del concreto, o falla por acción de arco.

Nota: Cuando $1.5 < a/d < 7$, manda el corte en el diseño, ya que no se logra la capacidad a flexión de la viga.

7.2.3 Fórmulas prácticas proporcionadas por el ACI

Como se vio anteriormente, las vigas con una relación ($2.5 < a/d < 7$) depende considerablemente de la resistencia a tracción del concreto, se probó con cargas puntuales y para vigas simplemente apoyadas. Para otros casos, como vigas continuas y cargas repartidas, cambia también el comportamiento, y el ACI - 2008 nos proporciona fórmulas prácticas para este efecto, considerando la resistencia a tracción del concreto ($0.53 \sqrt{f'_c}$) el control de grietas ($\rho_w = A_s / bwd$) y la relación M/Vd .

$$V_c = \frac{V_c}{b_w \times d} = 0.5 + 176 \rho_w \frac{V_u \times d}{M_u} \leq 0.93 \sqrt{f'_c}$$

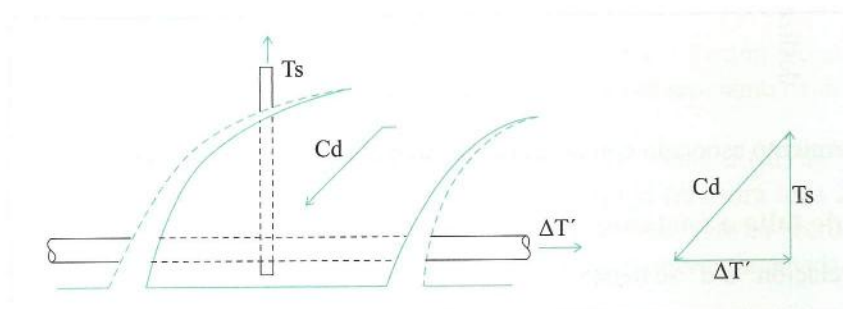
Donde: $\frac{V_u d}{M_u} \leq 1$, V_u , M_u ocurrirán simultáneamente.

Conservadoramente se usará:

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c}$$

7.3 Comportamiento y esfuerzo de corte que toma la armadura

Se mantienen los mecanismos y comportamientos explicados para la sección 7.2 (viga sin estribos). En el caso de vigas con refuerzo en el alma, también se produce la acción de los voladizos de concreto, que actúan como voladizos pero con estribos, la fuerza de adherencia ΔT acción de dovela y la flexión de voladizo (acción de armadura) que dan la fuerza de "compresión diagonal". Ver figura.



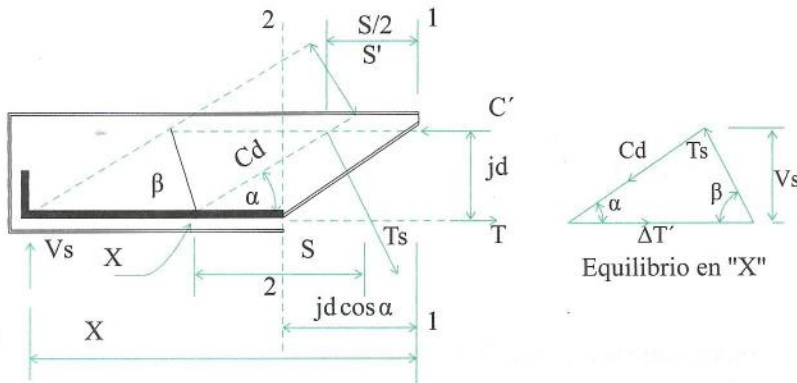
Los estribos contribuyen en la siguiente manera:

1. Mejora la acción de dovela, el estribo soporta una varilla longitudinal cruzada por una grieta inclinada.
2. Suprime los esfuerzos de tracción por flexión en los bloques de voladizo mediante la fuerza "Cd".
3. Limita la abertura de grietas diagonales.
4. Aumenta el confinamiento cuando los estribos están cercanos.
5. Evita que se pierda la adherencia al aparecer las grietas en las zonas de anclaje, debido a las fuerzas de dovela y anclaje.

Cuando el refuerzo en el alma es analizado, diseñado y detallado adecuadamente, permite que además que el comportamiento y la resistencia al corte del concreto “ V_c ” ya tratado, soporte los esfuerzos correspondientes; y, además, que la armadura de acero resista las fuerzas “ V_s ” adicionales.

7.3.1 Análisis del refuerzo de acero en el alma

La siguiente figura nos permitirá analizar la relación entre “ V_s ” (fuerzas externas de corte), que resistirá la armadura y las fuerzas internas. Notar la presencia de los puntales a compresión diagonal.



Considerando equilibrio en el Nodo “X” para el polígono de fuerzas considerado.

$$V_s = C_d \operatorname{sen} \alpha = T_s \operatorname{sen} \beta$$

$$S = j d (\cot \alpha + \cot \beta)$$

de esta fórmula deducimos:

$$\frac{T_s}{s} = \frac{V_s}{j d \operatorname{sen} \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} \frac{A_v \times f_s}{S}$$

$$V_s = \frac{V_s}{b w \times j d} \approx \frac{V_s}{b w \times d}$$

Nuevamente de las dos ecuaciones anteriores para $f_s = f_y$, tenemos:

$$A_v = \frac{V_s}{\operatorname{sen} \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} \times \frac{S \times b w}{f_y}$$

La fuerza “ C_d ” genera esfuerzos uniformes en los puntales de la armadura, los que tienen una profundidad efectiva de:

$$S' = S \times \operatorname{sen} \alpha = j d \times \operatorname{sen} \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)$$

∴ Los esfuerzos de compresión diagonal debidos a la armadura podrán aproximarse así:

$$fcd = \frac{Cd}{bw \times S'} \times \frac{Vs}{bw \times jd \operatorname{sen}^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)}$$

$$fcd = \frac{Vs}{\operatorname{sen}^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)}$$

a) Para estribos verticales $\beta = 90^\circ$ se tiene:

Diagonales a compresión a, $\alpha = 45^\circ$

$$A_v = V_s \frac{S \times bw}{f_y}$$

$$fcd = 2 V_s$$

Diagonales a compresión a, $\alpha = 30^\circ$

$$A_v = 0.58 V_s \frac{S \times bw}{f_y}$$

$$fcd = 2.31 V_s$$

b) Refuerzo inclinado en el alma $\beta < 90^\circ$ se tiene:

Diagonales a compresión a, $\alpha = 45^\circ$

$$A_v = \frac{V_s}{(\operatorname{sen} \beta + \cos \beta)} + \frac{S \times bw}{f_y}$$

$$fcd = \frac{2 V_s}{1 + \cot \beta}$$

Refuerzo en el alma y puntales a 45°

$$A_v = 0.50 \times \frac{S \times bw}{f_y}$$

$$fcd = V_s$$

donde:

V_s = fuerza externa de corte que resiste la armadura.

Cd = fuerza que resisten los puntales a compresión.

T_s = resultante de todas las fuerzas en los estribos, a través de la grieta diagonal.

T_s/S = fuerza de acero del alma por longitud unitaria de la viga.

A_v = área del refuerzo del alma espaciado a una distancia "S" a lo largo de la viga.

f_s = esfuerzo en el estribo.

S' = profundidad efectiva de los puntales.

7.4 Corte en viga según el ACI - 2011

Las pruebas de investigación efectuadas han demostrado que la resistencia a cortante de una viga sin refuerzo en el alma, en especial la resistencia debida a la trabazón del agregado, funciona mientras el ancho de las grietas no sea muy grande; por lo tanto, en presencia del refuerzo en el alma, la acción de viga resiste las fuerzas cortantes siempre y cuando las deformaciones del refuerzo del alma no sean grandes; en otras palabras, que los estribos no lleguen a la cedencia. Por lo tanto y como conclusión:

- Antes que los estribos lleguen a la cedencia, o al iniciarse ésta, es permitido complementar las acciones, tanto de resistencia del concreto como de los estribos para el esfuerzo cortante.

$$V_u = V_c + V_s$$

Las normas ACI ven el comportamiento y diseño por cortante en términos de fuerzas de analizar como esfuerzos.

Esfuerzo de corte necesario $\leq$ esfuerzo de corte de diseño

$$V_u \leq \phi V_n$$

$$V_u \leq \phi V_c - \phi V_s$$

V_u = fuerzas de corte último (amplificada).

ϕV_c = fuerza de corte que toma el concreto.

ϕV_s = fuerza de corte que toma el acero.

Cálculo de " V_c "

- Cuando en una viga se cumple $1n/d \geq 5$.
- El corte se calculará para el cortante " V_u " a la distancia " d " de la cara del apoyo.
- Se podrán emplear las siguientes fórmulas:
- Para elementos sujetos únicamente a cortante y flexión:

Ecuación simplificada

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'c} b_w \times d \quad (1)$$

Más detallado:

$$v_c = \left[0.5 \lambda \sqrt{f'c} + 176 \rho_w \frac{v_u d}{M_u} \right] b_w d \quad (2)$$

$$\text{Pero } v_c \leq 0.93 \lambda \sqrt{f'c} b_w d ; \frac{v_u d}{M_u} \leq 1 \quad \text{y} \quad \rho_w = \frac{A_s}{b_w d}$$

M_u y $V_u \Rightarrow$ ocurren simultáneamente en la acción considerada

- Para elementos sujetos a compresión axial, corte y flexión

$$v_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{140 A_g} \right) \lambda \sqrt{f'c} b_w d \quad (3)$$

- Para elementos sujetos a tracción axial significativa, el refuerzo por cortante debe diseñarse para que resista el corte total.

$$v_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{35 A_g} \right) \lambda \sqrt{f'c} b_w d \quad (4)$$

Dan N_u (-) para tracción.

- Para elementos sujetos a compresión axial, se puede utilizar la ecuación (2) para calcular " V_c ", sustituyendo " M_n " por " M_u " y en $\frac{V_u \times d}{M_u}$. Luego no estará limitada a "1" donde:

$$M_n = M_u - U_n \frac{(4h - d)}{8} \quad (5)$$

$v_c \Rightarrow$ no debe tomarse mayor que:

$$v_c = 0.93 \lambda \sqrt{f'c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{35 A_g}} \quad (6)$$

cuando " M_n " de ec. (5) es negativa

$V_c \Rightarrow$ se calculará por la ec. (6)

7.4.1 Tipos de refuerzo por corte

- Fuerza cortante: Secciones circulares

Para secciones circulares se puede tomar $d = 0.8h$ y $V_c = 0.053 \sqrt{f'c} 0.8 h^2$; o, alternatively, tomar la sección cuadrada equivalente en área. Se pueden usar refuerzos espirales o estribos circulares.

Donde:

$$V_c = \frac{0.53 \sqrt{f'c} b_w \times d}{\sqrt{1 + \left(2.5 C_t \frac{T_u}{V_u} \right)^2}}$$

$A_v = 2A_b$ estribo

$d = 0.8h$

- Fuerza cortante: Secciones críticas

Se tomará a " d " de la cara cuando:

- a) La reacción en el apoyo sea de compresión.
- b) Cuando las cargas están aplicadas en la parte de la viga.
- c) Cuando no existen cargas concentradas entre la sección crítica y el apoyo.

Se tomará la cara del apoyo cuando:

- La reacción en el apoyo es de tracción
- Cuando las cargas están aplicadas en la parte inferior de la viga
- Cuando existen cargas concentradas entre el apoyo y la distancia "d"

7.4.2 El refuerzo resistente por cortante "Vs"

Tipos de refuerzo por cortante:

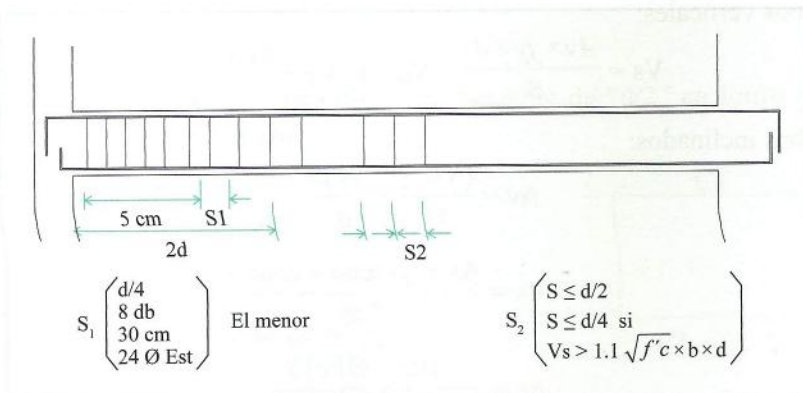
- Estribos perpendiculares al eje del elemento.
- Malla soldada con alambres localizados perpendicularmente al eje del elemento.
- Estribos que formen un ángulo de 45°, o más, con el refuerzo longitudinal por tracción.
- Refuerzo longitudinal con una parte doblada que forme un ángulo de 30°, o más, con el refuerzo longitudinal por tracción.
- Combinaciones de estribos y refuerzo longitudinal doblado.
- Espirales.

$$f_y \leq 4220 \text{ K/cm}^2$$

7.4.3 Límites de separación para el refuerzo por corte

- Separación "S" perpendicular al eje del elemento $\leq \frac{d}{2}$
- Los estribos inclinados y el refuerzo doblado deben estar espaciados, de forma que cada línea de 45° que se extienda hacia la reacción desde la mitad del peralte del elemento $d/2$, hasta el refuerzo longitudinal de tracción, debe estar cruzada por lo menos por una línea de refuerzo por corte.
- Si $V_s > 1.1 \sqrt{f'c} b w \times d$

$$S_{\text{MAX}} = d/4$$



7.4.4 Refuerzo mínimo por corte

- Deberá colocarse un área mínima de refuerzo por corte cuando en un elemento de concreto armado sujeto a flexión se cumpla:

$$V_u > 1/2 \times \emptyset \times V_c$$

excepto en:

- Losas y zapatas
- Losas nervadas
- Vigas donde

$$\text{escoger el mayor si } V_u < V_c \quad \begin{cases} "d" \leq 25 \text{ cm} \\ "d" \leq 2 \text{ 1/2 (espesor del patín)} \\ "d" \leq 1/2 \text{ (ancho del alma)} \end{cases}$$

corte $\min A_v = (3.50 b_w \times S) / f_y$ (en general salvo que no se incluya en el caso anterior)

- Cuando el momento torsor " T_u " $\leq \phi (0.13 \sqrt{f'_c} \sum X^2 y)$, y se requiera refuerzo en el alma por análisis, o refuerzo mínimo, se calculará así:

$$A_v = 3.5 \frac{b_w \times S}{f_y}$$

- Cuando " T_u " $> \phi (0.13 \sqrt{f'_c} \sum X^2 y)$, y se requiera refuerzo en el alma por análisis o refuerzo mínimo se calculará así:

$$A_v + 2 A_t = 3.5 \frac{b_w \times S}{f_y}$$

A_t = área de 1 rama de 1 estribo cerrado que toma torsor cada "S"

7.4.5 Diseño de refuerzo por corte

De $V_u \leq \emptyset V_n$ y $\emptyset V_n \leq \emptyset (V_c + V_s)$

Cuando $V_u > \emptyset V_c \Rightarrow V_s$ se calculará:

- Para estribos verticales:

$$V_s = \frac{A_v \times f_y \times d}{S}, \quad V_u \leq \emptyset V_c + \frac{\emptyset A_v \times f_y \times d}{S}$$

- Para estribos inclinados:

$$A_v = \frac{(V_u \leq \emptyset V_c) S}{\emptyset \times f_y \times d}$$

$$V_s = \frac{A_v \times f_y (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) d}{S}$$

$$A_v = \frac{(V_u - \emptyset V_c) S}{\emptyset f_y (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) d}$$

- Para varillas dobladas a la misma distancia del apoyo:

$$V_s = A_v \times f_y \times \sin \alpha$$

$$A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_y \sin \alpha}$$

donde:

$$V_s \leq 0.8 \sqrt{f'c} b_w \times d \quad \text{ó}$$

$$(V_u - \phi V_c) \leq \phi 0.8 \sqrt{f'c} b_w \times d$$

- Para varillas dobladas y paralelas a diferentes distancias del apoyo.

$$V_s = \frac{A_v \times f_y (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{S}$$

- Solamente las 3/4 partes centrales de la porción inclinada de cualquier varilla longitudinal doblada se considerará efectiva para refuerzo por corte.

$$V_{s_{MAX}} \leq 2.1 \sqrt{f'c} \times b_w d$$

- Para cortante y torsión combinados ver *Concreto armado II*, del mismo autor.
- Para corte fricción, ménsulas y braquetes ver también *Concreto armado II*.

7.4.6 Cortante en losas y zapatas

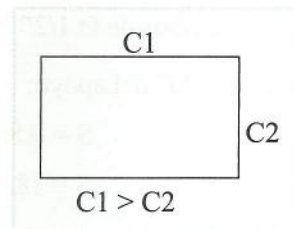
La resistencia al cortante en losas y zapatas en zonas cercanas a las columnas o apoyos, debe verificarse y diseñarse para la más crítica de una de las dos condiciones siguientes:

- Corte viga:** a una distancia “d” del apoyo a todo lo ancho del tramo (usar las fórmulas ya vistas para “Vc”)
- Corte de dos direcciones:** a una distancia siguiente de “d/2” en forma perimetral. Se diseñará de la siguiente manera:

$$V_c = 0.27 \left(2 + \frac{4}{\beta_c} \right) \sqrt{f'c} \times b_o \times d$$

$$V_c \leq 1.1 \sqrt{f'c} \times b_o \times d \quad \text{donde } \beta_c = \frac{C1}{C2}$$

b_o: perímetro a la distancia “d/2” de la columna



7.5 Ejemplos

Ejemplo N° 1

Diseñar los estribos (A_v y "S") para la siguiente viga simplemente apoyada:

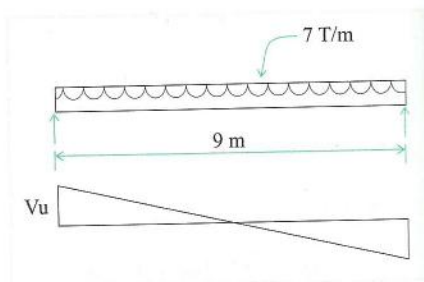
b_w : 35 cm.

f'_c : 210 K/cm²

f_y : 2,800 K/cm²

d : 50 cm

W_u : 7 T/m



1. Cálculo del cortante actuante:

En el apoyo $V_u = 7 \times 9/2 = 31.5$ T

a la distancia "d" $V_u = 31.5 - 7 (0.5) = 28$ T del apoyo.

2. Esfuerzo admisible de corte: $\lambda = 1$

$$\phi V_c = \phi 0.53 \lambda b_w \times d$$

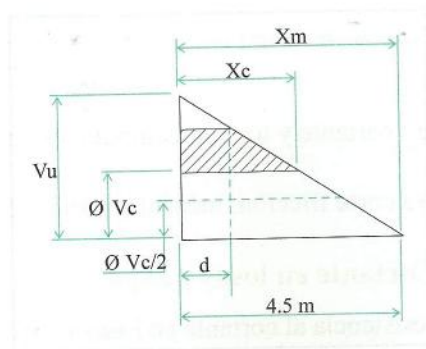
$$\phi V_c = 0.85 \times 0.53 \times 35 \times 50 = 11\,424.64 \text{ kg}$$

3. Encontrar " X_c "

$$(4.5 - X_c)/45 = \phi V_c/V_u$$

$$X_c = 4.5 \{1 - (\phi V_c/V_u)\}$$

$$X_c = 4.5 \{1 - (11.42/31.5)\} = 2.87 \text{ m}$$



4. Calcular " X_m " $\Rightarrow$ a partir de $V_u = \phi V_c/2$

$$X_m = 4.5 [(31.5 - 5.71)/31.5] = 3.68 \text{ m}$$

5. Cálculo del espaciamiento entre estribos tipo "U"

$$S = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

Usaremos estribos de $\phi 1/2'' \Rightarrow A_v = 2.53 \text{ cm}^2$

a la distancia "d" del apoyo:

$$S = 0.85 (2.53) 2\,800 \times 50 / (28\,000 - 11\,424)$$

$$S = 18.16 \text{ cm}$$

Podrá ir aumentando el espaciamiento "S" a medida que disminuya el corte. Por ejemplo, a $5 \times 18 - 7.5 = 97.5$ cm. se tiene $S = 0.85 (2.53) 2\,800 \times 50 / (13\,255) = 22.7 \text{ cm}$

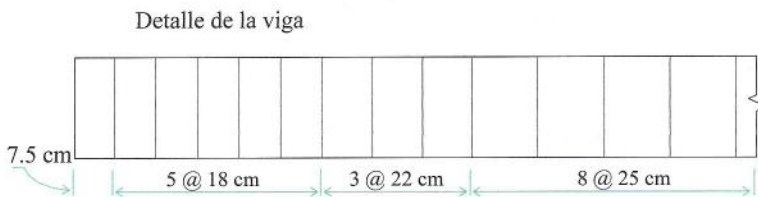
6. Verificar el espaciamiento máximo “S” entre estribos:

$$S_{(MAX)1} \leq d/2 = 25 \text{ cm}$$

$$S_{(MAX)2} \leq 60 \text{ cm}$$

$$S_{(MAX)} \text{ para } \phi 1/2 \Rightarrow S = Av \frac{f_y}{3.5} bw = \frac{2.53 \times 2800}{3.5 \times 35} = 57.83 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{ Usar } S_{(MAX)} = 25 \text{ cm}$$



Ejemplo N° 2

Calcular el espaciamiento de estribos de $\phi 3/8$ " en la siguiente viga sometida a **flexión y tracción axial**.

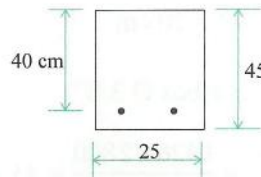
$f'_c = 250 \text{ K/cm}$ (concreto con arena liviana)

$f_y = 2,800 \text{ K/cm}^2$

$M_u = 16 \text{ T} - \text{m}$

$V_u = 15 \text{ T}$

$N_u = -13 \text{ T}$



1. Cálculo del esfuerzo permisible del concreto por corte como “ f_{ct} ” $\Rightarrow$ no se especifica.

$\sqrt{f'_c} \Rightarrow$ se reducirá por el factor $\lambda = 0.85$ (concreto liviano)

$$\phi v_c = 0.85(0.85)0.53 \left[1 + \frac{N_u}{35 A_g} \right] \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$\phi v_c = 0.85 \times 0.53 \left[1 + \frac{130000}{35 \times 45 \times 25} \right] 0.85 \times \sqrt{250} \times 25 \times 40$$

$$(V_u - \phi V_c) \leq 0.85 (\phi 2.1 \sqrt{f'_c} \times b_w \times d)$$

$$\phi v_c = 4055.35 \text{ kg}$$

2. Verificar si cumple la sección transversal:

$$(V_u - \phi V_c) \leq 0.85 (\phi 2.1 \sqrt{f'_c} \times b_w \times d)$$

$$9.142 T \leq 0.85 (0.85 \times 2.1 \sqrt{250} \times 25 \times 40) = 23.99 T$$

$$9.142 T \leq 23.99 T \therefore \text{O.K.}$$

3. Cálculo para corte total según norma ACI - 2008

$$S = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u} = \frac{0.85 \times 1.426 \times 2.800 \times 40}{15000} = 9.02 \text{ cm}$$

$$S = 9.02 \text{ cm}$$

3. Verificar SMAX de estribos:

$$(V_u - \phi V_c) \leq 0.85 (\phi 1.1 \sqrt{f'_c} \times b_w \times d) = 0.85 \times 1.1$$

$$\sqrt{250} \times 25 \times 40 = 14783.65 \text{ kg}$$

$$9.14 T \leq 14.78 T \therefore \text{O.K.}$$

$$S_{MAX} \leq d/2 = 40/2 = 20 \text{ cm}$$

$$S_{MAX} \Rightarrow (\text{para estribos } \emptyset 3/8'')$$

$$S_{MAX} = \frac{A_v f_y}{3.5 \times b_w} = \frac{1426 \times 2800}{3.5 \times 25} = 45.63 \text{ cm}$$

$$\therefore S_{MAX} = 20 \text{ cm}$$

Respuesta: USAR Estribos $\emptyset 3/8'' @ 14 \text{ cm}$

Ejemplo N° 3

Se tiene la columna siguiente, verificar si cumple por corte para los dos casos de carga que se indican:

a) $M_u = 13 \text{ T-m}$

$P_u = 75 \text{ T}$

$V_u = 10 \text{ T}$

$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$

$f_y = 2800 \text{ K/cm}^2$

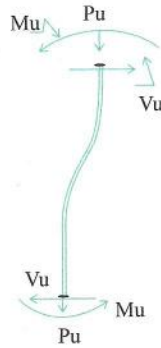
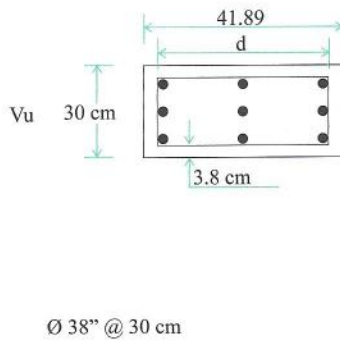
b) $M_u = 13 \text{ T-m}$

$P_u = 5 \text{ T}$

$V_u = 10 \text{ T}$

$f'_c = 210 \text{ k/cm}^2$

$f_y = 2800 \text{ K/cm}^2$

**Solución:**

1. Cálculo del corte que toma el concreto:

$$d = 40 - \left[3.8 + 0.953 + \frac{1.905}{2} \right] = 34.29 \text{ cm}$$

$$\phi V_c = \phi 0.53 \left[1 + \frac{N_u}{140 \times A_g} \right] \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$\phi V_c = 0.85 \times 0.53 \left[1 + \frac{750000}{140 \times 30 \times 40} \right] 1 \times \sqrt{250} \times 30 \times 34.29$$

$$\phi V_c = 10578.5 \text{ kg}$$

$T > 10 T \therefore$ El concreto toma el corte.

Caso (b)

1. Cálculo del corte que toma el concreto

$$\phi V_c = 0.85 \times 0.53 \left[1 + 0.0071 \frac{5000}{30 \times 40} \right] \sqrt{250} \times 30 \times 34.29$$

$$\phi V_c = 7544.25 \text{ kg}$$

$7.54 T < 10 T \therefore$ Diseñar estribos para tomar el exceso de corte

2. Cálculo de SMAX

$$S_{MAX} = d/2 = 34.29 = 17.14 \text{ cm}; 30 \text{ cm} \therefore \text{No cumple.}$$

3. Probar con $S_{MAX} = 17 \text{ cm}$

$$\phi V_s = \frac{\phi A_v f_y d}{S} = \frac{0.85 \times 1426 \times 2800(34.29)}{17} = 6845.7 \text{ kg}$$

$$\phi V_c + \phi V_s = 7.54 + 6.85 = 14.39 > 10 T \therefore \text{O.K.}$$

ADHERENCIA, ANCLAJE Y LONGITUD DE DESARROLLO

8.1 Adherencia y anclaje

La adherencia es un factor fundamental en el comportamiento del concreto armado, si no existiera adherencia entre el acero y concreto, se tendría prácticamente lo equivalente a una viga de concreto solamente, y no compuesta como se pretende, porque el acero estará desligado del concreto; por lo tanto, el criterio que asume igual deformación entre acero y concreto, que es fundamental en la teoría de concreto armado, no funcionaría.

Los mecanismos principales que permiten que se produzca la adherencia entre acero y concreto son básicamente la adhesión química, la fricción y el aplastamiento o cortante que se produce entre las corrugaciones de la varilla y el concreto que la rodea.

Los dos primeros factores desaparecen rápidamente a la presencia de pequeños esfuerzos, quedando el último que es el que fundamentalmente actúa.

En suma el “esfuerzo de adherencia” viene a ser el esfuerzo de corte entre la cara de la varilla y el concreto circundante. Las fuerzas de adherencia se producen cuando los esfuerzos de diseño cambian entre dos secciones, luego:

$$u = \frac{q}{\Sigma_0} = \frac{\Delta f_s \times A_b}{\Sigma_0} = \frac{d_b}{4} \Delta f_s$$

- u = Esfuerzo de adherencia, que es la fuerza cortante por área unitaria de superficie de varilla.
- q = Cambio de la fuerza de la varilla en la longitud unitaria.
- Σ_0 = Área superficial nominal de una varilla de longitud unitaria.
- d_b = Diámetro nominal de la varilla.
- Δf_s = Cambio del esfuerzo del acero en la longitud unitaria.
- A_b = Área de la varilla.

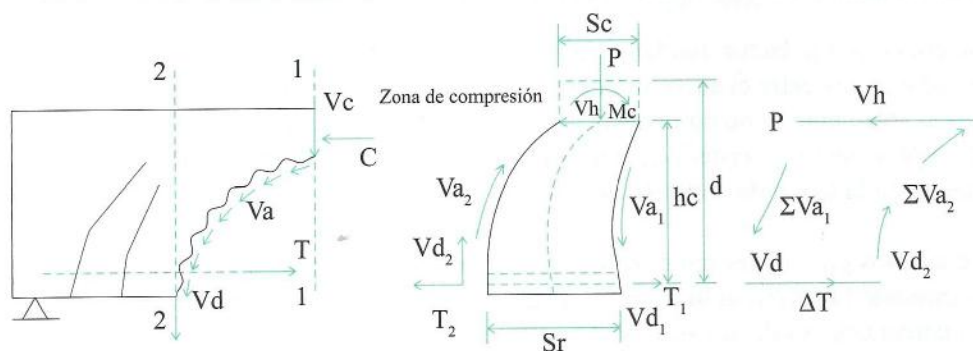
La corrugación superficial de las varillas aumenta la resistencia por adherencia. En comparación a las varillas lisas, hay que mencionar que los requisitos de diseño por adherencia y anclaje en los códigos o reglamentos, son completamente empíricos, los mismos que serán estudiados con bastante minuciosidad en éste capítulo, lo cual permitirá detallar el refuerzo en forma eficaz.

Podemos distinguir claramente dos casos de formación del esfuerzo de adherencia:

- a) En el anclaje de las varillas.
- b) En el cambio del momento de la varilla a lo largo de su longitud, debido a la variación del momento flector en el miembro (adherencia por flexión).

8.2 Adherencia por flexión

Veremos inicialmente la acción de la viga en el tramo del cortante, que, debido al agrietamiento por flexión, se produce una especie de conjunto de bloques en voladizo con base en la zona de compresión de la viga. Luego se verá que para que se produzca en acción de viga perfecta, deberá resistirse efectivamente toda la fuerza "q" de adherencia; y se verá cómo los voladizos de concreto podrán satisfacer estos requisitos, analizándose como un voladizo. (Ver figura).



- a) El aumento de la fuerza de tracción en el refuerzo de flexión entre grietas adyacentes, da como resultado una fuerza de adherencia.

$$\Delta_1 = T_1 + T_2$$

- b) Si se producen desplazamientos de cortante en las dos caras de una grieta, pueden generarse esfuerzos cortantes Va_1 Va_2 , debido a la trabazón del agregado.
- c) Los mismos desplazamientos de cortante pueden también inducir fuerzas de dovela $Vd1$ $Vd2$, a través del refuerzo a flexión.
- d) En el extremo empotrado de los bloques en voladizo, se inducen una fuerza axial "P", una fuerza transversal "Vh" y un momento "M", para equilibrar las fuerzas ya mencionadas en el voladizo.

Considerándose la distribución de esfuerzos de adherencia "u", distribuídos uniformemente entre dos secciones cualesquiera próximas entre sí. El equilibrio de un tramo corto de varilla requiere que:

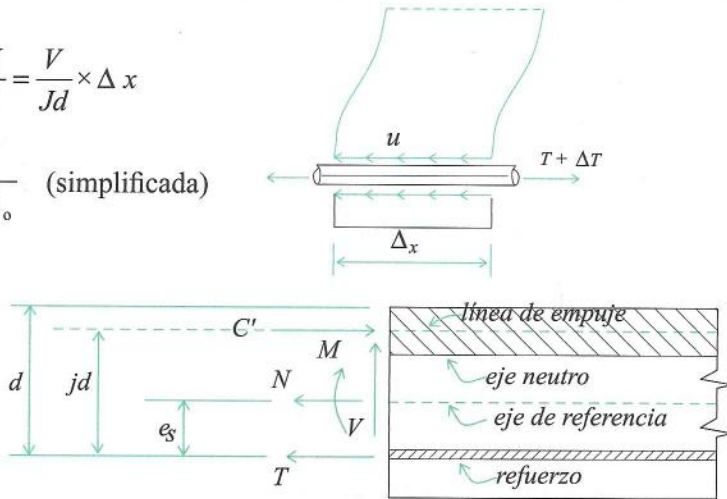
$$\Delta T = u \times \sum_0 \times \Delta_x \text{ para que ocurra la acción de viga ideal debe:}$$

$$T \Rightarrow \text{varia proporcionalmente a "M"}$$

$$M = \text{momento flexionante externo}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{Jd} = \frac{V}{Jd} \times \Delta x$$

$$u = \frac{V}{jd \times \Sigma_0} \quad (\text{simplificada})$$



Puede apreciarse que se produce esfuerzo de adherencia en una región de Momento flector constante, inclusive para esfuerzo cortante igual a “cero”. Si se provee de suficiente longitud de anclaje para las varillas, no ocurre la falta producida en el esfuerzo de adherencia por flexión.

Las consideraciones de adherencia por flexión piden que se verifique la longitud de anclaje en las regiones de los miembros, donde el momento flector es “Cero”.

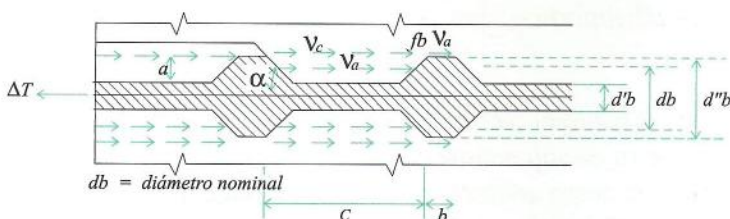
- En soportes simples
 - En puntos de inflexión
- } (produce altos esfuerzos
M = 0, VMAX de adherencia)

8.3 Análisis y comportamiento de la resistencia por adherencia

Esta resistencia se considera producida por adhesión química, entre el concreto y la varilla, aunque una vez rota esta adhesión, quedará solamente la fricción y la trabazón entre varilla y pequeñas partículas de arena.

La fricción depende de las características superficiales de la varilla, prueba de ello es que a veces se prefiere superficies algo oxidadas.

En el acero corrugado la adherencia es grande, debido a las costillas o corrugaciones del acero y el concreto que cubre la superficie.



Analizaremos la resistencia por adherencia entre dos costillas de una varilla.

Considerando que:

1. V_a = Esfuerzos cortantes por adhesión en la superficie de la varilla.
2. f_b = Esfuerzos de apoyo contra la cara de la costilla.
3. V_c = Esfuerzos cortantes en la superficie cilíndrica de concreto entre las costillas adyacentes.

Luego:

$$\Delta T = \pi \times d''_b \times (b+c) V_a + \frac{d''_b b^2 + d'_b b^2}{4} \times f_b \approx C \times V_c \times \pi \times d''_b$$

Podemos deducir que al perderse la adhesión superficial en la varilla al aumentar la carga, la fricción actúa en forma muy pequeña, pudiendo despreciarse el valor " V_a "; en cambio, la resistencia por apoyo, que se produce alrededor de las costillas y luego el corte en el concreto, si son significativos. Luego tendremos:

$$b \approx 0.1 C \Rightarrow C = \text{espacio entre costillas}$$

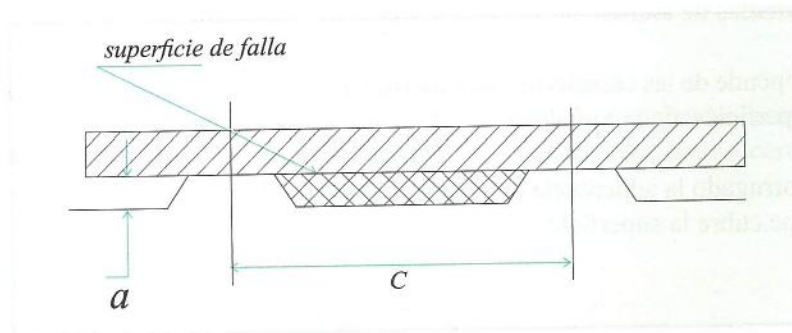
$$a \approx 0.05 d'_b \Rightarrow \text{Área de apoyo de una costilla} = \pi \times \frac{d''_b b^2 - d'_b b^2}{4} \approx \pi \times d_b \times a$$

Luego:

$$\Delta T = \pi \times d_b \times a \times f_b \approx \pi \times C \times v_c$$

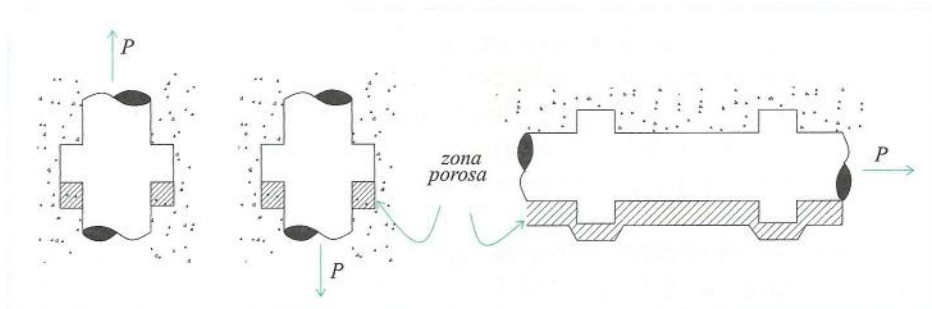
$$v_c = \frac{a}{c} \times f_b$$

La relación a/c nos permite encontrar una relación óptima en el comportamiento de las corrugaciones por diversos tipos de falla, se ha encontrado que la relación óptima $a/c = 0.065$ y los requisitos del ASTM A-305 son $0.057 < a/c < 0.072$



8.4 Efectos de la adherencia por la ubicación de las varillas

- La ubicación de la mezcla afecta la calidad del concreto; por ejemplo, en zonas bajo varillas o partículas de agregados, puede dar origen a la formación de capas suaves o esponjas especialmente cerca a las corrugaciones, pudiendo ocurrir grandes deslizamientos.



La adherencia es menor en varillas colocadas de forma horizontal que de forma vertical. Las varillas en capas superiores en vigas y losas, tienen menor resistencia a la adherencia que las varillas inferiores, debido a que la ganancia de aire y agua es mayor en las zonas superiores. También deben tomarse en consideración los efectos de movimiento relativo por asentamiento, y pérdidas de agua debido a agujeros o rendijas en las formas o encofrados. Por todas estas razones, el reglamento considera un aumento en 40 % en la longitud de desarrollo de las varillas superiores con respecto a las inferiores.

8.5 Fallas por fisuración

Pueden producirse fisuraciones en tramos sometidos a cortante, a lo largo del refuerzo por flexión, considerando las siguientes combinaciones:

- Esfuerzo de tracción producidos cerca a cada grieta por flexión.
- Para transferir grandes fuerzas de adherencia se produce esfuerzo a tracción perimetral, debido a la acción de cuña por el concreto comprimido en las corrugaciones.
- Esfuerzos de tracción transversal, debido a la acción de dovela del esfuerzo a flexión, debido a las grietas por cortante. Estas fuerzas reducen la resistencia por adherencia.

8.5.1 Confinamiento

Un confinamiento bueno en la zona que recubre la varilla restringe el ensanchamiento de las grietas de fisuración. Un mayor recubrimiento aumenta la resistencia a la fisuración. Pero hay que aclarar que el espesor adicional del recubrimiento no es proporcional al mejor rendimiento por adherencia. Aparentemente, el beneficio en el aumento de recubrimiento es mayor en las varillas superiores de tamaño mediano. La acción del recubrimiento se elimina cuando se produce la acción de dovela, y ésta afecta la adherencia.

Los estribos, en especial cuando su separación es pequeña, impiden la apertura de grietas que se formen a lo largo de las varillas embebidas, y permiten que se transmitan mayores fuerzas de adherencia. Este comportamiento es posible en algunos casos si se transmiten esfuerzos cortantes mediante la trabazón de agregado, a través de las grietas de fisuración.

8.6 Longitud de anclaje o desarrollo del refuerzo

El análisis efectuado anteriormente, muestra el mecanismo de adherencia entre concreto y acero, y los esfuerzos que se generan en ambos. Debido a que el patrón de fisuras es impredecible, no es real calcular el anclaje considerando los esfuerzos producidos a lo largo de la varilla.

El ACI calcula la longitud de anclaje para asegurar la adherencia entre acero y concreto. La longitud de anclaje es la longitud de la varilla de acero, que se requiere embeber en concreto para garantizar el desarrollo de su resistencia de diseño, a partir de una determinada sección crítica. La longitud de anclaje depende de las características de la barra: diámetro y recubrimiento, y del concreto que la rodea: el cual puede ser concreto normal o concreto ligero.

La longitud de anclaje del refuerzo bajo esfuerzos diversos, se calcula considerando el valor $\sqrt{f'_c}$, el cual está limitado a 26.5 k/cm² (ACI-12.1.2); ello debido a que para concretos de alta resistencia, la longitud de anclaje no se reduce proporcionalmente al incremento de $\sqrt{f'_c}$.

8.7 Longitud de anclaje en varillas con acero en tracción

El análisis para el cálculo del anclaje de varillas en tracción ha sufrido muchos cambios, llegando a hacerse, en el código ACI-89, bastante laborioso. Actualmente, ha sido simplificado como a continuación se aprecia.

Fórmula que calcula la longitud de anclaje del acero en tracción “Ld”

$$l_d = \frac{d_b}{3.5\lambda} \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \frac{\Psi_t \Psi_e \Psi_s}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \quad (I)$$

l_d : Longitud de desarrollo $l_d \geq 30$ cm

d_b : diámetro nominal de varilla o cable (cm)

Ψ_t : Factor de ubicación de la barra

Ψ_e : Factor de tratamiento superficial del acero

Ψ_s : Factor de diámetro de la barra

λ : Factor de agregado ligero

c_b : Recubrimiento o medio espaciamiento de las barras entre ejes, el que sea menor

K_{tr} : Índice de refuerzo transversal

$$C + K_{tr}/d_b \leq 2.5$$

f_c : Esfuerzo de compresión especificado

f_y : Esfuerzo a la fluencia del acero de refuerzo

En esta expresión y en las tablas I y II el término $\sqrt{f'c}$ será $\leq 26.54 \text{ kg/cm}^2$.

Los valores de los diversos factores que intervienen en la ecuación (I) para diversas condiciones se presentan en la tabla siguiente.

Tabla A Factores que intervienen en la expresión I

Factor	Descripción de las condiciones	Valor
Ubicación de la barra ψ_t	• Varillas superiores	1.3
	• Otras varillas	1.0
Tratamiento superficial del acero ψ_e	• Varillas o alambres con recubrimiento epóxico y recubrimiento menor que $3d_b$ y espaciamiento libre menor que $6d_b$	1.5
	• Otras varillas o alambres con recubrimiento epóxico	1.2
	• Varillas sin recubrimiento epóxico	1.0
Diámetro de la barra ψ_s	• Alambres y varillas menores a la #6	0.8
	• Varillas iguales y mayores a la #7	1.0
Agregado ligero λ_c	• Concreto con agregado ligero	1.3
	• Concreto con agregado ligero y f'_{ct} especificado	$1.77\sqrt{f'c/f'c} \geq 1.0$
	• Concreto con agregado convencional	1.0

Es conveniente efectuar algunas aclaraciones en torno a la Tabla A. En primer lugar se denominan a aquellas que se ubican por lo menos 30 cm encima del concreto fresco y que, por lo tanto, tiene más burbujas de aire rodeando la varilla. En estos casos, la adherencia acero-concreto, se ve reducida por lo que el factor de ubicación del refuerzo es mayor que la unidad. En segundo lugar, el producto de los dos factores no debe exceder 1.7.

De la expresión (I) será igual a la distancia del centro de la varilla a la superficie de concreto mas cercana o a la mitad de la distancia centro a centro de las varillas o alambres desarrollados, la que sea menor.

El índice de refuerzo transversal será evaluado con la siguiente expresión:

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} \cdot f_{yt}}{105.6 s \cdot n} \quad (II)$$

donde:

A_{tr} : Área de refuerzo transversal en una longitud igual a s

f_{yt} : Límite elástico del refuerzo transversal

s : Espaciamiento máximo del refuerzo transversal a lo largo de l_d

n : Número de barras ancladas o empalmadas a lo largo del plano de deslizamiento

Para simplificar el diseño, el código permite considerar nulo el índice de refuerzo transversal, aunque los estribos estén presentes.

Para situaciones particulares que se presentan comúnmente en el diseño, el código del ACI propone como alternativa, expresiones más sencillas para evaluar la longitud de anclaje en (ACI-12.2) las cuales se presentan en la Tabla B.

Tabla B Expresiones para evaluar la longitud de anclaje en situaciones específicas

Casos Especiales	Alambres, varillas #6 y menores o alambre corrugado	Varillas #7 y mayores
Espaciamiento libre entre varillas desarrolladas o empalmadas no menor que d_b , recubrimiento mayor o igual que d_b y estribos superiores al mínimo a lo largo de l_d o espaciamento libre entre varilla desarrolladas o empalmadas no menor que $2d_b$ y recubrimiento mayor o igual que d_b .	$I_d = \frac{f_y \Psi_t \Psi_e}{6.6 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b$	$I_d = \frac{f_y \Psi_t \Psi_e}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b$
Otros casos	$I_d = \frac{f_y \Psi_t \Psi_e}{4.4 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b$	$I_d = \frac{f_y \Psi_t \Psi_e}{3.5 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b$

Si en las fórmulas anteriores reemplazamos los valores normales para $\Psi_t = 1$, $\Psi_e = 1$, y $\lambda = 1$ tendremos: para $f_c = 4\,200\text{ k/cm}^2$ y $f'_c = 210\text{ kt/cm}^2$ lo siguiente.

	$\leq \#6$	$\geq \#7$
Espaciamiento $\geq d_b$		
Recubrimiento $\geq d_b$		
Estribos a lo largo del anclaje o espaciamento $\geq 2d_b$	$I_d = 44 d_b$	$I_d = 55 d_b$
Otros casos	$I_d = 66 d_b$	$I_d = 82 d_b$

Nota: Si no se cumplen los requisitos de espaciamientos y estribos, las longitudes de anclaje deben ser 50% mayores.

En los miembros sometidos a flexión, la longitud de anclaje en tensión podrá ser reducida si el área de refuerzo requerida por análisis es menor que lo indicado (ACI-12.2.). En este caso el factor de reducción será: $A_{s\text{ requerida}}/A_{s\text{ provista}}$. Esta provisión no es válida cuando se requiera, específicamente, que el esfuerzo sea anclado para desarrollar su esfuerzo de fluencia. Tampoco es válida en zonas de riesgo sísmico. Siempre que se cuente con espacio suficiente para derrollar totalmente el refuerzo, es aconsejable no tomar en cuenta este factor para tener mayor margen de seguridad ante una eventual sobrecarga de la estructura.

8.8 Longitud de anclaje en varillas con acero en compresión

Debido a que el concreto no presenta figuras que generen una distribución irregular de esfuerzos, la longitud de anclaje en compresión es menor que la longitud de anclaje en tracción.

La longitud básica de anclaje a compresión, se calcula con las fórmulas que se dan a continuación, y luego se le afecta los factores correspondientes a cada caso en forma análoga al código ACI anterior al 95.

$$l_{dc} = 0.08 db \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

y deberá cumplirse:

$$l_{dc} \geq 0.004 db f_y$$

Factores que multiplican al valor l_{dc}

1. Factor de corrección por exceso de refuerzo. Si el refuerzo provisto es mayor que el requerido, multiplicar por:

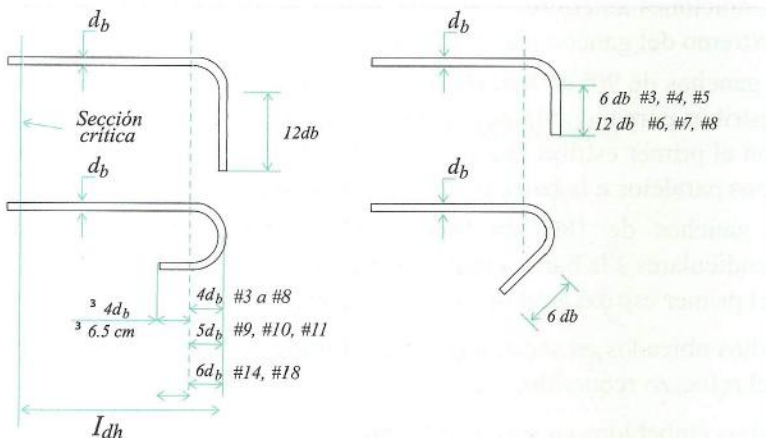
$$A_{s \text{ requerida}} / A_{s \text{ provista}}$$

2. Factor de corrección por refuerzo transversal. Si las varillas están sujetas por refuerzo transversal espiral de diámetro no menor a $1/4"$, y con paso menor que 10 cm, o por estribos de diámetro no menor al #4, y espaciados a menos de 10 cm, centro a centro, multiplicar por 0.75

3. $l_{dc} > 20 \text{ cm}$

8.9 Ganchos estándar

Los ganchos se utilizan cuando el espacio disponible en el elemento no es suficiente para desarrollar toda la longitud de anclaje del refuerzo. Se utilizan los ganchos estándar propuestos por el código del ACI. Asimismo, el código da las dimensiones para diferentes diámetros de varillas. Los ganchos sirven de anclaje sólo a varillas que se encuentran en tracción, no así para acero en compresión. El gancho a 135° es permitido en estribos en zonas sísmicas.



(a) Gancho estándar

(b) Gancho estándar para estribos

Es necesario tener mucho cuidado con las dimensiones del gancho, las que son muy importantes para asegurar su eficiencia. En el tramo recto se desarrollan esfuerzos de adherencia; y en la zona curva, esfuerzos de aplastamiento en el concreto. Puede fallar si no se cuenta con recubrimiento suficiente, en cuyo caso el concreto se desprende debido a los esfuerzos radiales que genera la presencia de las corrugaciones de la varilla, o si se produce aplastamiento del concreto adyacente a la porción curva del gancho.

La longitud de varilla utilizada para fabricar un gancho estándar, desarrolla aproximadamente la misma capacidad de adherencia que una varilla recta de la misma longitud; es decir, la curvatura del gancho no le agrega adherencia adicional al refuerzo. La falla se produce por aplastamiento del concreto en la porción curva.

Para calcular la longitud de anclaje del gancho estándar, se determina primero una longitud básica de anclaje, y luego esta es afectada por una serie de factores.

La longitud básica de anclaje de un gancho estándar

$$L_{dh} \geq \left[\frac{0.075 \psi_e f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} \right] \times d_b$$

Factores que afectan L_{hb} :

Para $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$, $\psi_e = 1$, $\lambda = 1$ es

$$l_{dh} = 318 \frac{d_b}{\sqrt{f'_c}} \quad (3-8)$$

Condición $L_{hb} \geq 8 d_b$, $L_{hb} \geq 15 \text{ cm}$

Factores que afectan la longitud básica de anclaje del gancho estándar.

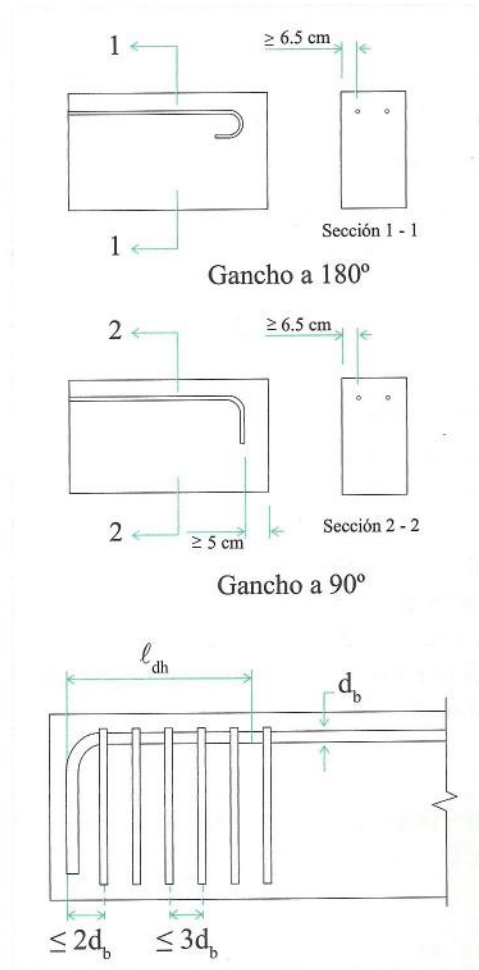
Condición	Factor
a) Ganchos a 180° fabricados con varillas iguales o menores a la #11 cuyo recubrimiento lateral es mayor que 6.5 y ganchos a 90° que satisfacen las condiciones anteriores y además tienen un recubrimiento detrás del extremo del gancho mayor que 5 cm.	0.7
b) Para ganchos de 90° en barras iguales o menores a la #11 encerrado por estribos perpendiculares a la barra con $s \leq 3d_b$ a todo lo largo de L_{dh} con el primer estribo ubicado a $\leq 2d$ de la cara del gancho o con estribos paralelos a la barra con $s \leq 3d_b$ a lo largo del gancho.	0.8
c) Para ganchos de 180° en barras #11 o menores con estribos perpendiculares a la barra a todo lo largo de L_{dh} y espaciados a $s \leq 3d_b$ con el primer estribo a $2d$ de la cara del gancho.	0.8
d) Ganchos ubicados en secciones donde el refuerzo provisto es mayor que el refuerzo requerido.	$\frac{A_{s \text{ requerida}}}{A_{s \text{ provista}}}$
e) Ganchos embebidos en concreto ligero.	1.3
d) Ganchos fabricados de acero con recubrimiento epóxico.	1.2

La longitud de anclaje con gancho debereá satisfacer (ACI-12.5.1):

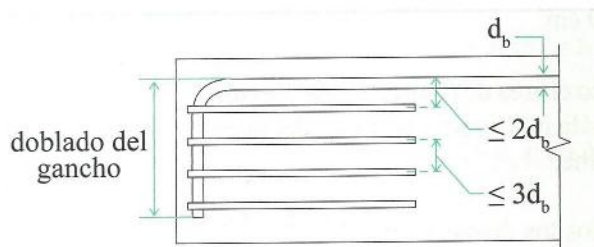
$$l_{dh} \geq 8d_b$$

y no deberá ser menor que 15 cm.

Condiciones que deben cumplir los ganchos estándar:



Estribos perpendiculares a la varilla principal



Estribos paralelos a la varilla principal

C. Empalme a compresión

A diferencia del empalme a tracción, la longitud del empalme a compresión es menor por no presentar agrietamientos.

El cálculo de empalme a compresión será:

a) Si $f_y < 4200 \text{ kg/cm}^2$ $\ell_s = 0.007 f_e d_b$

b) Si $f_y > 4200 \text{ kg/cm}^2$ $\ell_s = (0.013 f_y - 24) d_b$

Si $f'_c < 210 \text{ kg/cm}^2$ $\ell_{sf} = \ell_s \times 1.33$

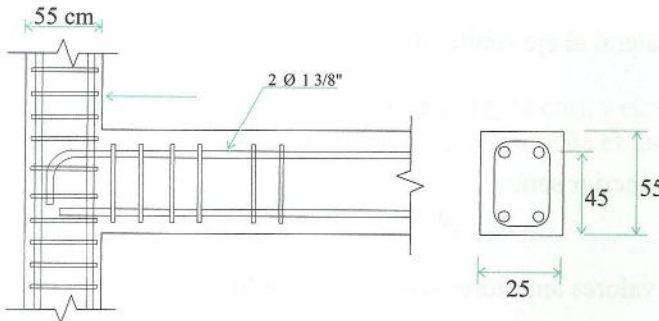
$\ell_{s\min} \geq 30 \text{ cm}$

8.11 Problemas de aplicación

Problema 1:

Se tiene una conexión viga-columna en un Edificio con estructura aporticada.

Las dimensiones de la viga son $L = 25 \text{ cm} \times h = 55 \text{ cm}$, así como $d = 45 \text{ cm}$, $M_u = 24.5 \text{ T-m}$, $A_s(-) = 18 \text{ cm}^2$, pudiendo usar $2 \phi 1 \frac{3}{8}"$, $A_s = 20.12 \text{ cm}^2$. La viga tiene cuatro estribos de $\phi 3/8"$ espaciados cada 7.5 cm, seguidos por estribos de $\phi 3/8"$ espaciados a 13 cm en la zona del apoyo. Se usará concreto del Peso Normal de $f_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, recubrimiento de 3.8 cm. Encontrar la mínima longitud de desarrollo ℓ_d a la que puedan ser cortadas las varillas negativas.



Solución:

$$\begin{aligned} \text{Espaciamiento horizontal entre varillas} &= 25 - 2(3.8 + 0.95 + 3.58) = 8.34 \\ &= 2.33 d_b \text{ para } \phi 1 \frac{3}{8}" \end{aligned}$$

$$\text{El recubrimiento será} \quad = 0.95 + 3.58 = 4.53 \text{ cm ó } 1.26 d_b \text{ para } \phi 1 \frac{3}{8}"$$

$$\begin{aligned} \text{Recubrimiento superior} \quad &10 - 3.58/2 = 8.21 \text{ cm} \\ &2.29 d_b \end{aligned}$$

Luego, tenemos que estos valores cumplen con los correspondientes a la parte (b) de la tabla 1; por lo tanto, para varillas superiores no pintadas y con concreto de peso normal, se tienen los valores $\alpha = 1.3$, $\beta = 1.0$ y $\lambda = 1.0$

$$I_d = \frac{f_y \psi_t \psi_e d_b}{5.31 \lambda \sqrt{f'_c}} = \frac{4200 \times 1.3 \times 1.0 \times d_b}{5.31 \times 1.0 \sqrt{280}}$$

$$I_d = \frac{4200 \times 1.3 \times 1.0 \times 3.58}{5.31 \times 1.0 \sqrt{280}} = 219.99 \text{ cm} = 220 \text{ cm}$$

Este valor $I_d = 220 \text{ cm}$ puede ser reducido considerado el valor exacto de acero necesario.

$$\text{Por lo tanto } I_d = \frac{220 \times 18}{20.12} = 196.82 \text{ cm}$$

Si se quiere tener un valor más afinado utilizando la fórmula inicial.

$$I_d = \frac{1}{3.54} \times \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \times \frac{\psi_t \psi_e \psi_s d_b}{\left(\frac{C + K_{tr}}{d_b} \right)}$$

- Espaciamiento entre varillas a centros $\phi 1 \frac{3}{8}$ "

$$25 - 2(3.8 + 0.95 + 3.58/2) = 13.08 \text{ cm}$$

$$13.08/2 = 6.54 \text{ cm}$$

- El recubrimiento lateral al eje central de varilla:

$$3.8 + 0.95 + 3.58/2 = 7.44 \text{ cm}$$

- El recubrimiento superior será:

$$h - d = 55 - 45 = 10 \text{ cm}$$

El menor de los 3 valores anteriores controla el diseño.

Luego $C = 6.54 \text{ cm}$

El agrietamiento potencial estará en el plano horizontal de las barras, y al calcular A_{tr} se usará el doble del área del estribo, considerando estribos de $\phi 1 \frac{3}{8}$ " y espaciados a 13 cm.

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} \times f_{yt}}{105.6(s)(n)} = \frac{0.713 \times 2 \times 4200}{105.6(13)(2)} = 2.18$$

$$\frac{C + K_{tr}}{d_b} = \frac{6.54 + 2.18}{3.58} = 2.435 < 2.5$$

Luego:

$$l_d = \frac{1}{3.54} \times \frac{4200}{\sqrt{280}} \times \frac{1.3 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{2.435} \times 3.581$$

$$l_d = 135.5 \text{ cm}$$

Considerando el área de acero exacta.

$$135.5 \times \frac{18}{20.12} = 121.22 \Rightarrow 121.22 \text{ cm} < 196.82 \text{ cm}$$

Esto significa que si usamos la fórmula general tendremos valores aproximados que con la fórmula simplificada.

Problema 2

Considerando el mismo modo del problema anterior, calcular la longitud de anclaje de barras doblada a 90° , con un recubrimiento de 5 cm a la cara exterior de la columna.

El ancho de la columna es 40 cm y el de las varillas son de ϕ 1 3/8"

Solución:

Se usará la fórmula siguiente

$$l_{hb} = 318 \frac{db}{\sqrt{f'_c}}$$

$$l_{hb} = \frac{318 \times 3.581}{\sqrt{280}} = 68.07 \text{ cm}$$

Considerando que el recubrimiento lateral excede las 2 1/2" (6.35 cm), y el recubrimiento bajo la barra doblada es adecuado, se aplicará según la tabla correspondiente el factor = 0.7 y el factor de relación por acero en exceso.

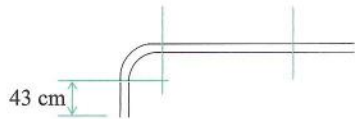
$$l_{dh} = 68.07 \times 0.7 \times \frac{18}{20.12} = 42.62 \text{ cm}$$

Teniendo una longitud disponible de:

$$55 - 42.62 = 12.38 \text{ cm}$$

Se necesitará un doblado mínimo igual a:

$$8 db = 8 \times 3.581 = 28.65 \text{ cm}$$



Con un radio de 15 cm, continuando la barra $12 d_b = 12 (3.581) = 43 \text{ cm}$

ESCALERAS

9.1 Generalidades

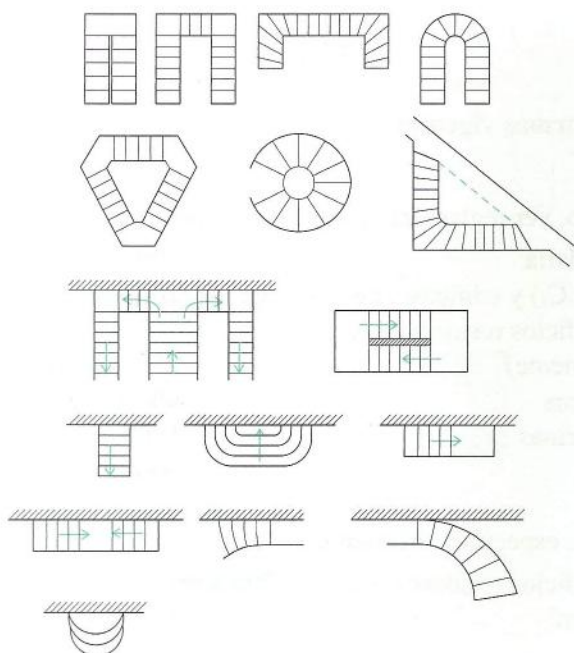
Las escaleras son elementos importantes en una edificación, las mismas que necesitan ser analizadas con detenimiento, no solamente como estructuras aislada en sí, sino también como parte de un todo, especialmente en el comportamiento sísmico. Es por eso que se requiere tomar en cuenta los criterios adecuados para que las escaleras se encuentren lo suficientemente aisladas, o ubicadas de tal manera que se pueda hacer un análisis con las consideraciones más aproximadas a la realidad.

Se tienen escaleras desde las estructuralmente más simples (1), como son las de un tramo o dos tramos, apoyadas longitudinalmente y diseñadas como una losa cualquiera con armadura en un solo sentido; escaleras apoyadas transversalmente (2); escaleras con escalones en voladizo (3); escaleras autoportantes (4); escaleras helicoidales (5). En este texto solo se estudian las escaleras tipo (1). Para los demás tipos de escaleras, ver el libro *Concreto armado II*, del mismo autor.

Podríamos mencionar, desde un punto de vista constructivo, que las escaleras vaciadas en sitio o las prefabricadas pueden ser en su totalidad del tramo, o por peldaños.

El siguiente esquema muestra algunas plantas de escaleras:

Esquema de algunos tipos de escaleras



9.2 Dimensionamiento de escaleras y cargas según las normas vigentes

a) Dimensionamiento:

- Los tramos de escalera tendrán como máximo 16 pasos continuos, sin descanso intermedio.
- Los descansos intermedios deberán tener una longitud mínima de 90 cm.
- Las escaleras en centros comerciales no tendrán más de 16 alturas, ni descansos menores al ancho del tramo. Sus anchos mínimos serán de 1.20 m y el máximo de 2.40 m.

L = Luz (m)

P = Paso

CP = Contra paso

t = $L/25 \sim L/20$ ó 3 a 4 cm a cada metro

p(min) = 25 cm

2CP + P = 60 ~ 64 cm

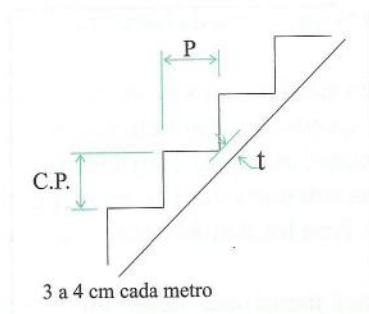
Contrapaso MIN

18 ~ 20 cm (secundarios)

13 ~ 15 cm (monumentales)

15 ~ 17.5 cm (edificios)

18 cm (max.) (locales comerciales)



Anchos mínimos:

Viviendas	1.00 m
Secundarias	0.80 m
Auxiliares o de servicio	0.70 m
Caracol	0.60 m
Edificios	1.20 m
Locales comerciales	1.20 m

b) Cargas según las normas vigentes:

1. Sobrecargas:

De acuerdo al uso, ver reglamento nacional de construcciones (R.N.C.)

• Escalera secundaria	200 K/cm ²
• Viviendas (R.N.C.) y edificios residenciales	200 K/cm ²
• Viviendas y edificios residenciales (se usa comúnmente)	250 – 300 K/m ²
• Edificios Públicos	400 K/cm ²
• Edificios de oficinas	500 K/cm ²
• Tribunas	500 K/m ²

Nota: el R.N.C. especifica solamente:

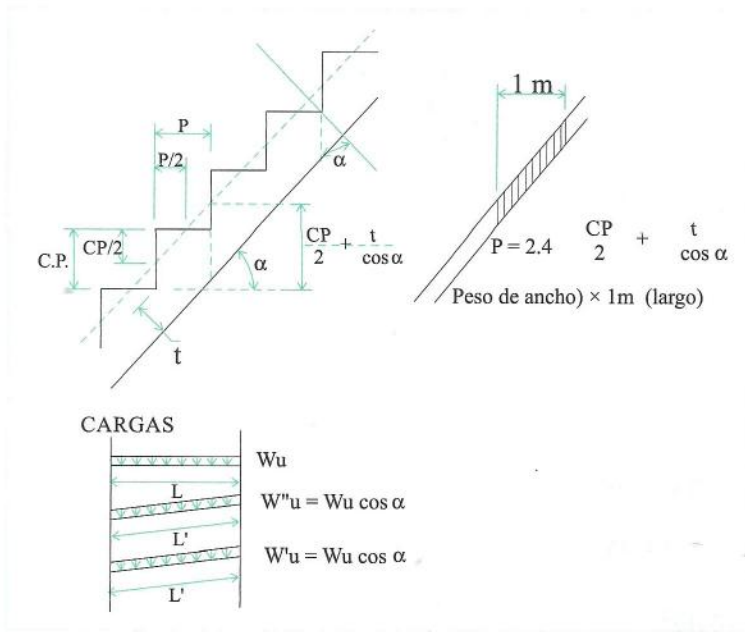
- Viviendas y edificios residenciales 200 K/m²
- Otros 500 K/m²

2. Acabados:

Se usa 100 K/m^2

3. Peso Propio:

Se utiliza el peso de la estructura.



9.3 Tipos de escaleras

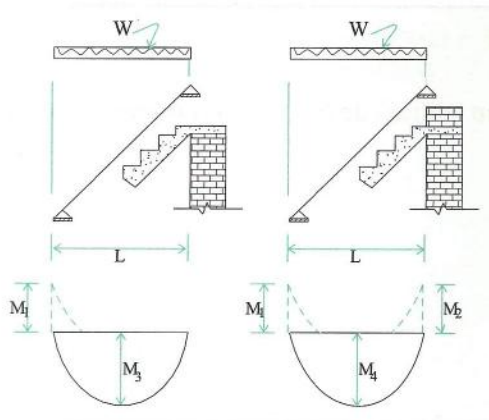
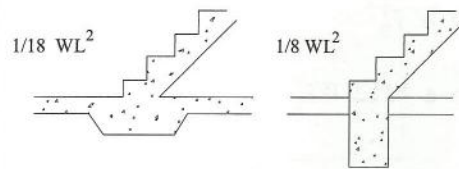
a) Escalera de un solo tramo

$$M_1 = 1/16 \text{ a } 1/12 WL^2$$

$$M_2 = 1/16 \text{ a } 1/12 WL^2$$

$$M_3 = 1/8 WL^2$$

$$M_4 = 10 WL^2$$



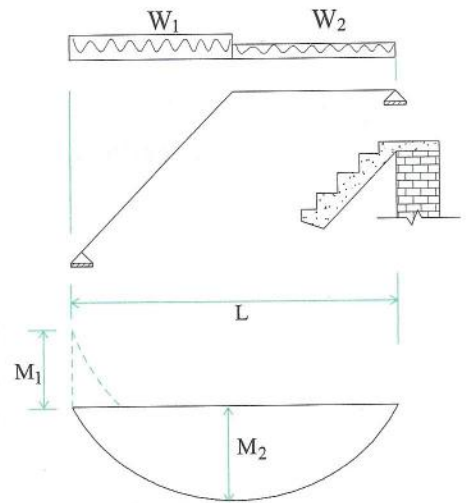
b) Escaleras de dos tramos:

I. Apoyo superior deslizante:

$$M_1 = 1/6 \text{ a } 1/12 \quad WL^2 \Rightarrow W \text{ ó } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$M_2 = 1/8 \quad WL^2 \quad \text{ó} \quad 1/8 \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right] L^2$$

M_1 = VER TIPO DE APOYO



II. Escalera con apoyos fijos:

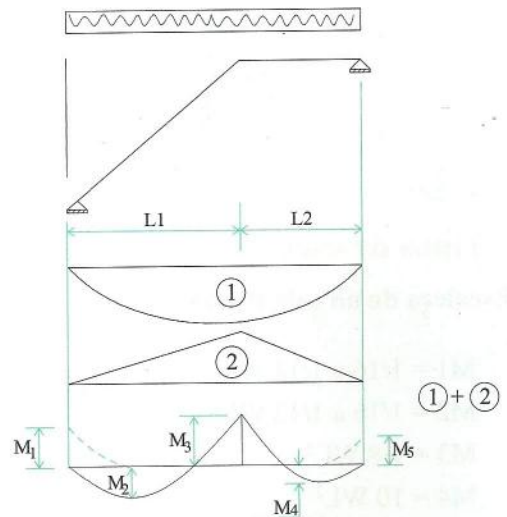
$$M_1 = 1/6 \text{ a } 1/12 \quad WL^2$$

$$M_2 = 1/10 \quad WL^2$$

$$M_3 = 1/9 \quad W \frac{(L_1 + L_2)^2}{2}$$

$$M_4 = 1/10 \quad W \quad L_2^2$$

$$M_5 = 1/16 \text{ a } 1/12 \quad WL_2^2$$



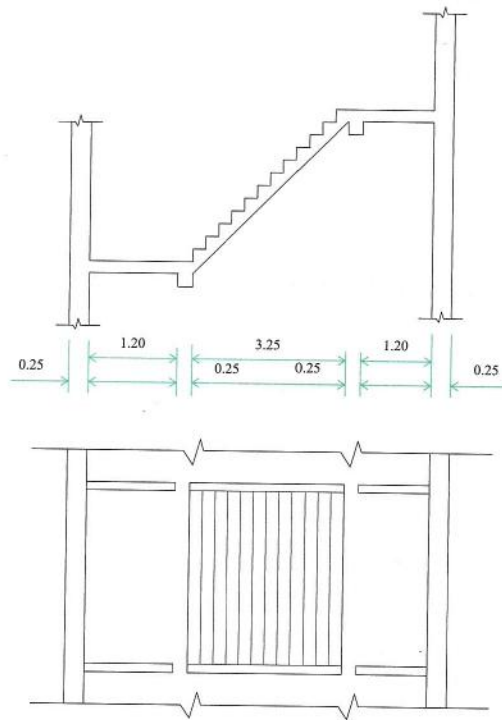
Ejemplo N° 1:

Diseñar una escalera para un edificio de oficinas con la rampa apoyada en vigas.

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$S/C = 500 \text{ K/m}^2$$



a) Predimensionado

- de 3 a 4 a cada metro: $3/100 = t/350$

$$t = 3 \times 3.50 = 10.5 \text{ cm}$$

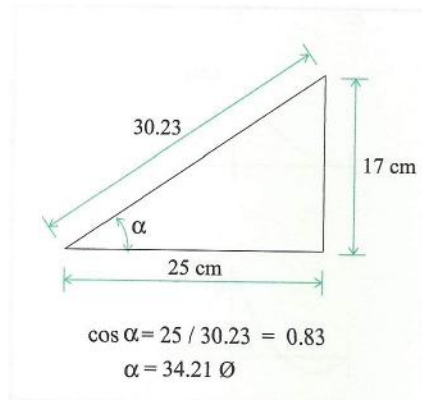
- $t = L/25$

$$t = \frac{325}{25} = 13 \text{ cm}$$

Usar 13 cm

$$t_1 = \frac{13}{\frac{25}{30.23}} = 15.72 \text{ cm}$$

$$h = \frac{17}{2} + 15.7 = 24.22 \text{ cm}$$



b) Cargas

$$p \times p = 2400(24.2) = 580.80 \text{ K/m}^2$$

$$\text{acabado } 100.0 \text{ K/m}^2$$

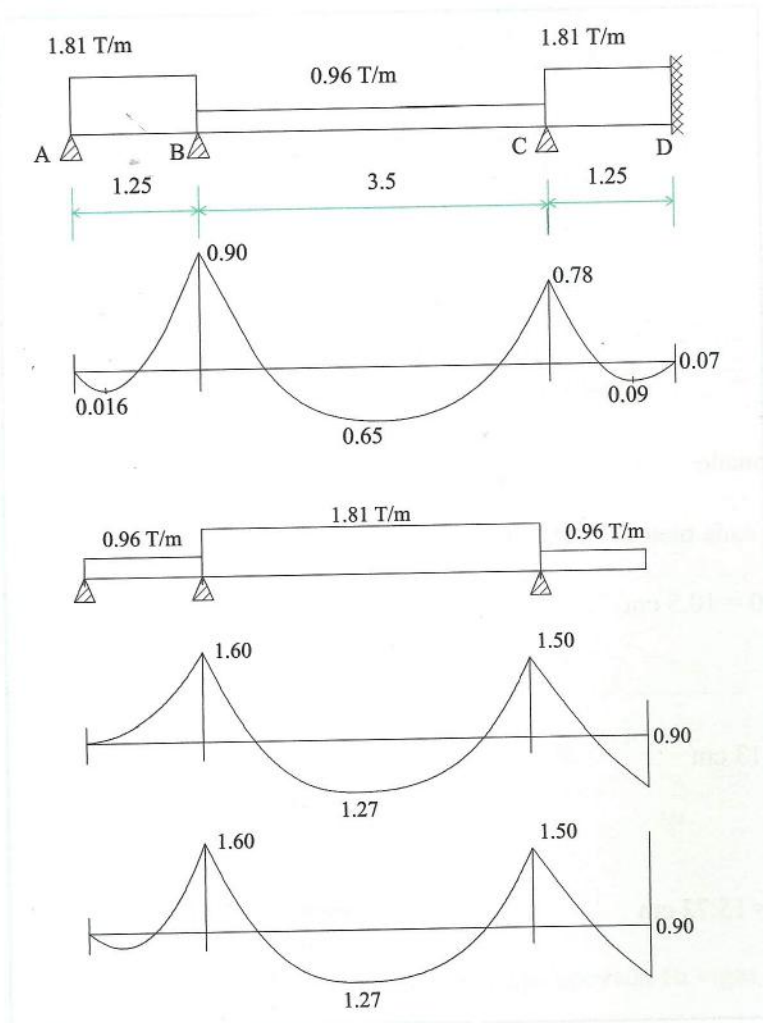
$$W_{cm} = 680.80 \text{ K/m}^2$$

$$W_{1u} = 1.4 (680.80) + 1.7(850) = 953.12 + 850$$

$$W_{1u} = 1803.12 \text{ K/m}^2$$

c) Calculando los momentos:

Por Cross y para diversos estados de carga.



- Encontrar áreas de acero

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } M_{MAX(-)} = 1.6 \text{ t - m} \\ d = 13 - 3 = 10 \text{ cm} \end{array} \right\} A_s = 4.5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } M_{\text{MAX}(+)} = 1.27 \text{ t} \cdot \text{m} \\ d = 10 \text{ cm} \end{array} \right\} A_s = 3.50 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s \text{ min}} = 0.0018 \times 100 \times 10 = 1.8 \text{ cm}^2/\text{m}$$

- Verificación de cortante (más crítico)

$$V = \frac{W_u l}{2} - \frac{1}{L} (M_{BC} + M_{CB})$$

$$V = \frac{1.8 \cos^2 \alpha \times 3.5}{2 \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{3.5} (1.6 + 1.5)$$

$$V = 2.18 - 0.74 = 1.44 \text{ Tm} / \text{m}$$

$$M + \frac{W_u X^2}{2} - V = 0$$

$$6 + \frac{1.81 X^2}{2} - 2.28 = 0$$

$$X = 0.87 \text{ m}$$

$$L_d = 0.87 + 0.10 = 0.97 \text{ usar } 1.00 \text{ m}$$

Chequeo por corte:

$$V_d = \frac{WL}{2} - Wd \cos^2 \alpha \frac{(L \cos \alpha - d)}{2}$$

$$V_d = 1.81 \cos^2 \alpha \frac{(3.5 \cos \alpha - 10)}{2} = 1.66 \text{ T} = V_u$$

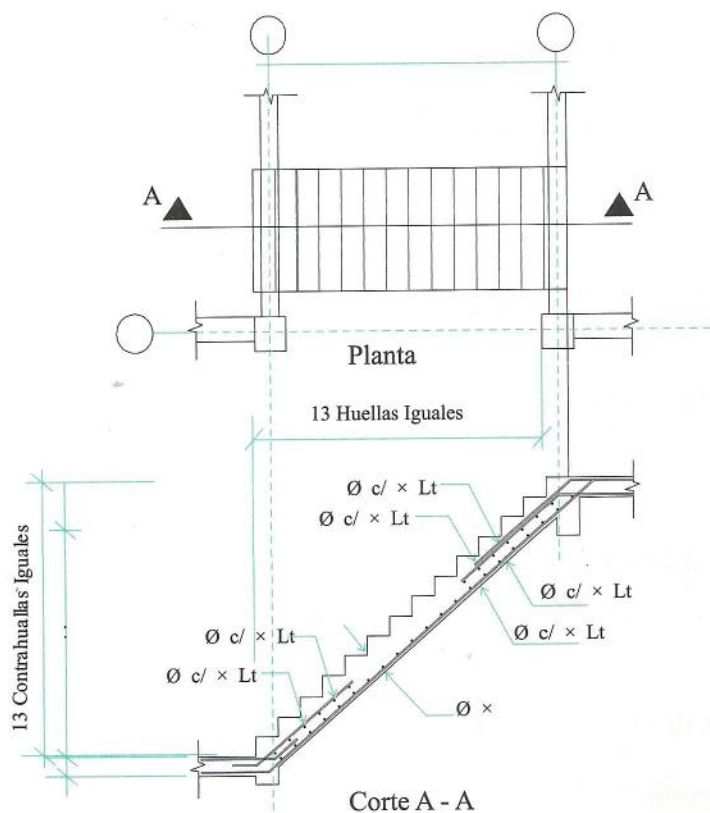
$$V_c = \phi \times 0.53 \sqrt{f'_c} = 0.85 \times 0.53 \sqrt{210}$$

$$V_c = 6.53 \text{ K} / \text{cm}^2$$

$$V_c = 6.53 \times 10 \times 100 = 6.5 \text{ tn}$$

$$V_c > V_u \quad \therefore \text{O.K.}$$

ESCALERA DE UN SOLO TRAMO (Armada longitudinalmente)



Ejemplo N° 2:

Diseñar una escalera de dos tramos

Luz de la rampa proyectada = 2 m

Luz del descanso = 1 m

$\alpha = 30^\circ$

Análisis de cargas

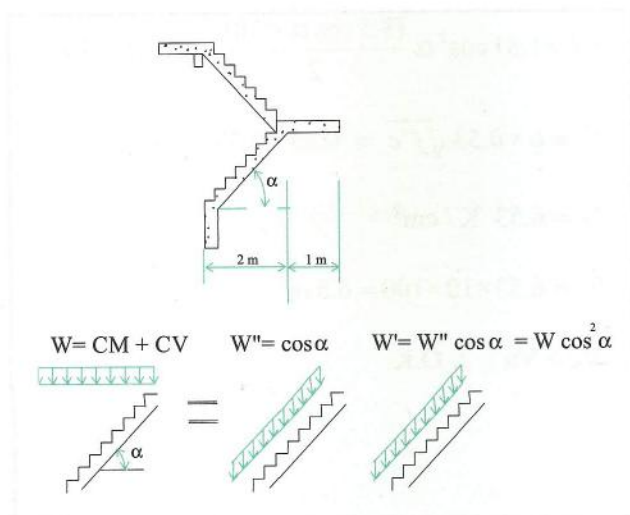
S/C = 200 K/m²

Acabados = 100 K/m²

$f_c = 210 \text{ K/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$

$W_u = 1.4W_{CM} + 1.7W_{CV}$



a) Predimensionado

$$L = 2 \text{ m}$$

$$t = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$$

$$t = \frac{200}{25} = 8 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{ Usar } t = 8 \text{ cm}$$

b) Cargas

$$\text{WCM} = \text{P.P} + \text{acabados}$$

$$\text{P.P} = 2400 \left(\frac{C.P}{2} + \frac{t}{\cos \alpha} \right)$$

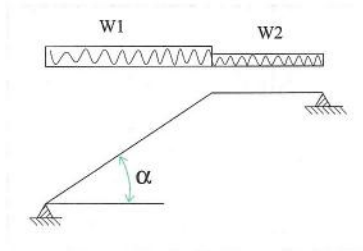
$$\text{P.P} = 2400 \left(\frac{0.175}{2} + \frac{0.08}{0.89} \right)$$

$$\text{P.P} = 425.52 \text{ K/m}^2$$

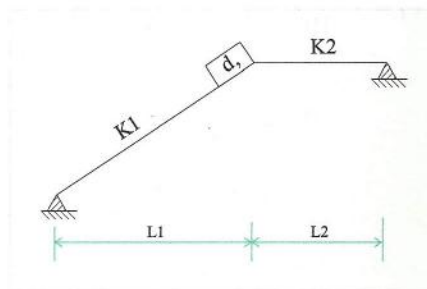
$$\text{WCM} = 425.5 + 100 = 525.5 \text{ K/m}^2$$

$$\text{W1D} = 1.4 (525.5) + 1.7 (200) = 1065.7 \text{ K/m}^2$$

$$\text{W2D} = 1.4 (292) + 1.7 (200) = 748.8 \text{ K/m}^2$$



c) Momentos



Cálculo de rigideces

$$K1 = \frac{I}{L_1} \times \frac{3}{4} \Rightarrow K1 = \frac{I}{L_1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$K1 = \frac{I}{L_1} \times \frac{3}{4} \Rightarrow K2 = \frac{I}{L_2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$d1 = \frac{0.5}{1.5} = 0.333$$

$$(Me)1 = 1/8 \times 22 \times 1065.7 = 532.85 \text{ k - m}$$

$$(Me)2 = 1/8 \times 12 \times 748.8 = 93.6 \text{ k - m}$$

$$(Me)1 - (Me)2 = 439.25 \text{ k - m}$$

$$M2(-) = 532 - 0.333(439) = 386 \text{ k - m}$$

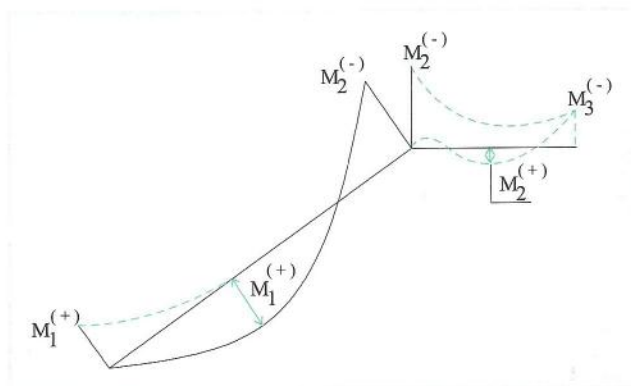
$$M1(+) = 532 - 386/2 = 339 \text{ k - m}$$

$$M2(+) = \text{queda negativo (no existe)}$$

$$M1(-) = \frac{W1 L1^2}{16} = \frac{1065.7 \times (2)^2}{16} = 266.43 \text{ k - m}$$

$$M3(-) = \frac{W2 L2^2}{16} = \frac{748.8 \times (1)^2}{16} = 46.8 \text{ k - m}$$

$$M2(+) = \frac{W2 L2^2}{10} = \frac{748.8 \times (1)^2}{10} = 74.9 \text{ k - m}$$



Cálculo de áreas de acero

Usando las fórmulas siguientes:

$$M_u = \phi A_s f_y (d - a/2) \phi = 0.9$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$A_{smin} = 0.0018 \times 5 \times 100 = 0.9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Usar $d = t - \text{recubrimiento}$

$$d = 8 - 3 = 5 \text{ cm}$$

$$M1(+) = 339 \text{ km} \quad A_s = 1.88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$M2(+) = 74.9 \text{ k - m} \quad A_s = 0.40 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \text{usar } 0.9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$(-) = 386 \text{ k - m} \quad A_s = 2.16 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$(-) = 266.43 \text{ k - m} \quad A_s = 1.46 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$M3(-) = 46.8 \text{ k - m} \quad A_s \Rightarrow \text{usar } 0.9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Acero de repartición transversal: $A_s = 0.9 \text{ cm}^2/\text{m}$

Verificación de corte a la distancia "d"

$$V_d = \frac{WL}{2 \cos \alpha} - W_d = 1.07 \cos^2 (2/2 \cos \alpha - 0.05)$$

$$V_d = 0.88 \text{ Tn}$$

$$V_c = \phi 0.53 \sqrt{210} \times 100 \times 5 = 3.26 \text{ Tn}$$

$$V_c > V_u \quad \therefore \text{es espesor adecuado}$$

COLUMNAS

10.1 Generalidades

Las columnas son elementos sometidos a compresión y flexión.

- Por la forma geométrica de su sección pueden ser circulares, cuadradas, rectangulares, octogonales y en forma de L (estas últimas no son muy recomendables para diseñar, debido a su complicación).
- Por la forma del refuerzo transversal son estribadas y zunchadas.

Estribadas: Columnas cuyos aceros longitudinales son amarrados, estribados o ligados con soportes unitarios llamados estribos o ligaduras.

Zunchadas: Columnas que presentaban sus aceros longitudinales sujetos o amarrados mediante espirales continuos, llamados zunchos.

Pedestales: Son elementos relativamente pequeños, cuya relación de lado menor (o diámetro) a altura debe ser como máximo de 1 a 3, estos elementos no llevan armadura; por lo tanto, no se diseñarán como columnas.

Todas las columnas anteriormente descritas pueden diseñarse estribadas o zunchadas, excepto aquellas con forma de L, que solamente puede ir estribadas.

10.1.1 Dimensiones de diseño para elementos sometidos a compresión

- a) Los reglamentos ACI de 1971, y los posteriores, no especifican dimensiones mínimas para columnas. Los anteriores al ACI-71 recomendaban lo siguiente, lo cual podría usarse de alguna manera como referencia:
 - En columnas rectangulares, la dimensión menor debe medir por lo menos 20 cm, y la sección de la columna no será menor de 620 cm².
 - En columnas circulares el diámetro no será menor que 25 cm.
- b) La norma ACI especifica:
 - Para elementos en compresión aislados, con refuerzo en espiral múltiple (dos o más espirales entrelazadas), su dimensión transversal debe considerarse hasta los bordes extremos del espiral, más el recubrimiento mínimo indicado en el capítulo anterior.
 - Para elementos en compresión contruidos monolíticamente con los muros, se considerará una sección transversal igual a la dimensión exterior de anillos más 4 cm.
 - Para elementos de sección circular equivalente, en lugar de usar el área total para el diseño, puede reemplazarse áreas de forma cuadrada octogonal, etc., por una sección circular con diámetro igual a la menor dimensión lateral de la sección verdadera. Los porcentajes de acero y resistencia de diseño deberán basarse en dicha sección circular total.

- Para un elemento sujeto a compresión con sección transversal mayor que la requerida por consideraciones de carga, para efectos de determinar el refuerzo mínimo y la resistencia de diseño, pueden emplearse un área efectiva reducida, la cual no debe ser menor que $1/2$ (área total).

10.1.2 Límites del refuerzo (áreas de acero)

- El refuerzo estará en los siguientes límites
 $0.01 A_g \leq A_s \leq 0.08 A_g$ (ACI)
 $0.01 A_g \leq A_s \leq 0.06 A_g$ (ININVI)
- El mínimo número de varillas longitudinales en una sección será:
 En anillos circulares o cuadrados 4 varillas
 En anillos triangulares 3 varillas
 En anillos confinados por espirales 6 varillas
- La relación del refuerzo en espiral será menor que:

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}$$

Donde:

ρ_s = Relación del volumen de refuerzo en espiral al volumen total del núcleo (medido desde el diámetro exterior del espiral) de un elemento reforzado con un espiral sujeto a compresión).

A_g = Área total de la sección (cm^2).

A_c = Área del núcleo de un elemento sujeto a compresión, reforzado con espiral medida hasta el diámetro exterior del espiral (cm^2).

A_s = Área del refuerzo a tracción (cm^2).

A_s = Área total del refuerzo longitudinal (cm^2).

10.2 Tipos de columna

Desde el punto de vista del análisis las columnas, estas pueden ser **cortas** y **largas**.

10.2.1 Columnas cortas

Son columnas cuyo análisis se hace solamente en función de la carga y momento últimos: la resistencia de los materiales y las dimensiones de la sección transversal, debido a que su carga última no se reduce por efecto de deformaciones de flexión, pero la esbeltez debe cumplirse:

- Columnas de pórticos sin desplazamiento (antes arriostradas)
 Cuando $Kl_u/r \leq 34 - 12 M_1/M_2$
 ó $Kl_u/r \leq 40$

- Columnas de pórticos con desplazamientos (antes no arriostradas)
Cuando $Klur/r \leq 22$

Donde:

K = Coeficiente de esbeltez (se calcula con monograma, ver en columnas largas).

h = Altura de la columna.

r = Radio de giro en el sentido de la flexión.

M_1, M_2 = momentos en extremos debe escogerse $M_1 < M_2$

En pórticos sin desplazamiento y para verificar resistencia de estabilidad

$$\beta_d = \frac{\text{max. carga sostenida amplificada}}{\text{max. total amplificada}}$$

En forma aproximada se puede tener $\beta_d = 0.6$

En pórticos con desplazamientos será igual:

$$\beta_d = \frac{\text{max. corte sostenido amplificado}}{\text{max. corte total amplificado}}$$

Para casos de sismos se puede tener $\beta_d = 0$

Para empuje se puede tomar $\beta_d = 1$

El diseño de columnas cortas se fundamenta, en primer lugar, en la resistencia de su sección transversal, la cual debe satisfacer los requerimientos de esfuerzo y deformación ante sollicitaciones de carga y momentos (P_n, M_n), las cuales serán multiplicadas por factores de reducción " ϕ " para obtener los esfuerzos del diseño ($\phi P_n, \phi M_n$).

El valor de " ϕ " aumenta linealmente, comenzando de elementos sometidos a compresión $\phi = 0.75$ (con refuerzo en espiral) ó $\phi = 0.70$ (otros elementos) hasta el valor de $\phi = 0.90$, para elementos sometidos a flexión.

Para elementos con $f_y \leq 4200 \text{ K/cm}^2$ con refuerzo simétrico y $(h - d' - d_s)/h$ no sea menor de 0.70, ϕ , puede aumentar linealmente hasta 0.90, en tanto que ϕP_n disminuye de $0.10 f'_c A_g$ ó ϕP_b hasta "0".

Donde:

h = Peralte total del elemento (cm)

d' = Distancia de la fibra extrema en compresión al centroide del "Ag" a compresión.

d_s = Distancia de la fibra extrema en tracción al centroide del "As" a tracción.

P_n = Resistencia a la carga axial nominal a una excentricidad dada.

M_n = Resistencia al momento nominal.

P_b = Resistencia a la carga axial nominal en condiciones de deformaciones balanceada.

- A partir de (ϕP_n , ϕM_n) puede elaborarse el Diagrama de Interacción de esfuerzos, que define el esfuerzo útil de una sección Fig. 10.1

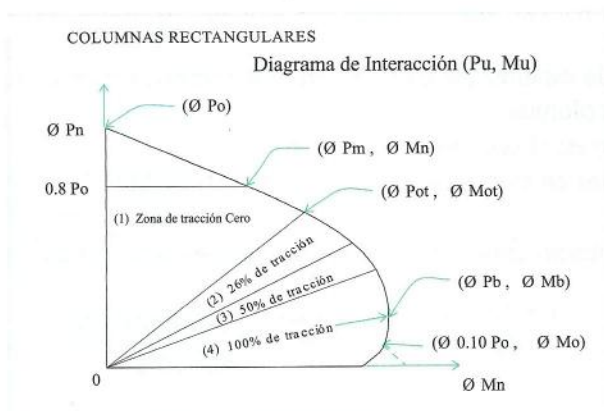


Fig. 10.1

Para $f_y = 60 \text{ Ksi} = 4200 \text{ kg/cm}^2$ } $15 \text{ Ksi} = 1050 \text{ kg/cm}^2 = 25 \%$
 si $\quad \quad \quad = 4200 \text{ kg/cm}^2 = 100 \%$ } $30 \text{ Ksi} = 2100 \text{ kg/cm}^2 = 50 \%$

- 1) Zona de tracción = 0, traslapes mínimos al 25% en tracción ($f_s = 15 \text{ Ksi}$) compresión total ($f_s = -60 \text{ Ksi}$), traslapes finales por aplastamiento al 50 %.
- 2) Zona de cero a 25 % en tracción, traslapes mínimos al 50 % en tracción, traslapes finales por aplastamiento al 50 %.
- 3) Zona de 25 % al 50 % en tracción, traslapes al 100 % en tracción.
- 4) Zona del 50 % al 100 % en tracción, traslapes al 100 % en tracción.

- La máxima deformación en la fibra extrema a compresión del concreto es 0.003.
- No se toma en cuenta la resistencia a tracción del concreto.
- Las **excentricidades mínimas de diseño** son consideradas por esbeltez de miembros en compresión, con momentos “cero” o muy pequeños.
- El criterio era reducir el esfuerzo de diseño por carga axial, debido a que debiera considerarse las excentricidades momentáneas que generen momentos. Estas reducciones son las siguientes, tanto para elementos vaciados en sitio y los prefabricados:

$P_n (\text{máx}) = 0.85 (P_u)$ para miembros reforzados con espirales.

$P_n (\text{máx}) = 0.80 (P_u)$ para miembros reforzados con estribos.

De esta manera desaparece la duda que cuando se obtenga momentos mínimos grandes para columnas con secciones grandes, estos momentos se deberán o no repartir en los elementos que se conecten.

Los puntos significativos en un diagrama de intersección son:

- | | |
|---|--------------------|
| 1) Compresión pura | P_u (Min = 0) |
| 2) Carga axial máxima permitida por el reglamento | $P_n = \text{máx}$ |
| 3) Condición balanceada | P_b, M_b |
| 4) Flexión pura | $(P_n = 0), M_n$ |

En algunos gráficos o tablas de cálculo se tiene para (P_n, M_n)

$$P_n = \frac{P_u}{\phi}$$

$$M_n = \frac{M_u}{\phi}$$

10.2.2 Análisis de columnas rectangulares con acero en dos caras

- Analizar la sección cargada excéntricamente a la carga última se asume que la profundidad del eje neutro, es menor que el peralte total.
- Similarmente a las vigas, pueden ocurrir fallas a tracción o compresión, dependiendo si el acero a tracción alcanza la resistencia a la cedencia o no.
- A diferencia de las vigas, no puede evitarse la falla a compresión limitando el área de acero, porque el tipo de falla depende de la magnitud de carga axial.
- Generalmente, el acero a compresión en las columnas cargadas excéntricamente a la carga última alcanza la resistencia de cedencia, excepto cuando se utiliza acero de alta resistencia, cuando la magnitud de la carga es baja, o cuando las dimensiones de las columnas son pequeñas, de tal manera que el valor "d" es relativamente grande.
- Normalmente, se supone que el acero a compresión está cediendo, y luego se comprueba que se ha alcanzado la deformación por cedencia.
- De la Fig. 10.2, y suponiendo el acero en compresión $f'_s = f_y$, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio por Suma de fuerzas internas:

$$P_u = 0.85 f'_c ab + A's f_y - A_s f_y \quad \text{I}$$

Tomando momentos respecto al acero a tracción, se obtiene la siguiente ecuación:

$$P_u e' = 0.85 f'_c ab (d - 0.5a) + A's f_y (d - d') \quad \text{II}$$

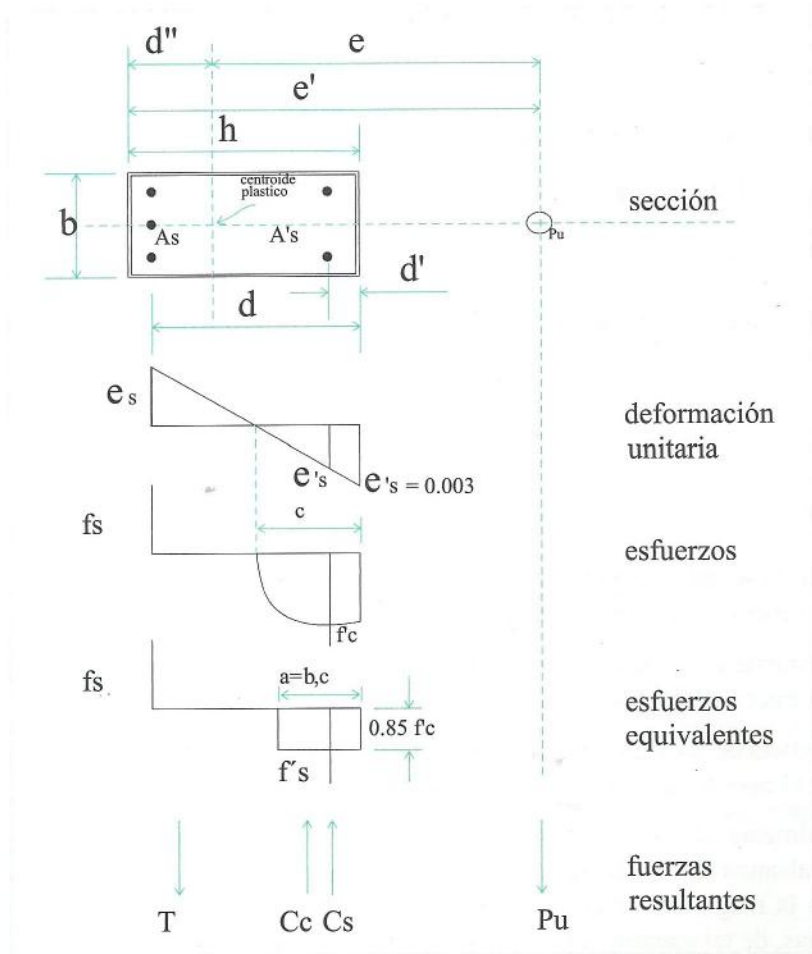


Fig. 10.2

P_u = Carga última

e' = excentricidad de P_u medida desde el centroide de acero a tracción.

f_s = esfuerzo en el acero a tracción.

- El centroide plástico es el centroide de resistencia de la sección, si se comprime todo el concreto al esfuerzo máximo ($0.85 f'_c$) y se comprime todo el acero al esfuerzo de cedencia (f_y), con deformación uniforme en la sección;

A veces es más conveniente usar (e) desde el centroide plástico para P_u .

- Resumiendo:

Centroide plástico es el punto de aplicación de la carga externa P_o , que produce condición de falla por carga axial. Ver Fig. 10.3.

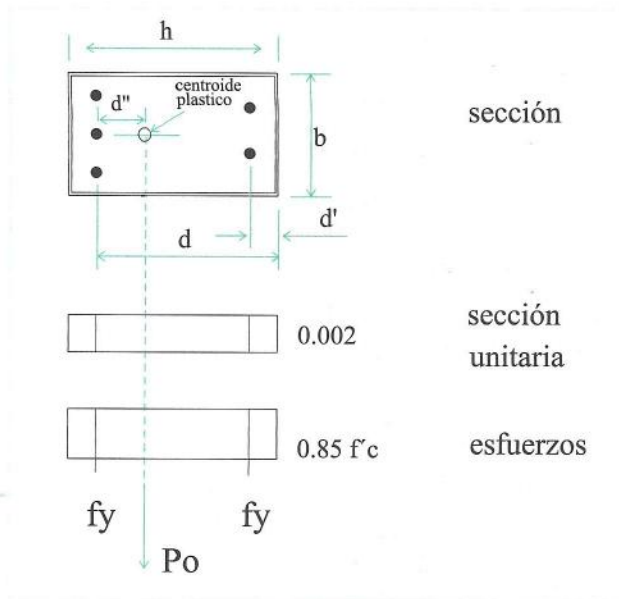


Fig. 10.3

De la Fig. 10.3, tomando momentos de las fuerzas internas alrededor del eje centroide del acero del lado izquierdo e igualándolos al momento de la fuerza resultante, tenemos:

$$0.85 f'_c b h (d - 0.5 h) + A's f_y (d - d') = [0.85 b h f'_c + \{A_s + A's\} f_y] d''$$

$$d'' = \frac{0.85 f'_c b h (d - 0.5 h) + A's f_y (d - d')}{0.85 f'_c b h + (A_s + A's) f_y} \quad \text{III}$$

Nota: Para columnas armadas simétricamente, el centroide plástico corresponde al centro de la sección transversal.

Tomando momentos respecto al centroide plástico en una columna con carga excéntrica, se tiene (ver Fig. 10.3).

$$P_u, e = 0.85 f'_c a b (d - d'' - 0.5 a) + A's f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d'' \quad \text{IV}$$

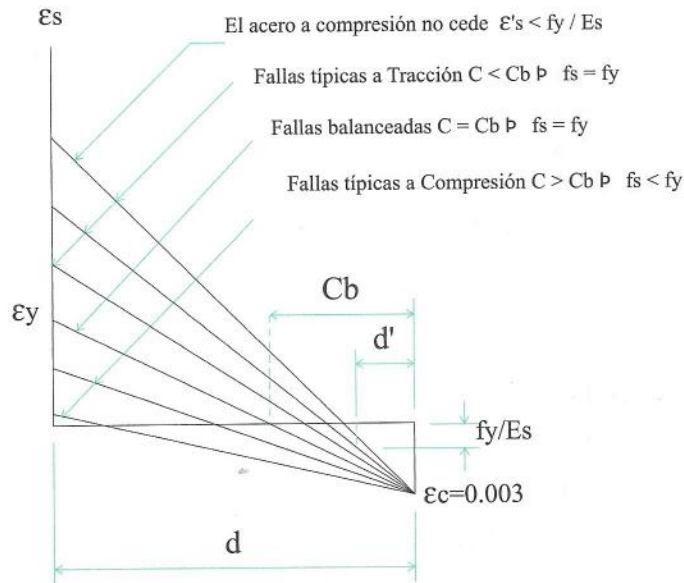


Fig. 10.4 Diagrama de deformaciones para fallas de columnas con "P y M"

Falla balanceada: se produce cuando, al mismo tiempo, fluye el acero en tracción y el concreto se deforma 0.003 por compresión en su fibra extrema, obteniéndose las siguientes igualdades:

$$\frac{0.003}{C_b} = \frac{\frac{f_y}{E_s}}{d - C_b} \quad \text{V}$$

$$C_b = \frac{0.003 E_s}{f_y + 0.003 E_s} \times d \quad \text{VI}$$

$$a_b = \beta_1 C_b = \frac{0.003 E_s}{f_y + 0.003 E_s} \beta_1 d \quad \text{VII}$$

Para esta condición de carga y momento para falla balanceada (P_b) y ($P_b \times C_b$), se sustituye en las ecuaciones (I) y (IV) los valores de $f_s = f_y$ y a_b VII

Falla a tracción: Cuando $P_u < P_b$ $C < C_b$ del diagrama de deformación Fig. 10.4 $\epsilon_s > f_y / E_s$ para este caso el acero en tracción fluye y se aplican las ecuaciones (I) y (IV) haciendo $f_s = f_y$

Falla a compresión: Cuando $P_u > P_b$ $C > C_b$ del diagrama de deformación Fig. 10.4 $\epsilon_s < f_y / E_s$. En este caso, el acero en tracción no fluye y del mismo diagrama encontramos el valor de f_s .

$$f_s = \epsilon_s E_s = 0.003 \frac{d-c}{c} E_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} E_s$$

Esta ecuación se sustituye para $f's$ en las ecuaciones (I) y (IV). Debido a que en estas ecuaciones (I) y (IV) se asume que el acero en compresión está fluyendo ($f's = f_y$) del diagrama de deformación, tenemos:

$$\epsilon's = 0.003 \frac{c-d'}{c} \geq \frac{f_y}{E_s}$$

Si el acero en compresión no fluye, tendremos el siguiente valor $f's$, obtenido del diagrama de deformaciones, el cual se debe sustituir por f_y para el acero en compresión en las ecuaciones anteriores.

$$f's = \epsilon's E_s = 0.003 \frac{c-d}{c} E_s = 0.003 \frac{a-\beta_1 d'}{a} E_s$$

Diagrama de Interacción P_u, M_u (Ver Fig. 10.5)

- Es la mejor forma de ilustrar las combinaciones P_u, M_u que provocan la falla.
- Para carga concentrada P_o' de compresión axial ($M'u = 0$) Punto (d).
- El tramo db pertenece al rango de excentricidades pequeñas, donde la falla se produce por **compresión**.
- El punto b representa la condición balanceada al actuar, y simultáneamente $P'b$ y el correspondiente $M'b$. El concreto alcanza su deformación de 0.003 en compresión, simultáneamente que el acero alcanza su esfuerzo de fluencia f_y .
- El tramo bc es la zona en la cual la falla se inicia por fluencia del acero a tracción, posteriormente fallará el concreto a compresión.
- El punto c es referido a la capacidad de momento a flexión pura $M'o$ cuando $P'o$ y $e \Rightarrow \infty$
- Toda recta del origen, a cualquier punto de la curva al origen, tiene una pendiente cuyo recíproco representa la excentricidad respectiva. $e = M'u/P'u$

COLUMNAS

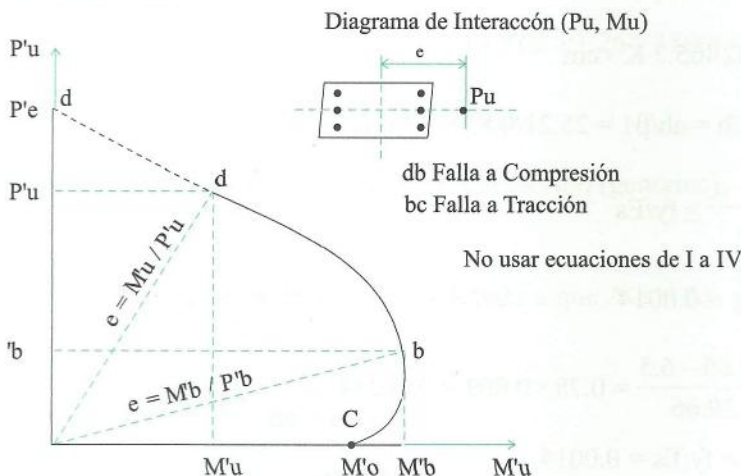


Fig. 10.5

Ejemplo:

Calcular el intervalo de carga y excentricidades posibles de falla para la sección ideal.

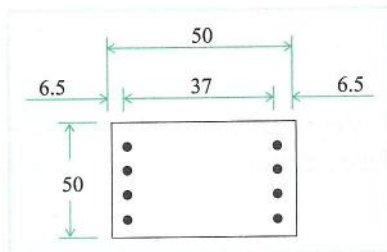
$$A_s = 26 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = 26 \text{ cm}^2$$

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

**Falla balanceada:**

- Suponer: el acero a tracción y a compresión fluyen $f_s = f_y$

$$ab = \frac{0.003 E_s}{f_y + 0.003 E_s} \beta_1 d = \frac{0.003 \times 2 \times 10^6}{2800 + 0.003 \times 2 \times 10^6} \times 0.85 \times 43.5$$

$$ab = 25.21 \text{ cm}$$

- Las fuerzas del acero se anulan debido a que $A_s = A'_s$ y $f_s = f_y$

Luego: $P_b = 0.85 f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s = 0.85 \times 210 \times 25.21 \times 50$

$$P_b = 224999.25 \text{ kg}$$

- Por ser el refuerzo simétrico, el centroide plástico está en el centro de la sección.

$$d'' = b - b/2 - 6.5 = 18.5 \text{ cm}$$

$$P_b \times C_b = 0.85 f'_c ab b (d - d'' - 0.5 a) + A'_s f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d''$$

$$P_b \times C_b = 0.85 \times 210 \times 25.21 \times 50 (43.5 - 18.5 - 0.5 (25.21)) + 26 \times 2800 (43.5 - 6.5 - 18.5) + 26 \times 2.80 \times 18.5$$

$$P_b \times C_b = 5482465.7 \text{ K - cm}$$

$$c = a/\beta_1 \Rightarrow C_b = ab/\beta_1 = 25.21/0.85 = 29.66 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c-d}{c} \geq f_y/E_s$$

$$f_y/E_s = \frac{2800}{2 \times 10^6} = 0.0014$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{29.66 - 6.5}{29.66} = 0.78 \times 0.003 = 0.00234$$

$$\epsilon'_s = 0.00234 > f_y/E_s = 0.0014$$

∴ El acero en compresión fluye tal como se asumió para la gratificación del diagrama de Interacción el punto $(P_b, P_b, e_b) = \text{Punto B} \Rightarrow$ ver al final del ejemplo.

Falla a tracción:

$$P_u < P_b$$

Luego $f_s = f_y$ (acero en tracción)

- Asumiendo un “ P_u ” cualquiera tal que $P_u < P_b = 224\,999.3 \text{ kg}$
- $P_{uT} = 130\,000 \text{ kg}$ (asumido, puede ser cualquier otro que cumpla $P_u < P_b$)
- Además, suponemos que el acero en compresión también fluye.

Luego usar: $P_{uT} = 0.85 f'_c a b + A'_s f_y - A_s f_s$

$$a = \frac{A_s f_s - A'_s f_y + P_{uT}}{0.85 f'_c b} = \frac{26 \times 2800 - 26 \times 2800 + 130\,000}{0.85 \times 210 \times 50}$$

$$a = 14.57 \text{ cm}$$

$$c = a/\beta_1 = \frac{14.57}{0.85} = 17.14 \text{ cm}$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{17.14 - 6.5}{17.14} = 0.0018$$

$$\epsilon'_s = 0.0018 > f_y/E_s = 0.0014$$

∴ El acero a compresión fluye tal como se asumió.

Por lo tanto: para $f_s = f_y$ $d'' = 18.5 \text{ cm}$ y $A_s = A'_s$

$$P_{uT} \cdot e_T = 0.85 f'_c a b (d - d'' - 0.5 a) + A'_s f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d''$$

$$P_{uT} \cdot e_T = 0.85 \times 210 \times 14.57 \times 50 (43.5 - 18.5 - 14.57/2) + 26 \times 2800 (43.5 - 6.5)$$

$$P_{uT} \cdot e_T = 4\,997\,209.7 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

- El punto $(P_{uT}, P_{uT} e_T) = \text{Punto c}$ en el diagrama de interacción (genérico)

En el límite:

Cuando $P_u \Rightarrow 0$ y $e \Rightarrow \infty$ (caso de flexión pura) debido a que $A'_s = A_s$, y que el concreto transmite alguna compresión $f'_s < f_y$.

$$f'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} \quad \epsilon'_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \quad E_s = \epsilon'_s E_s$$

$$f'_s = 0.003 \frac{a - 0.85 \times 6.5}{a} \times 2 \times 10^6 = 6000 \frac{a - 5.53}{a}$$

Reemplazando $f's$ en la siguiente ecuación ($f's$ por f_y)

$$P_u = 0.85 f'c ab + A's f_y - A_s f_s = 0 \quad (P_u \Rightarrow 0)$$

$$P_u = 0.85 \times 210 \times 50 a + 26 \times 6000 \frac{a-5.53}{a} - 26 \times 2800 = 0$$

Solucionando: $a = 6.22$ cm

Luego:

$$f's = 6000 \frac{6.22 - 5.53}{6.22} = 665.6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned} M_u = P_u e &= 0.85 \times 210 \times 6.22 \times 50 (43.5 - 18.5 - 6.22/2) \\ &+ 26 \times 6656 (43.5 - 18.5 - 6.5) + 26 \times 2800 \times 18.5 \\ &= 2880701.12 \text{ K} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

- El punto (P_{uo} , $P_{uo} e$) = Punto "d" en el diagrama de interacción.

Falla a compresión:

$$P_u > P_b \quad \text{Luego} \quad f_s < f_y$$

- Asumiendo un P_u tal que $P_u > P_b - 224999.3 \text{ kg}$

$$P_{uc} = 360000 \text{ kg} \quad (P_{uc} \text{ asumido debe cumplir } P_u > P_b)$$

- También consideramos que el acero en compresión fluye para $P_u = P_b$ o para cualquier carga superior a esa.
- El acero a tracción no cede.

$$f_s = \epsilon_s \times E_s = 0.003 \frac{d-c}{c} E_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} E_s$$

$$f_s = 6000 \frac{36.98 - a}{a}$$

Además tenemos la siguiente ecuación:

$$P_u = 0.85 f'c ab + A's f_y - A_s f_s$$

$$3600 = 0.85 \times 210 \times a \times 50 + 26 \times 2800 - 26 \times 6000 \frac{36.98 - a}{a}$$

Resolviendo: $a = 33.65$ cm

$$\text{Luego: } f_s = 6000 \frac{36.98 - 33.65}{33.65} = 593.76 \text{ K/cm}$$

Usamos la ecuación:

$$P_u \varphi = 0.85 f'_c ab (d - d'' - 0.5 a) + A_s' f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d''$$

$$P_u \varphi = 0.85 \times 210 \times 33.65 \times 50 \{43.5 - 18.5 - (33.65 / 2)\} + 26 \times 2800 \times 18.5 + 26 \times 593.76 \times 18.5$$

$$P_u \varphi = 4086064.02 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

El punto (Puc, Puc φ_c) = Punto E (punto genérico a compresión en el diagrama de interacción).

En el límite:

- Cuando $\varphi \Rightarrow 0$ $P_u M \Rightarrow \max$
- Ignorando el área de concreto desplazado por el acero se tiene:

$$P_u = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

$$P_u = P_u M - 0.85 \times 210 \times 50 \times 50 + 2800 \times 2 (26)$$

- $P_u M = 591850 \text{ K}$. Punto($P_u M$, $P_u M \varphi$) = A (en el diagrama de interacción)

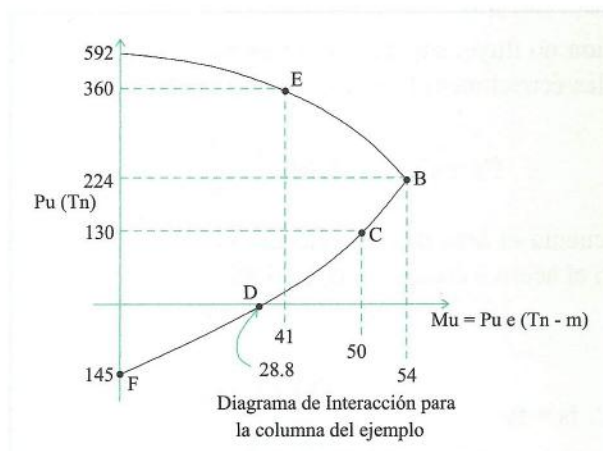
Carga a tracción:

Cuando la carga actuante no es compresión sino tracción para $e = 0$

$$P_u = -A_{st} f_y = -2(26) \times 2800$$

$$P_u = -145600 \text{ K}$$

Punto F = ($P_u e = 0$, $P_u e = 0 \varphi e = 0$) diagrama de interacción.



CONCLUSION:

De las ecuaciones vistas anteriormente, se usan factores de reducción en las ecuaciones, los cuales pueden aumentarse si la carga decrece.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Columnas zunchadas} & : 0.75 \\ \text{Columnas con estribos} & : 0.70 \end{array} \right\} *$$

* Ambas pueden aumentarse 0.9 si $P_u \Rightarrow$ decrece de 0.1 $f'_c A_g$

$$P_u = \phi (0.85 f'_c ab + A's f_y - A_s f_s) \quad (1)$$

$$P_u \cdot e' = \phi [0.85 f'_c ab (d - 0.5 a) + A's f_y (d - d')] \quad (2)$$

$$P_u \cdot e' = \phi [0.85 f'_c ab (d - d'' - 0.5 a) - A's f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d''] \quad (3)$$

Para falla balanceada $f_s = f_y$

$$ab = \frac{0.003 E_s}{f_y + 0.003 E_s} \beta_1 d \quad (4)$$

Hallar P_b , $P_b/\phi b$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación (4)} \Rightarrow a = ab \\ \text{Ecuación (1) y (3)} \Rightarrow f_s = f_y \end{array} \right\} \text{ Pueden determinarse en ambas el tipo de falla.}$$

Las ecuaciones asumen que el acero en compresión está cediendo ($f'_s = f_y$) debe verificarse.

Sabemos de la ecuación IX el acero a compresión está cediendo si:

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \geq \frac{f_y}{E_s} \quad (5)$$

Si el acero en compresión no fluye, sustituir la siguiente ecuación en todo sitio donde aparezca $f_y \Rightarrow$ referido a $A's$ en las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$f'_s = \epsilon'_s E_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s \quad (6)$$

Si se quiere tomar en cuenta el área de concreto desplazado por el acero en compresión debe reducirse el esfuerzo en el acero a compresión, en $0.85 f'_c$.

Falla a tracción:

Condición: $P_u < P_b \therefore f_s = f_y$

Se encuentra la profundidad de a en ecuación (1) y se sustituye en (2), obteniéndose:

$$P_u = \phi 0.85 f'_c b d \left(\rho' m' - \rho m + 1 - \frac{e'}{d} + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2 \left[\frac{e'}{d} (\rho m - \rho' m') + \rho' m' \left(1 - \frac{d'}{d}\right) \right]} \right) \quad (7)$$

Donde: $m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} \quad \rho = \frac{A_s}{b d}$
 $m' = m - 1 \quad \rho' = \frac{A'_s}{b d}$

- Cuando el refuerzo es simétrico $\Rightarrow \rho = \rho'$
- Cuando no hay refuerzo a compresión $\Rightarrow \rho' = 0$
- Se considera en esta ecuación el área de concreto desplazado por el acero en compresión:

Falla a compresión:

Condición: $P_u > P_b \quad \therefore f_s < f_y$

sustituyendo $f_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} - E_s \quad (8)$

En las ecuaciones (1), (2), (3) se encuentra a y se resuelve la sección; pero debido a lo complicado de la resolución de la ecuación, pueden usarse **2 métodos** aproximados cuando la falla es a compresión:

Método 1

- Suponer una relación lineal entre P_u y $P_u \cdot e$ $\therefore$ se asume que la zona a compresión en el diagrama de interacción es un línea recta. Por lo tanto, cualquier punto en el tramo se encuentra por triángulos semejantes.

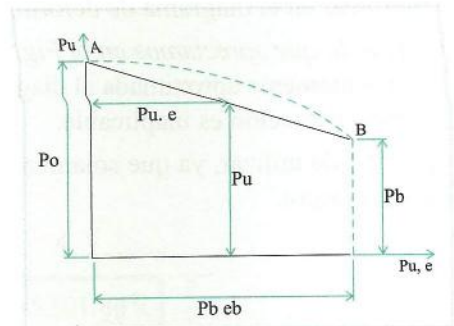
TRAMO $\overline{AB} \approx \widehat{AB}$

$$P_u = P_o - (P_o - P_b) \frac{P_{u \cdot e}}{P_b \times e_b}$$

$$P_u = \frac{P_o}{1 + (P_o / P_b - 1) e / e_b} \quad (9)$$

de ec. (1)

$$P_o = \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y] \quad (10)$$



- Para hallar P_b y C_b reemplazar (4) en (1) y (3)
- Este método es más útil para el análisis que para el diseño.

Método 2

- Utilizando la ecuación de resistencia de WHITNEY, refuerzo simétrico ($\rho = \rho'$).
- Asumiendo que la capacidad máxima del concreto para tomar momentos de es similar al caso de vigas que fallan por compresión para $\rho > \rho_b \Rightarrow M_u = 0.333b \times d^2 \times f'c$ (fuerza del momento del concreto respecto al área de tracción del acero).
- Para excentricidades grandes, considerando que el equilibrio de los momentos de las fuerzas respecto al acero en tracción:

$$P_u \left(e + d - \frac{h}{2} \right) = A's f_y (d - d') + 0.333 b d^2 f'c$$

$$P_u = \frac{A's f_y}{\frac{e}{d-d'} + 0.5} + \frac{f'_c \times h \times b}{\frac{3 h e}{d^2} + \frac{6 d h - 3 h^2}{2 d^2}} \quad (12)$$

Puede usarse esta ecuación también para pequeñas excentricidades.

$$\text{Cuando } e \Rightarrow 0 \quad P_u = \underbrace{\frac{A's f_y}{0 + 0.5}}_{\text{tracción (acero)}} + \underbrace{\frac{f'_c b h}{0 + \frac{6 h d - 3 h^2}{2 d^2}}}_{\text{compresión (concreto)}}$$

$$= 2 A_s f_y \quad = 0.85 f'_c b h$$

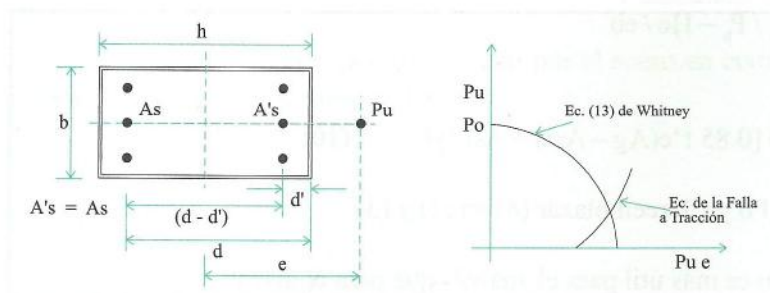
Para el concreto

$$\frac{6 d h - 3 h^2}{2 d^2} = \frac{1}{0.85} = 1.18$$

La ecuación para el diseño será:

$$P_u = \phi \left(\frac{A's f_y}{\frac{e}{d-d'} + 0.5} + \frac{f'_c \times h \times b}{\frac{3 h e}{d^2} + 1.18} \right)$$

- Verificar en el diagrama de deformaciones que el acero a compresión fluya.
- Según lo que apreciamos en la Fig. de la graficación de la ecuación de Whitney, la gráfica es suficientemente aproximada al diagrama de interacción, en la parte de falla a compresión para la zona a tracción es inaplicable.
- Es fácil de utilizar, ya que solamente consiste en resolver una ecuación lineal para obtener el área de acero.



Ejemplo:

- Calcular A_s y A'_s
- Columna de $h = 45 \text{ cm}$
 $b = 45 \text{ cm}$
- $f'_c = 2800 \text{ kg/cm}^2$
- $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
- $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$\left. \begin{array}{l} P_u = 200 \text{ Tn} \\ M_u = 55 \text{ T} \cdot \text{m} \end{array} \right\} e = \frac{M_u}{P_u} = 0.275 \text{ m}$$

Columna con estribos y con armadura simétrica

$$d' = 6.5 \text{ cm}$$

$$d = 45 - 6.5 = 38.5 \text{ cm}$$

Solución:

Encontrar "ab"

$$ab = \frac{0.003 E_s}{f_y + 0.003 E_s} \beta_1 d = \frac{0.003 \times 10^6 \times 2}{4200 + 0.003 \times 2 \times 10^6} \cdot 0.85 \times 38.5 \times 5$$

$$ab = 32.72 \text{ cm}$$

Verificar si el acero en compresión está fluyendo.

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d}{a} \geq \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon'_s = 0.003 \frac{32.72 - 0.85 \times 6.5}{32.72} = 2.49 \times 10^{-3} = 0.0025$$

$$\frac{f_y}{E_s} = 4200 / 2 \times 10^6 = 2.1 \times 10^{-3} = 0.0021$$

$\therefore$ El acero está fluyendo en la falla balanceada

Luego $f'_s = f_y$

Usando la ecuación $P_u = \phi (0.85 f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s)$

Para $P_b \Rightarrow$ usamos "ab" y sabemos $f_s = f_y$ y $A'_s = A_s$

$$P_b = 0.7(0.85 \times 280 \times 32.72 \times 45) = 245\,301.84 \text{ k}$$

$$P_b = 245.3 \text{ Tn} \quad P_u = 200 \text{ Tn} < P_b = 245.3 \text{ Tn}$$

- De la condición: $P_u < P_b$ (falla a tracción) $\therefore f_s = f_y$

- Sabemos también que: cuando

$$0.1 f'c Ag = 0.1 \times 280 \times 452 = 56\,700 \text{ k} < 200\,000$$

Se usa $\emptyset 0.7$

- Suponiendo que $f's = f_y$ de $P_u = \emptyset (0.85 f'c a.b + A's f_y - A_s f_s)$

$$\text{tenemos: } 200\,000 = 0.7(0.85 \times 280 \times 45 \times a)$$

$$a = 26.27 \text{ cm}$$

Luego:

$$\epsilon's = 0.003 \frac{a - \beta_1 d}{a} = 0.003 \frac{26.67 - 0.85 \times 6.5}{26.67}$$

$$\epsilon's = 0.00238$$

$$0.00238 > 0.0021$$

$\therefore$ El acero en compresión tal como se asumió. Luego:

$$P_u = \emptyset [(0.85 f'c a.b (d - d'') - 0.5a) + A's f_y (d - d' - d'') + A_s f_s d'']$$

$$200\,000 \times 27.5 = 0.7[0.85 \times 280 \times 26.27 \times 45(38.5 - 16 - 0.5 \times 26.67) - A_s \times 4\,200(38.5 - 6.5 - 16) + A_s \times 4\,200 \times 16]$$

$$A's = A_s = 27.28 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = 54.56 \text{ cm}^2$$

En caso que el acero en compresión no ceda o fluya el problema se complica, porque habría que sustituir "fs" por "fy" en la ecuación (6) y resolverle simultáneamente las Ecs. (1) y (3)

Ejemplo: Con las condiciones anteriores diseñar una columna para:

$$\left. \begin{array}{l} P_u : 300 \text{ Tn} \\ M_u : 55 \text{ Tn} \cdot \text{m} \end{array} \right\} e = M_u / P_u = 18.33 \text{ cm}$$

Solución: si $P_u > P_b$ (falla a compresión)
 $f_s < f_y$

Usar $\emptyset = 0.7$

Usando las ecuaciones exactas:

$$A's = A_s \quad \therefore \quad A_s = 0.5 A_{st}$$

$$f_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} \quad E_s = 0.003 \frac{0.85 \times 38.5 - a}{a} \times 2 \times 10^6$$

Reemplazando f_s en:

$$P_u = \phi (0.85 f'_c ab + A's f_y - A_s f_s)$$

$$300\,000 = 0.7 \left[0.85 \times 280 \times a \times 45 + 0.5 A_{st} \times 4\,200 - 0.5 A_{st} \times 6\,000 \frac{32.73 - a}{a} \right]$$

$$A_{st} = \frac{428571.5a - 10710a^2}{5100a - 98190} \quad (a)$$

Similarmente para el momento:

$$P_u e = \phi [0.85 f'_c a \cdot b (d - d'' - 0.5 a) + A's f_y (d - d' - d'') - A_s f_s d'']$$

$$5\,500\,000 = 0.7 \left[0.85 \times 280 \times a \times 45 (22.5 - 0.5 a) + 0.5 A_{st} \times 4\,200 \times 16 + 0.5 A_{st} \times 16 \times 6\,000 \frac{32.73 - a}{a} \right]$$

$$A_{st} = \frac{7857142.86a - 240975a^2 - 5355a^3}{1570800 - 14400a} \quad (b)$$

Seguidamente se hace: $(a) = (b) \Rightarrow \text{Ec. 3}^\circ \Rightarrow "a"$

Utilizando la ecuación de Whitney:

$$P_u = \phi \left(\frac{A'_s f_y}{\frac{e}{d - d'} + 0.5} + \frac{f'_c \times h \times b}{\frac{3 h e}{d^2} + 1.18} \right)$$

$$300\,000 = 0.7 \left(\frac{A'_s \times 4\,200}{\frac{18.33}{38.5 - 6.5} + 0.5} + \frac{280 \times 45 \times 45}{\frac{3 \times 45 \times 18.33}{38.5^2} + 1.18} \right)$$

Despejando $A's \Rightarrow y A's = A_s$

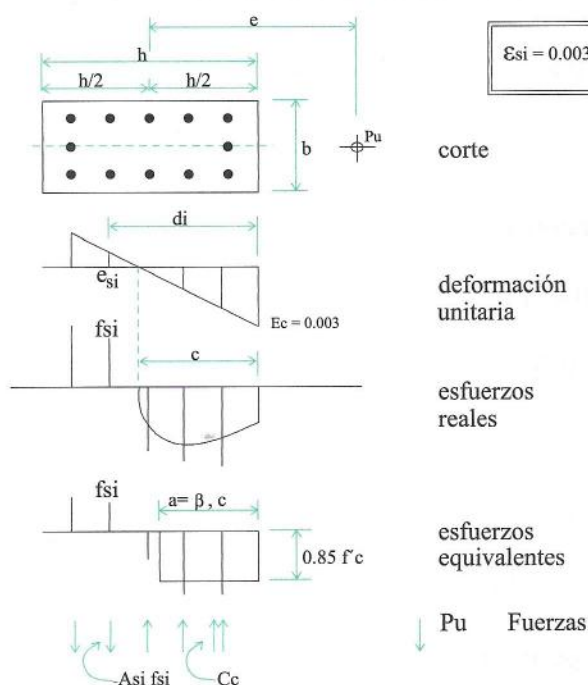
$$A_s = A's = 58.64 \text{ cm}^2$$

10.2.3 Análisis de columnas rectangulares con acero en las cuatro caras

El análisis para este caso es más dificultoso, porque se complican las deducciones de las ecuaciones de diseño, debido a que las varillas de acero trabajan a diferentes niveles de esfuerzos en la sección.

Estas secciones se analizan usando los criterios y requerimientos de compatibilidad de deformaciones y equilibrio. Se analizará una columna cuadrada o rectangular con refuerzo simétrico solicitada a carga última.

Método de compatibilidad de deformaciones



A partir del diagrama de deformaciones podremos encontrar la deformación para una varilla cualquiera (ϵ_{si}).

$$\epsilon_{si} = 0.003 \frac{c - d_i}{c} \quad (I)$$

- Deformación por compresión = positivas
- Deformación por tracción = negativas
- El esfuerzo "fsi" se calculará como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Si } \epsilon_{si} \geq f_y/E_s &\Rightarrow f_{si} = f_y \\ \text{Si } f_y/E_s > \epsilon_{si} > -f_y/E_s &\Rightarrow f_{si} = \epsilon_{si} E_s \\ \epsilon_{si} \leq -f_y/E_s &\Rightarrow f_{si} = f_y \end{aligned} \quad (II)$$

$F_{si} = f_{si} \times A_{si}$ (fuerza en una varilla)

f_{si} = esfuerzo en una varilla

A_{si} = área de una varilla

La ecuación de equilibrio para una sección de "n" varillas será:

$$P_u = 0.85 f'c ab + \sum_{i=1}^n f_{si} A_{si} \quad (III)$$

$$P_u e = 0.85 f'c ab \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + \sum_{i=1}^n f_{si} A_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i \right) \quad (IV)$$

Para solucionar por tanteos:

- 1) Asumir un valor "C"
- 2) Calcular los esfuerzos de las varillas Ec. (I) y (II)
- 3) Calcular Pu Ec. (III) y (IV)
- 4) Repetir los pasos 1, 2 y 3 hasta que los Pu obtenidos en las ecuaciones III y IV sean iguales.

Puede reducirse el esfuerzo de acero a compresión en $0.85 f'_c$ para considerarse el área de refuerzo a compresión desplazado por el concreto.

Ejemplo:

Utilizando el método de compatibilidad de deformaciones resolver lo siguiente:

$P_u = ?$

$e = ?$

- Ver ubicación del eje neutro

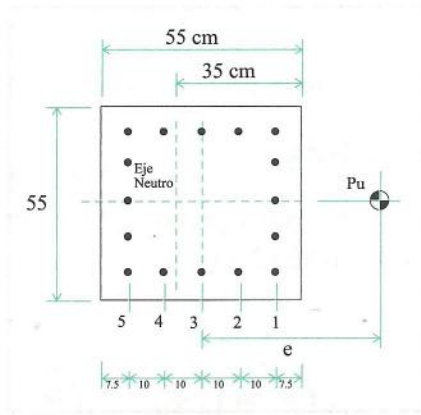
$$A_s = 16 \text{ } \varnothing 1 \frac{1}{8}''$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

- Armadura simétrica



Solución:

Encontrar f_y/E_s para comparar

- Ec. (II)

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

Para $c = 35 \text{ cm}$

$$\epsilon_{si} = 0.003 \frac{c - d_i}{c}$$

$$\epsilon_{s1} = 0.003 \frac{35 - 7.5}{35} = 0.00235 > 0.0021$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \frac{35 - 17.5}{35} = 0.0015 < 0.0021$$

$$\epsilon_{s3} = 0.003 \frac{35 - 27.5}{35} = 0.00064 < 0.0021$$

$$\therefore f_{s1} = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$\therefore f_{s2} = \epsilon_{s1} E_s$$

$$f_{s2} = 0.0015 \times 2 \times 10^6 = 3000 \text{ K/cm}^2$$

$$\therefore f_{s3} = 0.00064 \times 2 \times 10^6$$

$$f_{s3} = 1280 \text{ K/cm}^2$$

$$\epsilon_{s4} = 0.003 \frac{35 - 37.5}{35} = -0.000214 > -0.0021 \quad \therefore f_{s4} = -0.000214 \times 2 \times 10^6$$

$$f_{s4} = -428 \text{ K/cm}^2$$

$$\epsilon_{s5} = 0.003 \frac{35 - 47.5}{35} = -0.00107 > -0.0021 \quad \therefore f_{s5} = -0.00107 \times 2 \times 10^6$$

$$f_{s5} = -2140 \text{ K/cm}^2$$

(-) = tracción

Se reducen los esfuerzos de acero en compresión en $0.85 f'_c = 0.85 \times 210 \text{ K/cm}^2 = 178.5 \text{ K/cm}^2$ para tomar en cuenta el concreto desplazado.

Luego: $a = \beta_1 c = 0.85 \times 35 = 29.75 \text{ cm}$

de la Ec. III y con los valores para "fsi" a compresión obtendremos P_u

$$P_u' = 0.85 f'_c ab + \sum_{i=1}^n f_{si} A_{si}$$

$$P_u' = (0.85 \times 210 \times 29.75 \times 55) + (4200 - 178.5)6.45 \times 5 + (3000 - 178.5)6.45 \times 2$$

$$+ (1280 - 178.5)6.45 \times 2 + (-428)6.45 \times 2 + (-2140)6.45 \times 5$$

$$P_u' = 397.83 \text{ Tn}$$

$$M_u' = P_u e = 0.85 f'_c ab \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + \sum_{i=1}^n f_{si} A_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i \right)$$

$$M_u' = 292070.63 \left(\frac{55}{2} - \frac{29.75}{2} \right) + 129693.38 \left(\frac{55}{2} - 7.5 \right) + 36397.35 \left(\frac{55}{2} - 17.5 \right)$$

$$+ 14209.35 \left(\frac{55}{2} - 27.5 \right) + (-5521.2) \left(\frac{55}{2} - 37.5 \right) + (-69015) \left(\frac{55}{2} - 47.5 \right)$$

$$M_u' = 80.8 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Luego: $e = \frac{M_u'}{P_u'} = \frac{80.8 \text{ Tn} \cdot \text{m}}{397.83 \text{ Tn}} = 0.203 \text{ m}$

Finalmente:

$$P_u = \phi P_u' = 0.7 \times 397.83 = 278.48 \text{ Tn}$$

$$M_u = \phi M_u' = 0.7 \times 80.8 = 56.56 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Conclusión:

Asumiendo varias posiciones del eje neutro, podremos tener una serie de valores pares P_u , M_u y así graficar las curvas para el diagrama de interacción.

Ejemplo: Usando gráficos

Calcular el área de acero para la siguiente columna con estribos y acero longitudinal distribuido uniformemente.

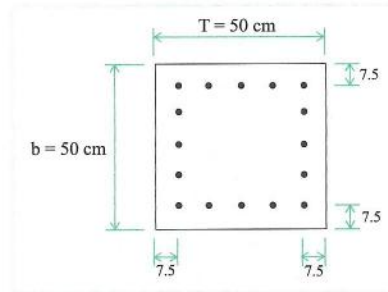
$$P_u = 250 \text{ T n}$$

$$M_u = 35 \text{ T n} \cdot \text{m}$$

$$f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$$

$$f'_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$\phi = 0.7$$

**Solución:**

Escoger el gráfico para $f'_c = 210 \text{ K/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$$

$$\tau = \frac{50 - 12.5}{50} = 0.75 \text{ (si no diera exacto se interpolan los valores "Po" del mayor o menor)}$$

Luego usar el gráfico

$$\frac{P_u}{b, t} = \frac{250000}{50 \times 50} = 100$$

del gráfico $P_g = 0.027$

$$\frac{M_u}{b, t^2} = \frac{3500000}{50 \times 50^2} = 28$$

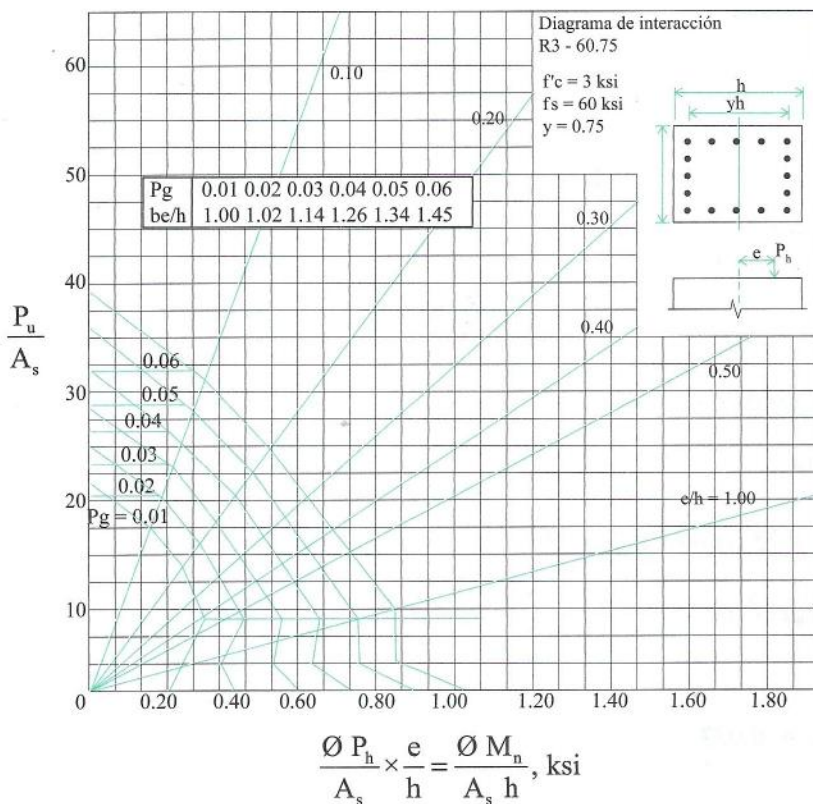
$$P_g = \frac{A_{st}}{b, t}$$

$$A_{st} = P_g \times b \times t$$

$$A_{st} = 0.027 \times 50 \times 50 = 67.5 \text{ cm}^2 \text{ (repartir 25 \% en cada cara)}$$

Nota: La referencia 4, el SP - 17A del ACI, CRSI, Handbook, normas británicas CP - 110, Normas de Nueva Zelandia. Todas ellas tienen diagramas de interacción o tablas para columnas.

Diagrama de interacción para columnas



10.2.4 Columnas cortas sometidas a carga axial y flexión biaxial

Las columnas estudiadas en la sección anterior, o columnas sometidas a carga axial y flexión uniaxial, son un caso realmente particular del caso general que será materia de estudio, debido a que los casos reales que se presentan en la práctica son de columnas con flexión biaxial.

El análisis inicial y la deducción de ecuaciones pueden hacerse a partir de los criterios utilizados para las vigas sometidas a flexión biaxial. Luego, utilizando las fórmulas pertinentes, podremos encontrar las deformaciones, esfuerzos y fuerzas en el refuerzo de acero para determinada posición del eje neutro (Fig. 10.7, 10.8, 10.9).

En las figuras 10.7, 10.8 y 10.9 se puede encontrar las deformaciones en el acero por consideraciones de triángulos semejantes del diagrama de deformaciones.

$$\frac{\epsilon_{sl}}{K_y h - t_y - t_x \cot \theta} = \frac{0.003}{K_y \times h}$$

$$\epsilon_{sl} = 0.003 \left(1 - \frac{t_x}{k_x \times b} - \frac{t_y}{k_y \times h} \right)$$

$$\epsilon_{s2} = 0.003 \left(1 - \frac{b - t_x}{k_x \times b} - \frac{t_y}{k_y \times h} \right)$$

$$\epsilon_{s3} = 0.003 \left(1 - \frac{t_x}{k_x \times b} - \frac{h - t_y}{k_y \times h} \right)$$

$$\epsilon_{s4} = 0.003 \left(1 - \frac{b - t_x}{k_x \times b} - \frac{h - t_y}{k_y \times h} \right)$$

deformaciones (+) = compresión

deformación (-) = tracción

- Para un punto bien definido de fluencia tenemos para la varilla 1

$$\epsilon_{s1} \geq \frac{f_y}{E_s}$$

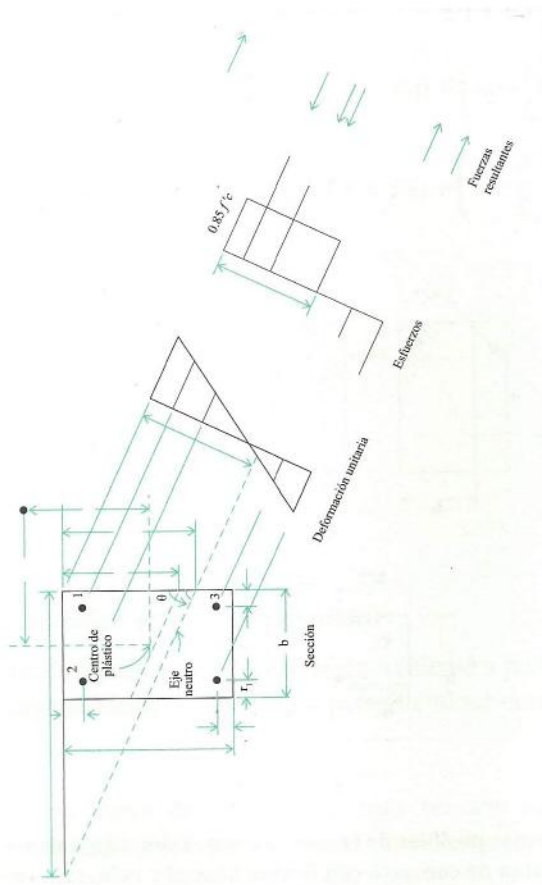
$$f_{s1} = f_y$$

$$\frac{f_y}{E_s} > \epsilon_{s1} > -\frac{f_y}{E_s}$$

$$f_{s1} = \epsilon_{s1} E_s$$

$$\epsilon_{s1} \leq -\frac{f_y}{E_s}$$

$$f_{s1} = f_y$$



En forma similar se encuentran los esfuerzos para las varillas 2, 3, 4.

- $\therefore$ las fuerzas en el acero será las siguientes:

$$F1 = A_{s1} f_{s1}$$

$$F2 = A_{s2} f_{s2}$$

$$F3 = A_{s3} f_{s3}$$

$$F4 = A_{s4} f_{s4}$$

- La resultante de la fuerza de compresión del concreto, depende del área y forma de la sección de la columna.

$$C_c = \frac{0.85 f'_c \times \beta_1 \times h \times K_y \times \beta_1 \times k_x \times b}{2}$$

$$C_c = 0.425 f'_c \times \beta_1^2 \times h \times K_y \times k_x \times b$$

$$\bar{X} = 0.333 \beta_1 K_x b$$

$$\bar{Y} = 0.333 \beta_1 K_y h$$

Formas posibles de la zona a compresión equivalente

$$P_u = C_c + F1 + F2 + F3 + F4$$

$$M_{ux} = P_u \cdot e_y = C_c \left(\frac{h}{2} - y \right) + (F1 + F2) \left(\frac{h}{2} - t_y \right) - (F3 + F4) \left(\frac{h}{2} - t_y \right)$$

$$M_{uy} = P_u \cdot e_x = C_c \left(\frac{b}{2} - x \right) + (F1 + F3) \left(\frac{b}{2} - t_x \right) - (F2 + F4) \left(\frac{b}{2} - t_x \right)$$

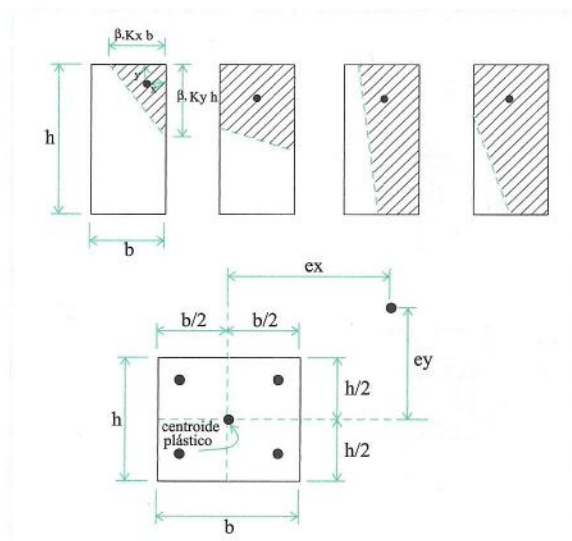
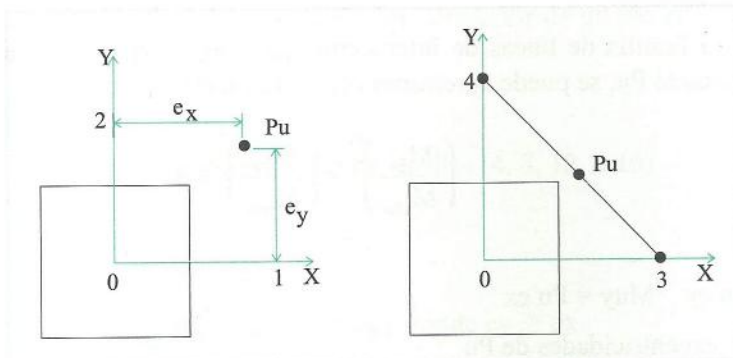


Fig. 10.9 Formas posibles de la zona a compresión equivalente (para vigas).
Columna de concreto con flexión biaxial y refuerzo simétrico

- Generalmente el eje neutro no es perpendicular a la excentricidad resultante.
- Para encontrar la inclinación del eje neutro se usará un procedimiento de pruebas y ajustes, pero por lo laborioso es indispensable el uso de una computadora.
- Debido a la dificultad para desarrollar expresiones para la forma de la línea de interacción, para un caso general, por la intervención de muchas variables, se conocen varios procedimientos simplificados para la resolución de estos problemas. A continuación se comentarán.

a) Métodos de Superposición:

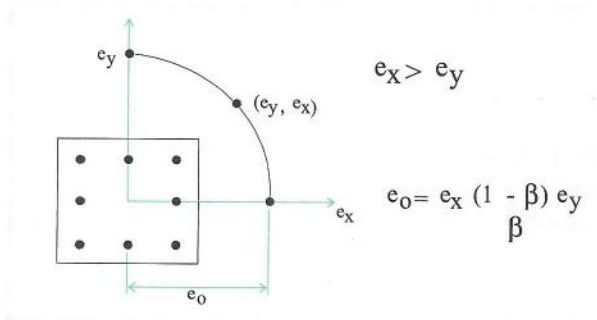
- 1) Reduce un problema de flexión biaxial en dos, se desarrollan por separado y se suman los refuerzos resultantes.
 - Equivalente a usar los valores (P_u, M_{uy}) y (P_u, M_{ux}) en los puntos (1) y (2), respectivamente (ver gráfico) separadamente.
 - No es aconsejable usar este método por no tener base teórica, lo que puede tener mucho error por el lado de la inseguridad, ya que considera la resistencia completa del concreto dos veces en la misma columna.
- 2) Similar al caso 1, pero en este caso mucho más conservador y, por lo tanto, antieconómico (siempre está por el lado de la seguridad). En este caso se está trabajando en cualquier punto de la línea (3) y (4).
- 3) Se reparte P en dos fuerzas estáticamente equivalentes ubicadas en los puntos (3) y (4) P_{ux} y P_{uy} , respectivamente, tomando la resistencia del concreto como $(f'_c P_{ux} / P_u)$ para P_{ux} y $f'_c P_{uy} / P_{uy}$ para P_{uy} (ver gráfico).



b) Método de la excentricidad uniaxial equivalente:

Consiste en encontrar la excentricidad uniaxial equivalente a partir de las excentricidades e_y y e_x , para una carga máxima constante P_u permitiéndose considerar el pandeo en una sola dirección.

El gráfico muestra una curva de interacción para sección rectangular y carga " P_u " constante. Existe en varias expresiones analíticas para hallar (e_o) .



e_o = excentricidad uniaxial equivalente (fórmula del código español 1968).

β = factor que depende de la magnitud de carga axial y la cuantía de acero.

c) Métodos basados en aproximaciones para el perfil de la superficie de interacción:

Existen varios criterios para encontrar el perfil de la superficie de interacción que pueda ser adecuada para calcular las resistencias a flexión biaxial, a partir de las resistencias uniaxiales.

Según BRESLER, tenemos:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{P_o}$$

P_u = carga última bajo flexión biaxial.

P_{ux} = carga última a excentricidad "ex" (ver figura caso (a) punto 1).

P_{uy} = carga última a excentricidad "ey" (ver figura caso (a) punto 2).

P_o = carga última cuando no hay excentricidad.

Además, la familia de líneas de interacción que corresponde a los distintos niveles de carga constante P_u , se puede aproximar con la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}} \right)^m + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}} \right)^n = 1$$

Donde:

$M_{ux} = P_u e_y$ $M_{uy} = P_u e_x$

e_x y e_y son excentricidades de P_u

M_{uxo} , M_{uyo} son resistencias a flexión uniaxial, respecto a los ejes "x" e "y" para la carga constante considerada.

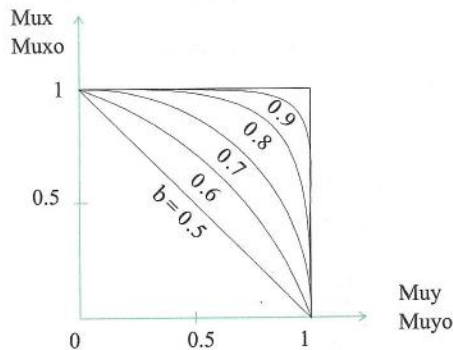
m , n se determinan experimentalmente, y depende de las propiedades de la columna.

Según PARME Y ASOCIADOS, se tiene:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}} \right)^{\frac{\text{Log } 0.5}{\text{Log } \beta}} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}} \right)^{\frac{\text{Log } 0.5}{\text{Log } \beta}} = 1$$

β = Valor que determina la forma de la línea de interacción (ver figura inferior), estos valores calculados analíticamente en función de:

- La disposición de varillas.
- La resistencia de cedencia del acero.
- Índice de refuerzo $\rho_t f_y / f'_c$ y valores de P_u / P_o .
- En conclusión, para determinar la capacidad a flexión biaxial de una determinada columna se utilizarán: el valor β , los valores uniaxiales de capacidad de momento, y el gráfico siguiente o similar:



Según WEBER; o gráficas de A.C.I: Weber obtuvo una serie de gráficas de diseño y curvas de interacción, utilizando las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones para columnas cuadradas con la carga aplicada con distintas excentricidades a lo largo de una diagonal de sección. Se diseña o analiza la sección mediante interpolación lineal entre, la flexión alrededor de un eje principal y la flexión alrededor de un diagonal. Para P_u , P_{ue} .

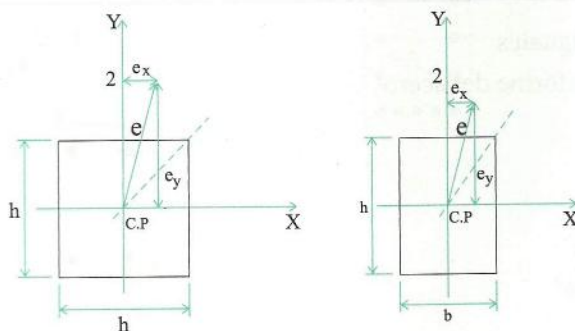
Procedimiento:

Datos: P_u , e_x , e_y , f'_c , f_y , distribución de varillas (4, 8, 12, ó 16)

1) Calcular "As"

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(e_x/e_y) \text{ donde } e_y \geq e_x$$



- 2) En las gráficas de interacción obtener: $P_t m$
 para $P_u/f'_c \times h^2$ con $P_u.e/f'_c h^3$ (uniaxialmente)
 para $P_u/f'_c \times h^2$ con $P_u.e/f'_c h^3$ (diagonalmente)
- 3) Se calcula el acero necesario para $P_u/f'_c h^2$ y $P_u.e/f'_c h^3$, actuando a un ángulo " θ " interpolando linealmente entre las cuantías de acero para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$.
- 4) Para analizar áreas de columnas, puede también calcularse la capacidad de momentos a cualquier ángulo " θ ", interpolando entre las capacidades de momento uniaxial y diagonal.
- 5) Las gráficas fueron obtenidas para columnas cuadradas pero pueden ser también usadas para columnas rectangulares con una relación máxima de un lado al otro, igual o menor que DOS. En este caso se hará la siguiente sustitución:

$M_{ux} = P_u \times e_y$ $M_{uy} = P_u \cdot e_x$ "p" para carga aplicada en la diagonal.

$$\frac{P_u}{f'_c \times h^2} \Rightarrow \text{por} \Rightarrow \frac{P_u}{f'_c \times h \times b}$$

$$\frac{P_u \times e_y}{f'_c \times h^3} \Rightarrow \text{por} \Rightarrow \frac{P_u}{f'_c \times h^2 \times b} \sqrt{1 + \left(\frac{e_x \times h}{e_y \times b} \right)^2}$$

p para carga aplicada en el eje principal

$$\frac{P_u}{f'_c \times h \times b} \quad y \quad \frac{P_u}{f'_c \times h^2 \times b} \sqrt{1 + \left(\frac{e_x \times h}{e_y \times b} \right)^2}$$

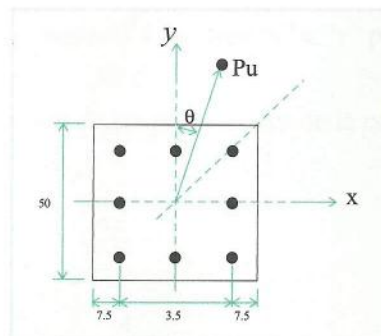
En vez de interpolar con respecto a la dirección verdadera de la excentricidad de la carga, debe realizarse respecto al ángulo de la dirección cuadrada equivalente dada por

$$\theta' = \tan^{-1} \left(\frac{e_x h}{e_y b} \right)$$

Ejemplo: Diseñar la siguiente columna a flexión biaxial:

$$\text{Área} = 50 \times 50$$

- usar 8 varillas iguales
- distribución uniforme del acero
- $P_u = 300 \text{ Tn}$
- $e_x = 6 \text{ cm}$
- $e_y = 10 \text{ cm}$
- $f'_c = 280 \text{ K/cm}^2$
- $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$
- $\theta = 0.7$



Solución:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11.66$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{e_x}{e_y} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{6}{10} \right) = 30.96^\circ$$

$$\frac{P_u}{f'_c \times h^2} = \frac{300000}{280 \times 50^2} = 0.4286$$

$$\frac{P_u \times e_y}{f'_c \times h^3} = \frac{300000 \times 10}{280 \times 50^3} = 0.0857$$

$$g = \frac{50 - 15}{50} = 0.7$$

De Fig. BIAXIAL ($\theta = 45^\circ$) Pt m = 0.25 (gráfica N° 2) ref. 4

De Fig. UNIAXIAL ($\theta = 0^\circ$) Pt m = 0.24 (gráfica N° 2) ref. 4

Para $\theta = 30.96^\circ$ tenemos: Pt m = $0.24 + (0.25 - 0.24) \frac{30 \times 96}{45}$

$$m = \frac{4200}{0.85 \times 280} = 17.64 \quad \text{y} \quad \text{Pt m} = 0.2469$$

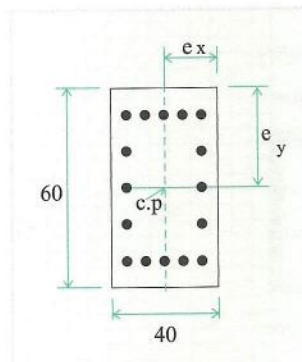
$$\text{Pt} = \frac{0.2469}{17.64} = 0.0140 \Rightarrow A_s = 0.0140 \times 502 = 35 \text{ cm}^2$$

Usar 8 Ø 1"

Ejemplo: Diseñar la siguiente columna a flexión biaxial.

Área = 40×60

- Usar 16 varillas iguales
- distribución uniforme en las 4 caras
- $P_u = 70 \text{ Tn}$
- $e_x = 12 \text{ cm}$
- $e_y = 25 \text{ cm}$
- $f'_c = 280 \text{ K/cm}^2$
- $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$



$$\theta = 0.7$$

Suponer que: $g = 0.7$

Solución:

$$\frac{P_u}{f'_c \times h \times b} = \frac{170000}{280 \times 40 \times 60} = 0.253$$

$$\frac{P_u e_y}{f'_c \times h^2 \times b} \sqrt{1 + \left(\frac{e_x}{e_y} \frac{h}{b} \right)^2} = \frac{170000 \times 25}{280 \times 60^2 \times 40} \sqrt{1 + \left(\frac{12 \times 60}{25 \times 40} \right)^2} = 0.1299$$

$$\phi' = \tan^{-1} \frac{e_x \times b}{e_y \times h} = \tan^{-1} \frac{12 \times 60}{25 \times 40} = \tan^{-1} 0.72 = 35.75^\circ$$

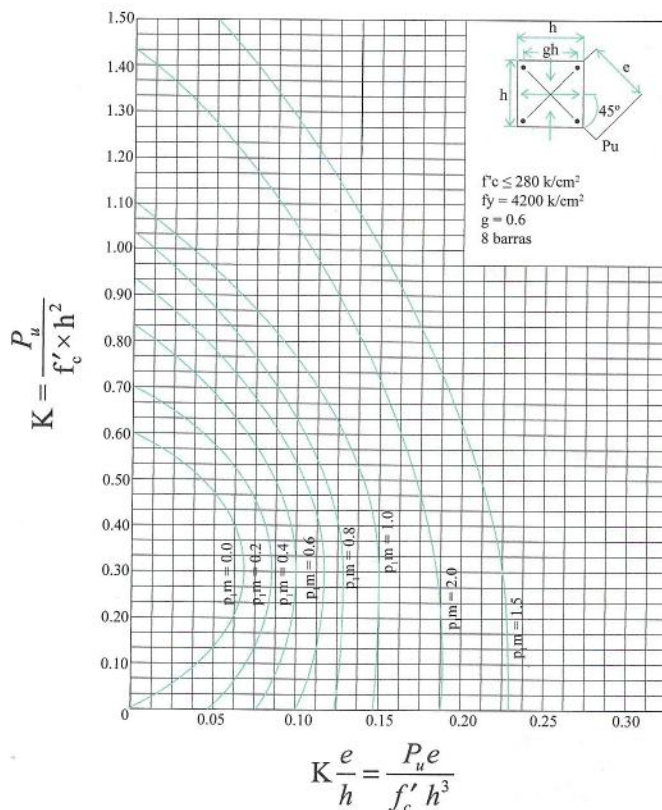
De Fig. BIAXIAL ($\phi = 45^\circ$) Pt m = 0.65 Ref. 4 (gráfico N° 6)

De Fig. UNIAXIAL ($\phi = 0^\circ$) Pt m = 0.45 Ref. 4 (gráfico N° 2)

Para $\phi = 35.75$ tiene: Pt m = $0.45 + (0.65 - 0.45) \frac{35.75}{45} = 0.609$

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{4200}{0.85 \times 280} = 17.65$$

$$A_{st} = b \times h \times Pt = 40 \times 60 \times \frac{0.609}{17.65} = 82.81 \text{ cm}^2$$



Según Row y Paulay

Aportan unas gráficas de diseño con mayor exactitud que las de Weber en la interpolación lineal, porque dan gráficas para diferentes inclinaciones de la dirección de la excentricidad. El acero se considera como perfil tubular.

La dirección de la excentricidad se expresa mediante el parámetro K

$K = 0$, cargas en el eje Y

$K = 1$, cargas en la diagonal

$K = \infty$, cargas en el eje X

Procedimientos de cálculo (las gráficas no llevan el factor ϕ de reducción):

- 1) Calcular los valores $\frac{P_u}{f'_c \times h \times b}$ y $\frac{M_u}{f'_c \times h^2 \times b} \sqrt{1 + \left(\frac{e_x}{e_y} \frac{h}{b} \right)^2}$
- 2) Calcular $K = \frac{e_x}{e_y} \frac{h}{b}$

Calcular $\phi = \text{ángulo entre la dirección para la excentricidad de la sección cuadrada equivalente y el eje } Y$.

$$\phi' = \tan^{-1} K$$

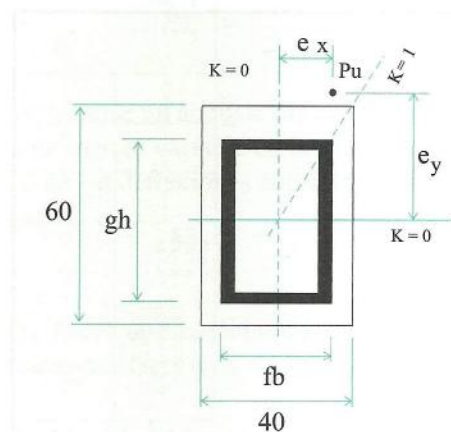
- 3) Determinar el acero para los “ K ” superior e inferior del valor “ K ” de la gráfica, y el valor de ϕ' para cada K .
- 4) Determinar el acero para “ K ” por interpolación lineal entre las cuantías de acero para los valores de ϕ' .
- 5) Se hace el procedimiento análogo para el cálculo de las secciones.

Ejemplo:

Diseñar la columna a flexión biaxial.

$$\text{Área} = 40 \times 60$$

- Usar lo ϕ distribución uniforme
 - $P_u = 170 \text{ Tn}$
 - $e_x = 12 \text{ cm}$
 - $e_y = 25 \text{ cm}$
 - $f'_c = 280 \text{ K/cm}^2$
 - $f_y = 4200 \text{ K/cm}^2$
- $\phi = 0.7$ suponer $g = 0.7$



Solución:

$$\frac{P_u}{f'_c b} = \frac{1700000 / 0.7}{280 \times 40 \times 60} = 0.361$$

$$\frac{M_{ux}}{f'_c \times h^2 \times b} \sqrt{1 + \left(\frac{e_x h}{e_y b} \right)^2} = \frac{\frac{170000}{0.7} \times 25}{280 \times 60^2 \times 40} \sqrt{1 + \left(\frac{12 \times 60}{25 \times 40} \right)^2} = 0.1856$$

$$K = \frac{e_x h}{e_y b} = \frac{12 \times 60}{25 \times 40} = 0.72 \Rightarrow \phi' = \tan^{-1} 0.72 = 35.75^\circ$$

Usar las gráficas de **Row y Paulay**, publicadas por el Instituto Antisísmico de Nueva Zelandia.

- Para encontrar el área de acero "As" para un $K = 0.75$, interpolar entre $63982 \times 10^{-6} K = 0.577$ y $K = 1.00$ (son los valores mayor y menor más próximo).

Para $K = 0.577 \Rightarrow \phi' = 30^\circ \Rightarrow \text{pt m} = 0.70$

$K = 1.00 \Rightarrow \phi' = 45^\circ \Rightarrow \text{pt m} = 0.75$

- Interpolando para $\phi' = 35.75^\circ$

$$\text{Pt m} = 0.70 + (0.75 - 0.70) \frac{35.75 - 30}{45 - 30} = 0.719$$

$$m = \frac{f_y}{0.85 \times f'_c} = 17.65$$

$$\text{Ast} = b \times h \times \text{Pt} = 40 \times 60 \times \frac{0.719}{17.65} = 97.97 \text{ cm}^2$$

Ast/4 cada cara.

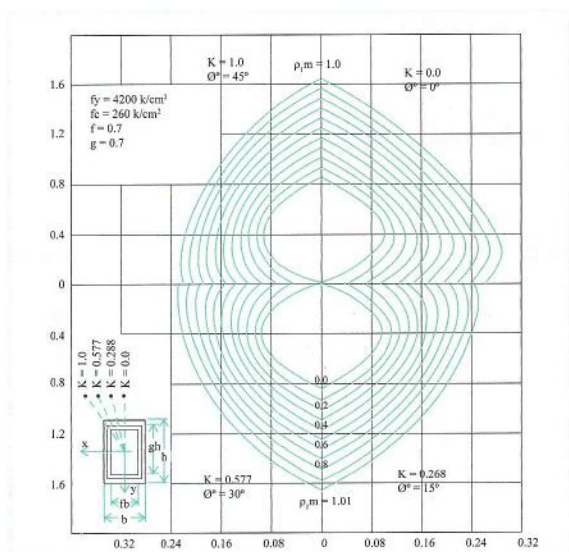


Fig. 10.10 Gráfica de Row y Paulay

10.2.5 Columnas largas o esbeltas

El comportamiento de columnas esbeltas en general, es analizado en los diversos textos de resistencia de materiales. En cuanto a columnas esbeltas, no es suficiente resolver el problema de resistencia, sino también el de estabilidad. La estabilidad de los elementos consiste en la capacidad de responder con deformaciones pequeñas a pequeñas variaciones de carga. La falta de estabilidad en columnas produce el efecto de Pandeo.

Las columnas largas o esbeltas son aquellas en que el momento flexionante amplificado provocado por la excentricidad reduce la carga última, debido a deformación de segundo orden. Las principales variables que afectan la resistencia de las columnas esbeltas son:

- 1) La relación de la altura libre a la dimensión, en el sentido de la flexión L_u/h , la relación de la excentricidad a la dimensión de la sección e/h y condiciones de extremos, en cuanto a signos y excentricidades.
- 2) El grado de restricción rotacional en los extremos. Mientras mayor sea la rigidez de las vigas en los extremos de la columna, esta tendrá mayor resistencia.
- 3) El grado de restricción lateral al desplazamiento. Las columnas arriostradas en sus extremos contra el desplazamiento lateral son más resistentes que las no arriostradas.
- 4) La resistencia de los materiales y la cuantía del acero.
- 5) La duración de la carga y el flujo plástico del concreto durante cargas sostenidas, aumentan las deflexiones de la columna.

Llamaremos también columnas largas a aquellas que, al realizarle un análisis, hay necesidad de considerar los efectos de esbeltez, debido a que se cumple la siguiente relación:

- Para elementos a compresión con arriostre lateral cuando:

$$\frac{K L_u}{r} \geq 34 - M1b/M2b$$

- Para elementos a compresión sin arriostre lateral cuando:

$$\frac{K L_u}{r} \geq 22$$

Para elementos cuya relación $K L_u / 2 \geq 100$ debe hacerse un análisis estructural considerando la influencia de las cargas axiales y el momento de inercia variable en la rigidez del elemento y en los momentos de empotramiento, el efecto de las deflexiones sobre los momentos y las fuerzas y los efectos de la duración de las cargas.

A. Comportamiento de columnas esbeltas

El efecto de esbeltez de una columna puede hacer que la carga disminuya debido a las deflexiones laterales de la columna ocasionadas por flexión:

e = excentricidad de la carga P .

A = incremento de excentricidad debido a la deflexión.

M = (momento flexionante máximo) = $P(e + A)$.

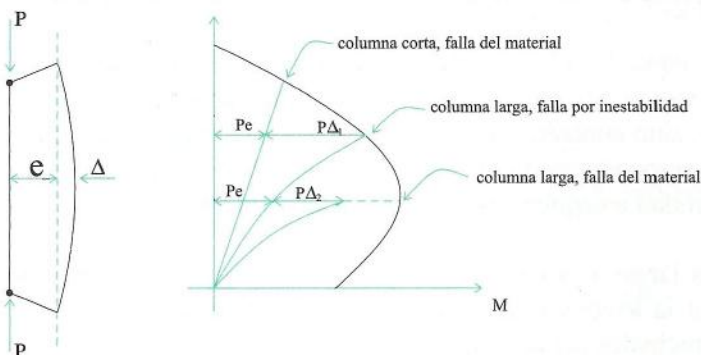


Diagrama de Interacción (P - M)

B. Evaluación aproximada de los efectos de esbeltez

a) Longitud no apoyada de elementos sujetos a compresión “Lu”.

- Se tomará como la distancia libre entre losas de entrepisos, vigas u otros elementos capaces de proporcionar un apoyo lateral para el elemento sujeto a compresión.
- Si existieran cartelas o capiteles de columna, la longitud libre no apoyada debe medirse al extremo inferior del capitel o cartela, en el plano considerado.

b) Longitud efectiva de elementos sujetos a compresión “KLu”

- En elementos arriostrados a desplazamiento lateral, el factor de longitud efectiva “K = 1”.
- Salvo que el análisis demuestre que pueda ser menor que 2.
- En elementos no arriostrados a desplazamiento lateral se tomará “K”, considerando debidamente el agrietamiento y el refuerzo con una rigidez relativa y será mayor que 1.

c) Radio de giro:

- Se podrán tomar los siguientes valores:

$r = 0.30$ (la menor dimensión)	elementos rectangulares.
$r = 0.25 \times \text{diámetro}$	elementos circulares.

10.2.6 Columnas sometidas a cargas axiales

Según Euler
$$P_c = \frac{E_c I}{(KL)^2}$$

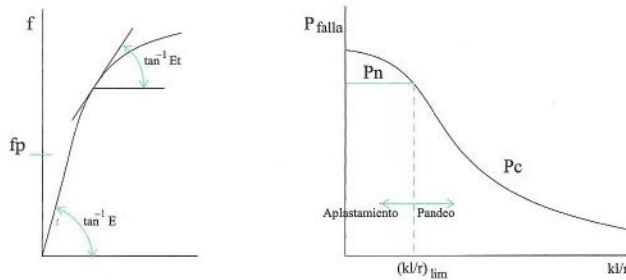
En resumen, luego de analizar el comportamiento de los gráficos que se ven más adelante tenemos lo siguiente:

- La resistencia de columnas cargadas axialmente disminuye con el aumento de la relación de esbeltez KL/r .

En columnas arriostradas o que son parte de estructuras aporricados arriostrados, para consideraciones del cálculo de la longitud efectiva “KL”, la distancia entre puntos de inflexión está entre $L/2$ y L , dependiendo del grado de restricción en los extremos.

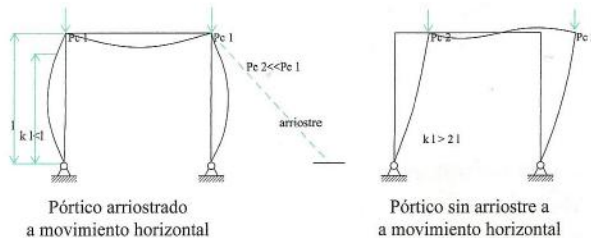
- La longitud efectiva de las columnas, que no están arriostradas o que en parte de pórticos no arriostrados, son siempre mayores que “L”. Por lo tanto:

La carga de pandeo de un pórtico no arriostrado es siempre sustancialmente más pequeña que la de un pórtico arriostrado.

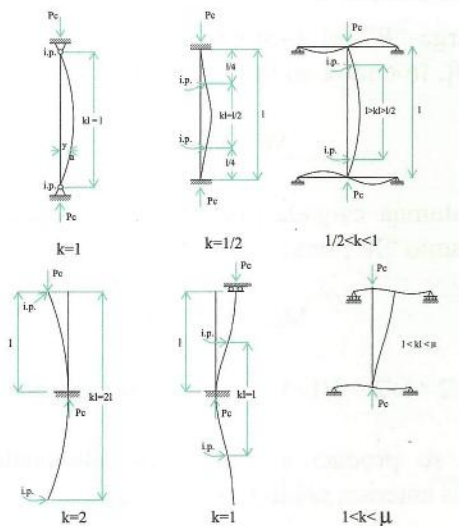


Curva de Esfuerzos P- D

Curva P - KL/r



Columnas sometidas a cargas axiales



Análisis de pandeo

10.2.7 Columnas sometidas a flexocompresión

Las columnas, en los casos reales, normalmente tienen cargas axial, como momentos flectores. Por consiguiente se podrá hacer el siguiente análisis.

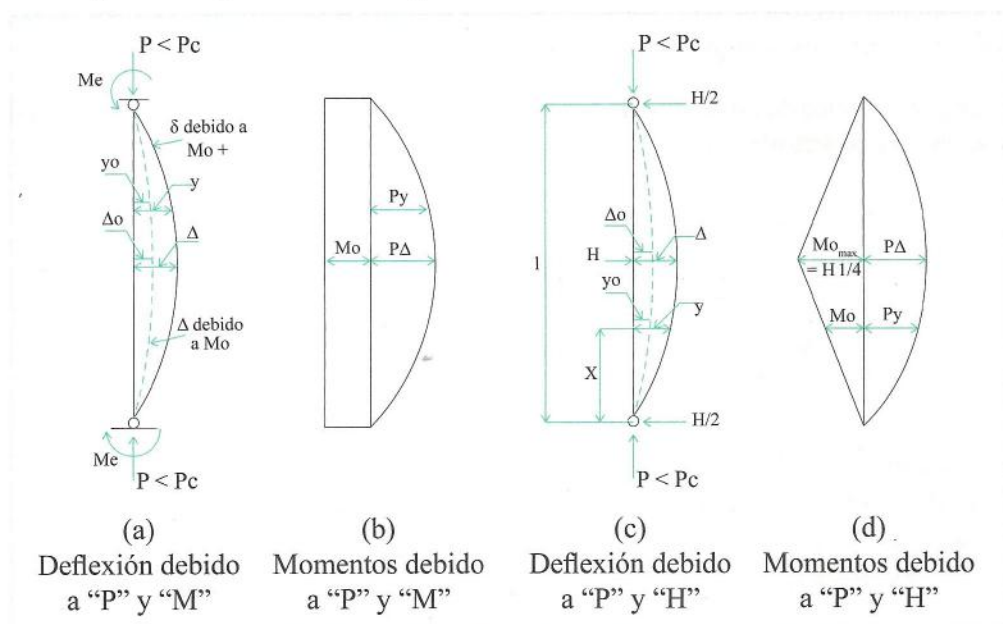


Fig. 1

La figura (a) muestra una columna biarticulada, cargada axialmente por "P" y flectada por momentos iguales "Me" ubicados en los extremos.

Si no existiera el momento axial, el momento "Me" ver Fig. (b), y la deflexión será Y_o y $\Delta_o = Y_o \text{ max}$ Fig. (a).

Cuando se aplica la carga "P", el momento en cualquier punto aumenta en un valor de $[P \times (\text{brazo palanca})]$, lo cual a su vez causa mayor flexión ver valores Y ó ΔY_{max} Fig. (a).

$$M = M_o + P_y$$

Cuando se tiene una columna cargada por carga horizontal "H/2", en cada extremo el momento, en cualquier punto "X", será:

$$M_o = H/2 \times X$$

Con un valor $M_{\text{max}} = H/2 \times L/2 = HL/4$ ver figura (d)

Cuando se aplica "P" se producirán momentos adicionales iguales a "Py", luego, análogamente al análisis anterior, tendremos:

$$M = M_o + P_y$$

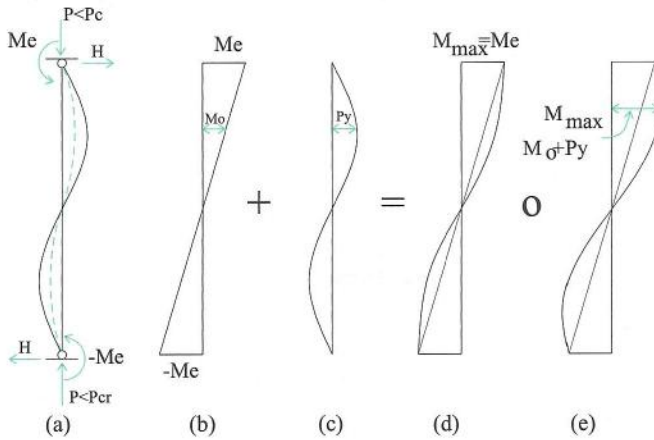


Fig. 2 Momentos en elementos esbeltos a flexocompresión, en curvatura doble

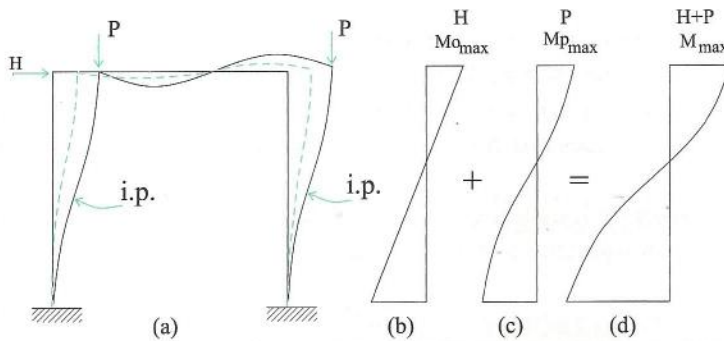


Fig. 3 Pórtico con uniones rígidas arriostradas lateralmente

Es conveniente considerar el tipo de condición de borde (grados de libertad en la conexión) y si el pórtico está o no arriostrado ver figuras a continuación.

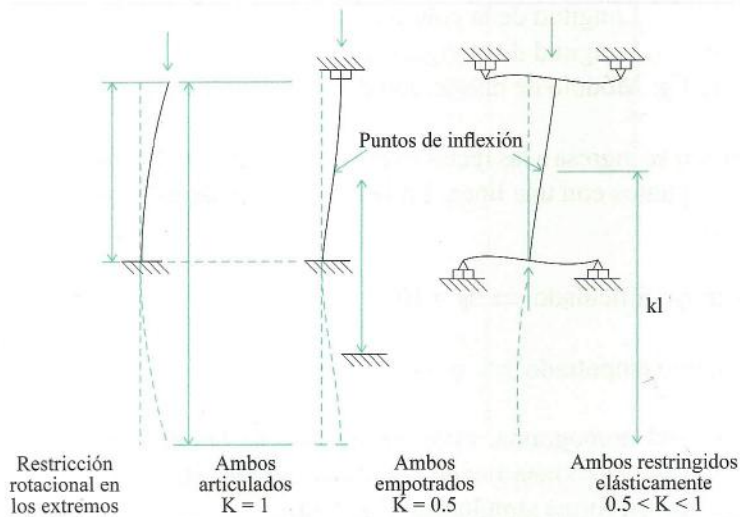


Fig. 4 Longitud efectiva de columnas con desplazamiento lateral impedido

Luego el momento total será:

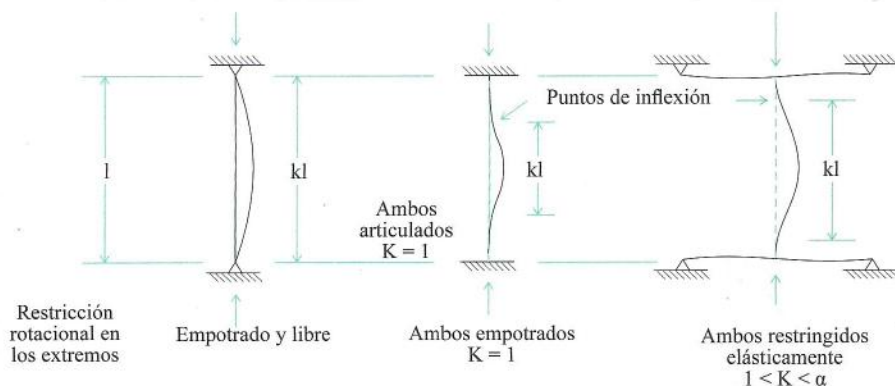


Fig. 5 Longitud efectiva de columnas con desplazamiento lateral permitido

Uno de los métodos empleados para calcular el valor de “k” en pórticos rígidos, haciendo uso de los nomogramas de Jackson & Moreland presentados en la Fig. 6. El nomograma (a) es utilizado para columnas de pórticos con desplazamiento lateral restringido o arriostradas y el (b) para aquellas de pórticos que tienen desplazamientos laterales o no arriostradas.

Para calcular el factor de longitud efectiva, se determina el parámetro ψ en ambos extremos de la columna, con la siguiente fórmula:

$$\psi = \frac{\sum (E_c I_c / L_c)}{\sum (E_g I_g / L_g)}$$

Donde:

- Ic: Momento de inercia de la columna.
- Ig: Momento de inercia de la viga.
- Lc: Longitud de la columna, entre ejes.
- Lg: Longitud de la viga, entre ejes.
- Ec, Eg: Módulo de elasticidad de las columnas y vigas, respectivamente.

Con esos valores ψ se ingresa a las rectas extremas y derecha del nomograma correspondiente, y se unen ambos puntos con una línea. En la intersección de esta línea con la recta central se lee el valor de k.

“ ψ ” $\Rightarrow$ Para apoyo articulado $\Rightarrow \psi = 10$

“ ψ ” $\Rightarrow$ Para apoyo empotrado $\Rightarrow \psi = 1$

Los valores “K” del nomograma, están en función de las deformaciones definidas de los pórticos arriostrados. Las vigas tienen curvatura simple, las columnas también, y además estas deben pandear en forma simultánea. Fig. 6 (a)

En pórticos no arriostrados tanto las vigas como las columnas deben tener doble curvatura. Fig. 6 (b).

La rigidez de las vigas, en casos especiales de conexión del lado opuesto al de conexión con la columna, será:

- Pórtico no arriostrado con extremo opuesto articulado 0.5
- Pórtico no arriostrado con extremo empotrado 0.67
- Pórtico arriostrado con extremo opuesto articulado 1.5
- Pórtico arriostrado con extremo opuesto empotrado 2.0

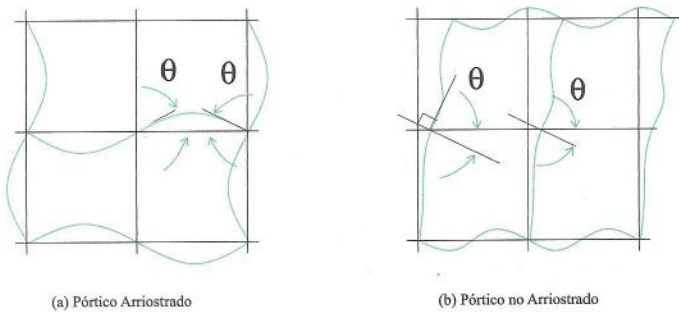


Fig. 6 Deformación de vigas y columnas para los cuales pueden aplicarse los nomogramas de Jackson & Moreland

NOMOGRAMA DE JACKSON Y MORELAND

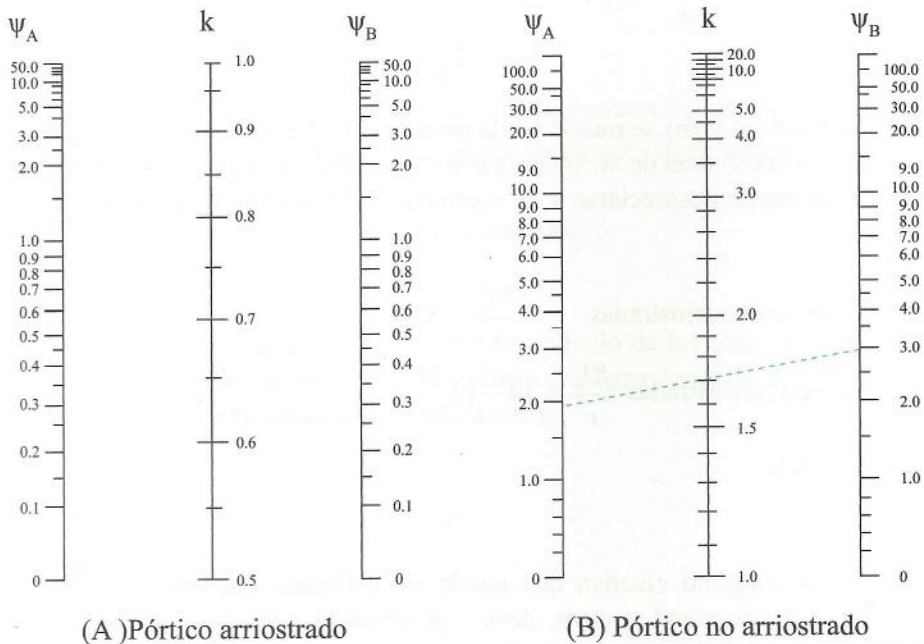


Fig. 7 Nomogramas de Jackson & Moreland

En el caso de columnas de concreto armado, las columnas normalmente son poco esbeltas y su falla no se produce por pandeo; no obstante, los momentos de segundo orden reducen la capacidad resistente del elemento, y dependiendo de la esbeltez de la columna, dicha reducción puede ser muy considerable.

La Fig. 7 muestra una columna sometida a P y M con una excentricidad "e" igual en ambos extremos.

El momento indicado es constante y produce una deformación. Estas deflexiones son deformaciones de primer orden, incrementan la excentricidad de la carga axial del elemento y producen la aparición de momentos de segundo orden, que a su vez ocasionan deformaciones adicionales.

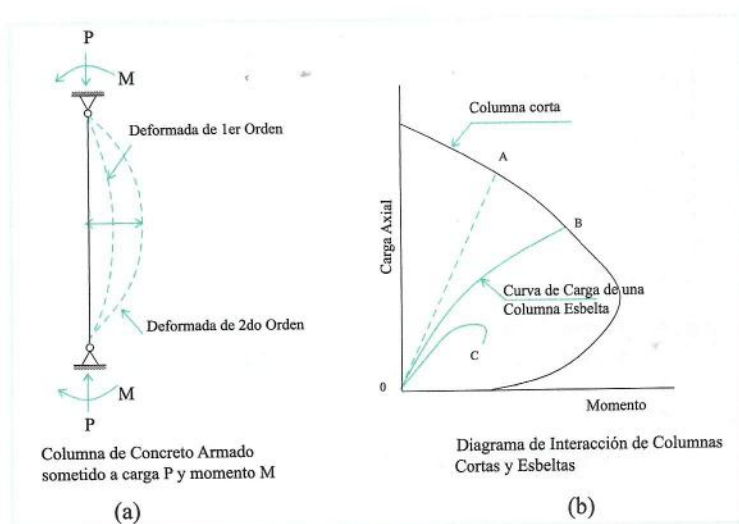


Fig. 8

En las figuras 8 (a) y (b) se puede ver la presencia de los momentos de segundo orden que disminuyen la resistencia de la columna a la carga axial. Si la carga axial se reduce en menos del 5%, esta puede despreciarse y la columna se diseña sin tomar en cuenta el efecto de esbeltez.

• Para columnas no arriostradas $\frac{Kl_u}{r} \leq 22$

• Para columnas arriostradas $\frac{Kl_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2}$

Pero: $\frac{M_1}{M_2} \geq 0.5$

Donde:

k: Factor de longitud efectiva que puede ser estimado empleando los nomogramas de Jackson & Moreland u otros, debe considerar el agrietamiento de los elementos de concreto armado.

Lu: Longitud libre de la columna. Ver Fig. 9.

- r : Radio de giro de la sección de la columna que puede considerarse igual a $0.3h$, para columnas rectangulares, y a 0.25 para las circulares, donde h y d son las dimensiones de la sección transversal en la dirección de análisis.
- M_1 : Menor momento amplificado en el extremo de la columna. Es positivo si la columna se forma bajo la curvatura simple, y negativo si se deforma bajo curvatura doble.
- M_2 : Mayor momento amplificado en el extremo de la columna, siempre es positivo.

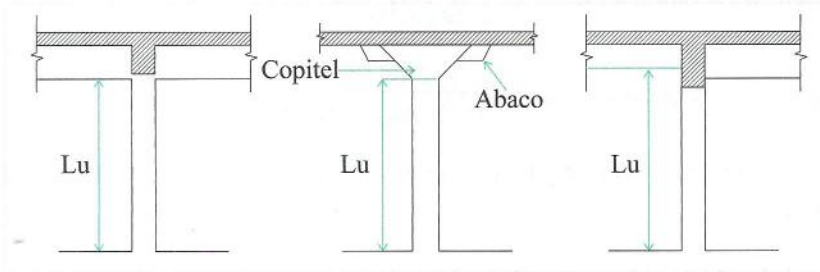


Fig. 9 Longitud libre de columnas

Es necesario considerar que todos los pórticos de alguna manera presentan desplazamientos laterales, por lo que el código del ACI sugiere dos criterios para clasificar las columnas en arriostradas y no arriostradas.

- Si los momentos de segundo orden no exceden el 5% de los momentos de primer orden, la estructura se considerará arriostrada.
- Si el índice de estabilidad, Q , es menor que 0.05, la estructura podrá ser considerada arriostrada, donde:

$$Q = \frac{\sum P_{uo}}{V_{us} L_c}$$

Donde:

- ΣP_u : Suma de las cargas axiales amplificadas de las columnas del entrepiso en estudio.
- Δ_o : Desplazamiento lateral de entrepiso obtenido de un análisis de primer orden, por efecto de la fuerza cortante V_u .
- V_u : Fuerza cortante amplificada del entrepiso en estudio
- L_c : Longitud de la columna medida a ejes.

ΣP_u para la máxima combinación de carga. Para el cálculo de los términos ΣP_u , M_1 , M_2 y Δ_o se efectuará un análisis se considerará el efecto del agrietamiento de los elementos de concreto armado, utilizando los siguientes parámetros:

- Momento de inercia

Vigas	0.351 g
Columnas	0.701 g
Muros	
No agrietados	0.701 g
Agrietados	0.351 g
Losas sin Vigas	0.251 g

- Área $1.00 A_g$
- I_g y A_g : respecto al eje centroidal despreciando el As
- Para cargas laterales permanentes $I_g = I/1 + \beta d$
- Para pórticos arriostrados, $\beta d = \frac{P_{mu} \text{ (Carga muerta)}}{P_u \text{ (Carga Total)}}$
- Para pórticos no arriostrados, $\beta d = \frac{P_{mu} \text{ (Carga muerta horizontal)}}{P_u \text{ (Carga Total horizontal)}}$

Se produce debido a que bajo cargas sostenidas el efecto del creep incrementa las deflexiones en los elementos.

Para sismos $\beta d = 0$ (Por ser momentáneo).

10.2.8 Diseño de columnas esbeltas de concreto armado según el A.C.I.

Se diseñan similarmente a las columnas cortas; adicionalmente, los momentos de diseño incluyen los efectos de segundo orden. El A.C.I. considera dos métodos para su análisis.

El primero efectúa un análisis de segundo orden en el que deben considerarse las cargas axiales, deflexiones, agrietamiento de sección y duración de cargas etc.

El segundo, llamado también método de amplificación de momentos, consiste en incrementar los momentos calculados en los análisis de primer orden por un valor “ δ ”.

$$Kl_u \leq 100$$

Según ACI

Método de amplificación de momentos por factores de amplificación

Se fundamenta en un análisis de segundo orden. Se deducirá para una columna biarticulada sometida a carga axial y momentos iguales en sus extremos (ver Fig.10).

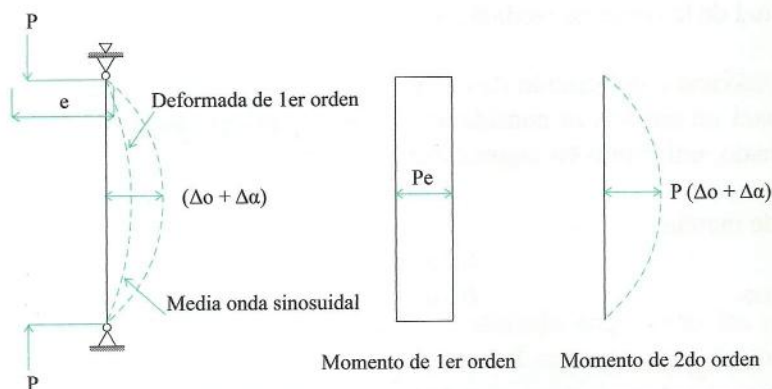


Fig. 10 Diagrama de momentos de primer y segundo orden de una columna a flexo compresión

Si consideramos que la deformación producida por el momento externo, tiene la forma de media onda sinusoidal, la deflexión producida por los momentos de segundo orden Δa es:

$$\Delta a = \left[\frac{P}{EI} (\Delta o + a) \frac{1}{\pi} \right] \frac{1}{\pi} \quad (1)$$

De $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ y la ecuación (1) se tiene:

$$\Delta a = \left[\Delta o + \Delta a \right] \frac{P}{P_c} \quad (2)$$

La deflexión total en el centro de la columna es:

$$\Delta = \Delta o + \Delta a = \frac{\Delta o}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad (3)$$

El momento total en esta sección es:

$$M_c = M_o + P \Delta \quad (4)$$

De (4) y con la relación $\Delta o = M_o l^2 / 8 EI$:

$$M_c = M_o \left[1 + \frac{Pl^2}{8EI} \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \right) \right] \quad (6)$$

A partir de $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$

$$P = \frac{P \pi^2 EI}{P_c l^2} \quad (7)$$

$$M_c = M_o \left(\frac{1 + 0.23 P / P_c}{1 - P / P_c} \right) = \delta M_o \quad (8)$$

Despejando y ordenando términos:

$$\delta M = \left(\frac{1 + 0.23 P / P_c}{1 - P / P_c} \right) \quad (9)$$

“ δ ” es para una columna biarticulada sometida a momentos flectores iguales en sus extremos. El factor $0.23P/P_c$ en función del diagrama de momentos flectores de primer orden. En columnas con momentos diferentes en sus extremos, puede despreciarse luego se tiene:

$$\delta = \frac{1}{1 - P / P_c} \quad (10)$$

Para columnas que tienen momentos diferentes en sus apoyos, el momento máximo de primer orden no se encuentra en el mismo punto que el máximo momento de segundo orden; y, por lo tanto, no deben sumarse en un mismo punto.

$C_m M_2$: es equivalente a la forma de los momentos

C_m : factor de conversión.

M_2 : momento máximo en el extremo del elemento.

a) Método de amplificación aplicado para columnas de pórticos arriostrados

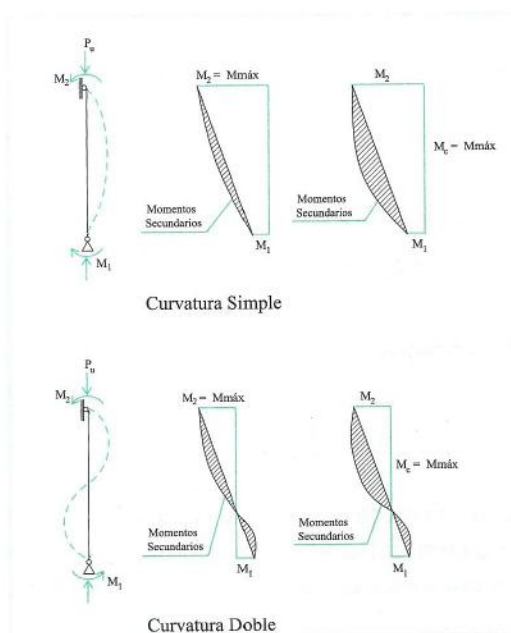
El ACI define procedimientos propios, tanto para el diseño de columnas esbeltas de pórticos arriostrados como para columnas en pórticos no arriostrados. En el primer caso, los elementos a compresión se diseñan para P_u y M_c . Donde:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad (11)$$

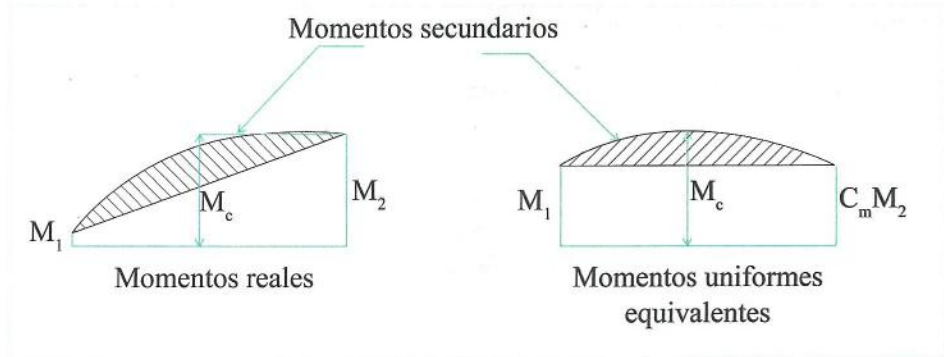
δ_{ns} = Factor de amplificación de momentos

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \quad (12)$$

$\phi = 0.75$ (debido a que el tipo de esfuerzo transversal de la columna no afecta el cálculo de δ_{ns})



Valor de los momentos máximos a partir de los momentos secundarios en columnas esbeltas



Simplificado del parámetro C_m

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(KL_u)^2} \quad (13)$$

Cálculo de EI:

$$EI = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_d} \quad (14)$$

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad (15)$$

donde:

E_s : Módulo de elasticidad del acero.

I_{se} : Momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la sección bruta.

Aproximadamente $\beta_u \approx 0.6$ Por lo que $EI \approx 0.25 E_c I_g$

Si el elemento no está sometido a cargas transversales entre apoyos

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad (16)$$

En caso contrario $C_m = 1$

Cálculo de M_2 (mínimo):

$$M_2 \text{ mín} = P_u (1.5 + 0.03h) \quad (17)$$

Si $M_{2\text{min}} > M_2$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$

$$C_m = 1$$

M_2 en $M_c = \delta ns$

M_2 no será menor que $M_{2\text{min}} = P_u (1.5 + 0.03h)$

b) Método de Amplificación para columnas de pórtico no arriostrados

Los momentos en los extremos del elemento sometido a compresión, M_1 y M_2 se calculan como siguen:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \\ M_2 &= M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Donde:

M_{1ns} : Momento factorizado en el extremo del elemento, donde actúa M_1 debido a cargas que no producen desplazamientos laterales apreciables.

M_{2ns} : Momento factorizado en el extremo del elemento, donde actúa M_2 debido a cargas que producen desplazamientos laterales apreciables.

M_{1s} : Momento factorizado en el extremo del elemento, donde actúa M_1 debido a cargas que producen desplazamientos laterales apreciables.

M_{2s} : Momento factorizado en el extremo del elemento, donde actúa M_2 debido a cargas que producen desplazamientos laterales apreciables.

δ_s : Factor de amplificación de momento en elementos no arriostrados.

Calcular los términos δ_s M_s en las ecuaciones (19). Pueden emplearse tres criterios:

1. A través de un análisis de 2do orden, empleando las propiedades de los elementos definidos en la sección 10.4.2. del ACI -2008
2. Por medio de la siguiente expresión:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s \quad (20)$$

Si $\delta_s > 1.5$ este procedimiento no podrá ser empleado para calcular el valor de $\delta_s M_s$

3. Por medio de la siguiente ecuación:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq M_s \quad (21)$$

Donde:

$\sum P_u$: Suma de las cargas últimas de gravedad de las columnas del entrepiso en estudio.

$\sum P_c$: Suma de las cargas críticas de las columnas del entrepiso que generan la rigidez lateral.

Si:

$$\frac{I_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} \quad (22)$$

La columna deberá ser diseñada para resistir la carga P_u y el momento M_c , calculado a través de (11), utilizando los valores de M_1 y M_2 determinados mediante la Ec. (19), o sea:

$$M_{c1} = \delta_{ns} (M_{1ns} + \delta_s M_{1s})$$

$$M_{c2} = \delta_{ns} (M_{2ns} + \delta_s M_{2s})$$

Ya que al ser columna muy larga, el máximo momento puede ocurrir en cualquier sección de la misma.

El parámetro β_d se tomará:

$$\beta_d = \frac{\text{Máximo corte amplificado sostenido en el piso}}{\text{Máximo corte amplificado en el piso}}$$

Cuando las fuerzas horizontales son de corta duración, como en el caso de sismos: $\beta_d = 0$.

Si las fuerzas horizontales son permanentes, no de sismo, se puede tomar por simplificación $\beta_d = 1$.

Además de verificar las condiciones de resistencia de la estructura bajo la acción de cargas laterales, el código recomienda considerar también su estabilidad a través de los siguientes criterios (ACI – 10.13.6):

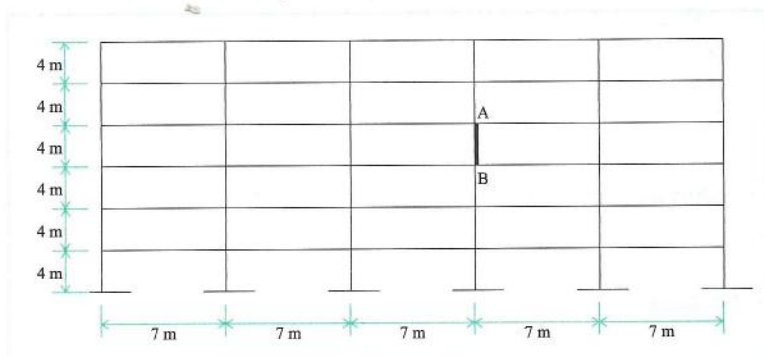
1. Si $\delta_s M_s$ se evalúa mediante un análisis de 2° orden, el cociente de las deflexiones laterales de 2° orden entre las deflexiones laterales de 1° orden, debidas a 1.4 veces la carga permanente, 1.7 veces la carga viva más la carga lateral, no deberá ser mayor que 2.5.
2. Si $\delta_s M_s$ se estima haciendo uso del índice de estabilidad, Q , éste parámetro, evaluando para la suma de las cargas verticales últimas debidas a 1.4 veces, la carga permanente más 1.7 veces la carga viva no deberá exceder 0.6.
3. Si $\delta_s M_s$ se determina a través de la expresión (20), el factor de amplificación δ_s , evaluado utilizando ΣP_u y ΣP_c correspondientes a la carga axial permanente factorizada y la carga viva factorizada, deberá ser positivo y menor que 2.5.

Para la verificación de la estabilidad de la estructura, el parámetro β_d se tomará igual al cociente de la máxima carga axial permanente factorizada entre la máxima carga axial factorizada.

Adicionalmente, el código recomienda que en pórticos con desplazamientos horizontales, las vigas sean diseñadas con los momentos amplificados de las columnas. Esto pretende evitar la formación de rótulas plásticas en los elementos a flexión, con la consecuente pérdida de rigidez del conjunto y reducción de la capacidad de carga de las columnas.

Ejemplo: Diseñar la columna interior (A-B) del 4to nivel, esbelta en un pórtico arriostrado con vigas de 1.20 m × 30 cm, soportando vigas armadas en dos sentidos. La altura libre de columnas es 4 m, las columnas interiores son de 45 cm × 45 cm, y columnas exteriores de 40 × 40 cm.

La estructura está solicitada a carga viva y carga muerta.



CM

$$P = 105 \text{ Tn}$$

$$M2 = 0.30 \text{ T-m}$$

$$M1 = -0.30 \text{ T-m}$$

CV

$$P = 80 \text{ Tn}$$

$$M2 = 15 \text{ Tn}$$

$$M1 = 14 \text{ T-m}$$

La columna presenta curvatura doble bajo carga muerta, y curvatura simple bajo carga viva.

Utilizar $f'c = 280 \text{ Kg/cm}^2$; $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$

Solución:

Inicialmente, para un predimensionado, se considerará como columna corta.

Cargas últimas: Usando componentes del ACI

$$P_u = 1.4 \times 105 + 1.7 \times 80 = 285 \text{ Tn}$$

$$M_u = 1.4 \times 0.30 + 1.7 \times 15 = 25.92 \text{ T-m}$$

Para columnas externas:

Asumiendo estribos $\emptyset 3/8''$, Acero longitudinal de $\emptyset 1 1/4''$

$$\gamma = (45 - 2 \times 3.81 - 2 \times 0.953 - 3.175) / 45 = 0.73$$

De los gráficos de columnas:

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{283.000}{45 \times 45} = 139.8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{2592000}{45 \times 45 \times 45} = 28.44 \text{ K/cm}^2$$

Considerando inicialmente un $K = 1.0$

Tendremos:

$$\frac{Kl_u}{r} = \frac{1.0 \times 400}{0.3 \times 45} = 29.63$$

Considerando que el límite para condiciones de columna corta es:

$$34 - 12 \frac{M_1}{M_2} = \frac{1.4(-0.3) + 1.7 \times 14}{1.4(0.3) + 1.7 \times 15} = 23.17$$

$$29.63 > 23.17 \Rightarrow \text{es columna larga}$$

De acuerdo a la tabla dada en la que se tendrá las siguientes inercias:

$$I_c = 0.7 I_g = \frac{0.7 \times 45 \times 45^3}{12} = 239\,203.12 \text{ cm}^4$$

$$I_c/L_c = \frac{239\,203.12}{400} = 598.00 \text{ cm}^3$$

Vigas considerando $I_g = 2 I_{\text{alma}}$

$$I_v = 0.35 I_g = \frac{0.35 \times 2 \times 120 \times 30^2}{12} = 189\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_v/L_c = \frac{189\,000}{700} = 270 \text{ cm}^3$$

Calculando factor de esbeltez:

$$\psi_a = \psi_b = \frac{598 + 598}{270 + 270} = 2.215$$

Ver gráfico de interacción $K = 0.865$

$$Kl_u = \frac{0.865 \times 400}{0.3 \times 270} = 25.63$$

$$25.63 > 23.17 \text{ considerar columnas esbeltas}$$

Verificación de momentos mínimos

$$M_{2\min} = 283(1.5 + 0.03 \times 45) = 8.06 \text{ T-m} \approx 8.00 \text{ T-m}$$

$$\text{Calcular } C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$

$$M_1 = 1.4 \times (-0.30) + 1.7 \times 14 = 23.38 \text{ T-m}$$

$$M_2 = 1.4 \times (0.30) + 1.7 \times 15 = 25.92 \text{ T-m}$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{23.38}{25.92} = 0.96$$

$$\beta_d = \frac{P_{mu}}{P_{mu} + P_{vu}} = \frac{1.4 \times 105}{1.4 \times 105 + 1.7 \times 80} = 0.52$$

Para una cuantía entre 0.02 y 0.03 usaremos:

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} = \frac{0.4 \times 254344.64 \times \left(\frac{45^4}{12}\right)}{1 + 0.52} = 2.2872192 \times 10^{10}$$

La carga cuántica por pandeo será:

$$P_c = \frac{2 EI}{(Kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 2.2872192 \times 10^{10}}{(0.865 \times 400)^2} = 1883713.62$$

El factor de magnificación de momento será:

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u / 0.75 P_c} = \frac{0.96}{1 - 283 / 0.75 (1883713.62)} = 1.2$$

Tabla A - 1

N.º barras	Diámetro		Número de varillas							Peso	Desp.
			1	2	3	4	5	6	7		
	Ø	cm	Área en centímetros cuadrados							kg/m	%
N.º 2	1/4	0.635	0.316	0.632	0.948	1.264	1.580	1.896	2.212	0.25	5
N.º 3	3/8	0.953	0.713	1.426	2.139	2.852	3.565	4.278	4.991	0.58	7
N.º 4	1/2	1.270	1.267	2.534	3.801	6.068	6.335	7.602	8.869	1.02	8
N.º 5	5/8	1.587	1.978	3.956	5.934	7.912	9.890	11.868	13.846	1.60	9
N.º 6	3/4	1.905	2.850	5.700	8.550	11.40	14.25	17.10	19.95	2.26	10
(7)	7/8	2.223	3.879	7.758	11.64	15.52	19.40	23.27	27.15	3.09	10
N.º 8	1	2.540	5.067	10.13	15.20	20.27	25.34	30.40	35.47	4.04	10
N.º 11	1 3/8	3.581	10.06	20.12	30.18	40.24	50.30	60.38	70.42	7.95	10
	Ø"	Ø/2	Longitudes cm								
N.º 2	1/4	0.316	1.994	3.988	5.982	7.976	9.970	11.97	13.96		
N.º 3	3/8	0.477	2.993	6.986	6.979	11.97	14.96	17.96	20.95		
N.º 4	1/2	0.635	3.989	7.978	11.97	15.96	19.95	23.93	27.92		
N.º 5	5/8	0.794	4.985	9.970	14.96	19.94	24.93	29.91	34.90		
N.º 6	3/4	0.953	5.985	11.97	17.95	23.94	29.93	35.91	41.89		
(7)	7/8	1.112	6.982	13.56	20.95	27.03	34.91	41.89	48.88		
N.º 8	1	1.270	7.980	15.96	23.94	31.92	39.90	47.88	55.86		
N.º 11	1 3/8	1.790	11.250	22.50	33.75	45.00	56.25	67.50	78.75		

Tabla A - 2

Ancho mínimo de vigas ($b_{\min}$) para colocación de varillas

N.º varillas	Número de varillas en una cap								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º 3	15	19	22	25	29	33	36	39	43
N.º 4	16	20	24	27	31	35	39	43	46
N.º 5	16	21	25	29	33	37	41	45	49
N.º 6	17	22	26	30	35	39	44	48	52
N.º 7	17	22	27	32	36	41	46	51	56
N.º 8	18	23	28	33	38	43	48	53	59
N.º 9	19	25	30	36	42	48	53	59	65
N.º 10	20	26	33	39	46	52	59	65	72
N.º 11	21	28	35	42	49	57	64	71	78

Agregado máximo de concreto 3/4"

**Notas:**

1. La tabla está preparada para recubrimientos de 4 cm (en caso de menores recubrimientos especificados, el ancho disminuirá es 2 veces la diferencia de recubrimientos).
2. La tabla está preparada para estribos de $\text{Ø } 3/8''$
 Para estribos de $\text{Ø } 1/2''$ aumentar 0.5 cm
 Para estribos de $\text{Ø } 5/8''$ aumentar 1.0 cm
 Para estribos de $\text{Ø } 1/4''$ disminuir 0.5 cm
3. Para varillas de diámetros diferentes usar el ancho de la tabla para el número dado de varillas del menor diámetro más el incremento por cada varilla adicional de mayor diámetro.

BIBLIOGRAFÍA

- Ortega, J. (2006). *Manual de estructuras de concreto armado*. Lima: CAPECO.
- Ortega, J. (2006). *Inspección de estructuras de concreto armado*. Lima: CAPECO.
- Ortega, J. (2005). *Diseño de estructuras de concreto armado*. Lima: CAPECO.
- Mc Cormac, J. y Brown, R. (2011). *Diseño de concreto reforzado*. 8va. ed. México: Alfaomega.
- Rosenblueth, E.; Chopra, A.; Newmark, N.; Steva, L.; Del Buen, O.; Park, R.; Paulay, TL; Priestley, M.; Whitman, R.; Brilak, J.; Goldbeg, A. y Rukos, E. (1980). *Design of earthquake resistant structures*. London: Pentech Press.
- Nilson, A. y Darwin, D. (2009). *Design of concrete structures*. 14th. ed. EE. UU.: McGraw-Hill Higher Education.
- Nawy, E. (2008). *Reinforced concrete*. 6th. ed. EE. UU.: Prentice Hall.
- Faber, J. y Mead. F. (1961). *Reinforced concrete*. London: E. & F.N. Spon Ltd.
- Reynolds y Steedman. (2007). *Reinforced concrete designer's handbook*. 11th. ed. London: CRC Press.
- Fintel, M. (1975). *Handbook of concrete engineering*. EE. UU.: Van Nostrand Reinhold Company.
- Park, R. y Paulay, T. (1975). *Reinforced concrete structures*. EE. UU.: Wiley.

AUTOR



**Ing. Juan Emilio
Ortega García**

Ingeniero civil por la Universidad Ricardo Palma, con estudios de posgrado en Estructuras de Acero, en la Pontificia Universidad Católica del Perú; posgrado en Estructuras y Construcciones de Acero y Concreto, en la Universidad Central y la Universidad Simón Bolívar de Venezuela; estudios de posgrado en Planeamiento, Control y Economía en la Industria de la Construcción, en la City University de Londres; y estudios de Diseño de Estructuras de Acero, en el Westminster College de Londres.

Es autor de *Manual de estructuras de concreto armado* e *Inspección de estructuras de concreto armado*, así como de diversos libros sobre estructuras de concreto, supervisión de obras y estructuras de acero, los cuales son utilizados en distintas universidades a nivel nacional e internacional.

Libro indispensable que desarrolla la utilización práctica de numerosas obras con estructuras de concreto armado en diversos países, por lo cual presenta información actualizada con el reglamento ACI-2011.

Esta publicación tiene el objetivo de ser un aporte bibliográfico sobre el tema del concreto armado; por ello, se tratan aspectos como el desarrollo histórico del concreto, la proporción de los materiales constitutivos, flexión, columnas, escaleras, entre otros.

Este libro está dirigido a profesionales y estudiantes de ingeniería en sus distintas especialidades.

Contenido

- Capítulo 1: Concreto armado
- Capítulo 2: Análisis, diseño, resistencia y serviciabilidad
- Capítulo 3: Flexión
- Capítulo 4: Losas armadas en un sentido
- Capítulo 5: Diseño de vigas con acero en tracción y compresión
- Capítulo 6: Diseño de vigas "T"
- Capítulo 7: Resistencia al corte y tracción diagonal
- Capítulo 8: Adherencia, anclaje y longitud de desarrollo
- Capítulo 9: Escaleras
- Capítulo 10: Columnas



70 INGENIERÍA 267/01
254281 SUELOS. ESTRUCTURAS. RESISTENCIA
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CO
ORTEGA GARCIA. JUAN

9786123042172 35 2 002661041N 12.2016

02550



2 401120 225683



25,50 €

GRV 3B

**EDITORIAL
MACRO**

Oficina principal

Av. Paseo de la República N.º 5613, Miraflores
Lima, Perú
Central telefónica: (511) 748-0560
Email: ventas@editorialmacro.com
atencionalcliente@editorialmacro.com



Encuétranos como

Editorial Macro



Encuentra aquí más publicaciones

www.editorialmacro.com