

# INGENIERÍA

## CIVIL Y CONSTRUCCIÓN

Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)



[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**

**INGENIERÍA SISMORRESISTENTE**

**Alejandro Muñoz Peláez**



**2002**

### ***La Ingeniería Sismorresistente***

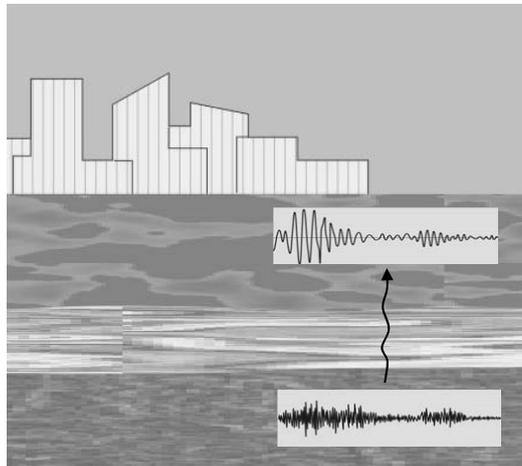
La Ingeniería Sismorresistente es una rama de la ingeniería cuyo principal objetivo es el proyecto y construcción de obras civiles, de manera tal que puedan tener un comportamiento satisfactorio durante los sismos.

Originalmente, los esfuerzos de la Ingeniería Sismorresistente se orientaban casi exclusivamente a tratar de evitar el colapso de las construcciones en sismos grandes. Hoy en día, se trata de cuantificar este objetivo en términos de probabilidades, al mismo tiempo que se precisan nuevos objetivos asociados al comportamiento de las construcciones frente a terremotos menos severos, pero más frecuentes. En la definición de estos nuevos objetivos, se incluyen criterios de minimización de daños, operatividad de las instalaciones, costos de reparación, etc.

Para el logro de estos objetivos, concurren muchas disciplinas, que no necesariamente pertenecen al ámbito propio de la ingeniería misma. En el proyecto de toda obra en zonas de sismicidad elevada, es necesario conocer la frecuencia y severidad de los terremotos que la afectarán. Estas tareas corresponden a la Geología, la Sismología y la Mecánica de Suelos, entre otras disciplinas.

El comportamiento de las estructuras durante los sismos constituye fundamentalmente un problema dinámico de gran complejidad. Por un lado, el movimiento del suelo es altamente complejo y, por otro, las propiedades estructurales cambian durante los segundos que dura un terremoto severo. Sin embargo, estimar razonablemente bien la respuesta elástica de una estructura frente a un sismo pequeño es una tarea relativamente sencilla que corresponde a la Dinámica de Estructuras Elásticas, con la concurrencia indirecta de disciplinas como la Resistencia de Materiales y el Análisis Estructural Clásico.

Frente a los grandes sismos, las estructuras sufren un daño importante; por tanto, para poder anticipar su desempeño en estos eventos, es necesario conocer el comportamiento de los materiales y elementos estructurales en régimen inelástico, no solo ante cargas estáticas sino fundamentalmente ante acciones dinámicas. Estas actividades corresponden al Análisis Inelástico de Estructuras y requieren de la concurrencia de materias específicas como Concreto Armado, Acero Estructural, Albañilería, etc.



- Diseño en Concreto, Acero, etc.
- Materiales de Construcción
- Mecánica Estructural
- Dinámica de Estructuras
- Procesos Aleatorios
- Sismología
- Geología y Mecánica de Suelos

**Figura 1.1** Muchas disciplinas son necesarias para diseñar y construir obras de ingeniería resistentes a terremotos.

### ***La investigación y las lecciones de los sismos pasados***

La investigación experimental juega un papel importante en la Ingeniería Sismorresistente. Experimentalmente se estudian los suelos, el comportamiento de los materiales y estructuras, y se investiga el mejoramiento de los sistemas estructurales.

Como resulta altamente complicado o casi imposible reproducir en el laboratorio las condiciones de campo durante un terremoto, la investigación experimental tiene claras limitaciones, pero su aporte es igualmente valioso como sucede en toda actividad de ingeniería.

Es frecuente decir que los verdaderos laboratorios de la Ingeniería Sismorresistente están en las ciudades, las represas y las grandes obras de ingeniería durante los terremotos. Los sismos importantes nos permiten evaluar el comportamiento de los sistemas estructurales, la confiabilidad de nuestros métodos de análisis y diseño, y ponen en evidencia los errores cometidos durante el proyecto y construcción de las obras.

La Ingeniería Sismorresistente se ha desarrollado también gracias a la investigación teórica. Los trabajos de investigación van desde el empleo de modelos para cuantificar el peligro sísmico hasta técnicas numéricas para evaluar el comportamiento inelástico de estructuras en sismos grandes.

## ***Proyecto y construcción de obras civiles***

Mucho de lo que hoy se conoce en Ingeniería Sismorresistente proviene de lo observado en sismos pasados. Varios criterios y reglas de buena práctica se sustentan exclusivamente en observaciones de campo y es frecuente que estos criterios ni siquiera se puedan cuantificar o explicar teóricamente.

Sin embargo, para el desarrollo de proyectos específicos, como edificios convencionales, se dispone de procedimientos y reglas reconocidas que se han materializado en los códigos de diseño. No obstante, debido al gran nivel de incertidumbre que tienen las solicitaciones sísmicas y lo modestos que son nuestros procedimientos de análisis y diseño, los códigos no necesariamente garantizan un buen desempeño sismorresistente de toda obra de ingeniería.

## ***Respuesta humana a los terremotos***

Todo aquel que ha vivido un sismo severo recuerda lo que hacía en el instante que empezó. Durante los segundos que dura un terremoto hay pánico general, algunas personas huyen hacia el exterior de los edificios, otras buscan protección en el interior, se interrumpen las comunicaciones y la energía, algunos edificios colapsan y muchos quedan seriamente dañados.

Luego de los segundos de terror, la ciudad queda sin comunicaciones ni servicios básicos, hay muchos heridos en las calles y hay gente atrapada en los edificios caídos. Ese día empieza el rescate de sobrevivientes y se activan planes para manejar la emergencia.

La semana que sigue al día del sismo se dedica al rescate de sobrevivientes y a la reubicación temporal de damnificados; empieza el entierro de las víctimas. En el mes, se demuelen algunos edificios y se buscan culpables entre los proyectistas, constructores y autoridades; la experiencia indican que generalmente “no hay culpables”. Luego, empieza la reparación y reforzamiento de edificios según las posibilidades técnicas y económicas de los afectados.

En el lapso de uno o dos años, se reúnen los expertos y se ajustan los códigos de diseño y construcción; las normas ahora lucen más exigentes y sofisticadas. Luego de algunos años se olvida la tragedia, se cuestionan los costos de protección sísmica en las obras civiles y los gastos de investigación; se relaja el cumplimiento de los códigos.

Después de algunas décadas crece una extraña sensación de confianza entre los proyectistas, los edificios empiezan nuevamente a ser cada vez más osados estructuralmente. Algunas voces alertan del peligro, pero no son escuchadas. Son las voces de los profesionales con cultura histórica y conocimientos de los terremotos recientes en otras partes del mundo.

Tarde o temprano, los segundos de pánico regresarán. Mientras estos lleguen revise la figura que sigue y ubíquese en la escala de tiempo.

### Respuesta Humana a los Terremotos

Evento	Tiempo	Reacciones
Gran Terremoto y Réplicas	① Primer minuto	
	② 1 minuto - 1 semana	
	③ 1 semana - 1 mes	
Silencio sísmico	④ 1 mes - 2 años	
	⑤ 2 años - 10 años	
	⑥ 10 años hasta el siguiente sismo	
Gran Terremoto	① Primer minuto	

**Figura 1.2** Respuesta humana a los terremotos

## Fundamentos de Sismología

---

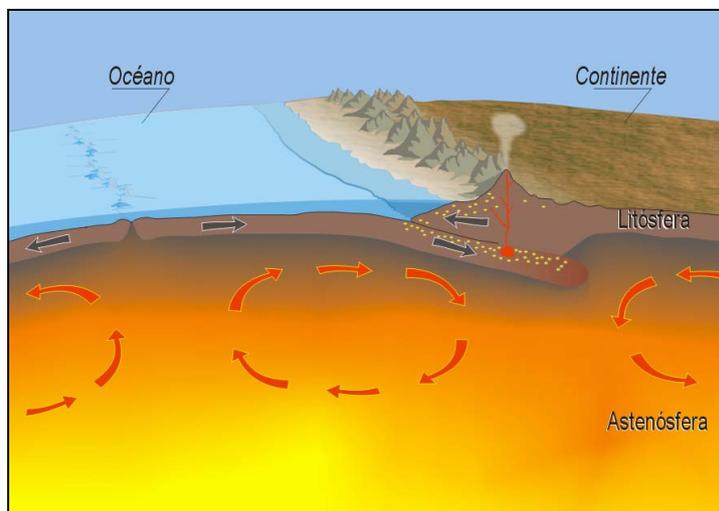
### 2.1. Tectónica de Placas

En el siglo V a. C., Herodoto descubrió fósiles marinos en el desierto de Libia, lo cual le llevó a pensar que tal región habría sido alguna vez parte del fondo marino. En el siglo XVII de nuestra era, Francis Bacon hizo notar la correlación entre las costas orientales de América del Sur y las costas occidentales de África, sugiriendo que quizás alguna vez ambos continentes estuvieron unidos. Observaciones como estas muestran que, a lo largo de la historia, se ha reconocido la naturaleza cambiante de nuestro planeta.

El primer intento de explicar científicamente los cambios en la corteza terrestre se debe a J. Hutton, con la obra *Teoría de la Tierra* (1795). Hutton concebía la tierra como una máquina térmica, modelo con el cual trató de explicar la dinámica general del planeta. Un siglo más tarde, en el XIX, se postularon diversas teorías, algunas de las cuales se han descartado y otras han servido de base para configurar la actual teoría de Placas Tectónicas. Fue en las décadas de 1960 y 1970 cuando, gracias a múltiples avances en diferentes ramas de la Geología, se configuró la actual Teoría de Tectónica de Placas, que pretende explicar de manera unificada la dinámica del planeta.

Según esta teoría, la tierra consta de una capa sólida exterior de aproximadamente 100 Km. de espesor denominada litósfera, cuya superficie exterior corresponde al fondo marino y a la superficie de los continentes. La litósfera descansa sobre una capa, la astenósfera, que se encuentra en estado de semifusión por las altas temperaturas en el interior de la tierra (figura 2.1).

Debido a los gradientes de temperatura en el interior de la tierra, parte del material de la astenósfera se expande y se eleva hasta alcanzar la litósfera, para luego dispersarse horizontalmente dando lugar a las llamadas corrientes de convección en la astenósfera. Estas corrientes arrastran consigo grandes porciones de la litósfera, denominadas *placas tectónicas*, con una velocidad entre 1 y 6 cm. por año. Debido a este movimiento, las placas están en permanente interacción en sus bordes, lo que constituye la causa de casi la totalidad de los terremotos en el planeta.



**Figura 2.1** Corrientes de convección en la astenósfera y bordes de expansión (izquierda) y subducción (derecha)

La figura 2.2 muestra las principales placas tectónicas. Las de mayor dimensión son 6: Pacífico, América, Euroasiática, Australia-India, África y Antártida. Existen, además, otras placas de menor dimensión como la de Nazca y la de Cocos, y también porciones aún más pequeñas denominadas subplacas.



**Figura 2.2.** Placas Tectónicas

Cuando dos placas son arrastradas en sentido contrario, separándose entre sí en el fondo marino, parte del material en fusión alcanza el exterior de la litósfera y se forma nueva corteza. Esta nueva corteza ocupa el lugar dejado por las placas en separación formándose así una cordillera volcánica, denominada **dorsal oceánica**, que se extiende por miles de kilómetros en el fondo marino. Este tipo de borde entre placas se denomina margen de **extensión** o **divergente** (figura 2.2).

Otro tipo de márgenes entre placas es el denominado de **subducción**; en este caso, las placas tienen un movimiento convergente y una de ellas se introduce por debajo de la otra penetrando en la astenósfera donde vuelve a fundirse, debido a las elevadas temperaturas. La placa que se introduce por debajo corresponde a la litósfera marina, mientras que la otra placa puede ser oceánica o continental. Toda la costa occidental de América del Sur corresponde a un borde de subducción, la placa de **Nazca** se introduce por debajo de la placa Sudamericana, dando lugar a una de las zonas de mayor sismicidad en el mundo.

Los denominados bordes de **colisión** corresponden también a un movimiento convergente de dos placas continentales que, por ser de características similares, se comprimen mutuamente sin producirse el buzamiento de alguna de ellas. La placa Indo-Australiana y la placa Euroasiática se juntan en un borde de colisión, fenómeno que ha dado origen a la cadena del **Himalaya**.

Cuando dos placas se deslizan paralelas al borde y en sentido contrario, se trata de un margen de **transformación** o **fractura**. Este tipo de borde une dos márgenes que pueden ser de expansión o subducción y el movimiento relativo horizontal entre placas se transforma, en los extremos del borde, en movimiento de expansión o convergencia; de allí el nombre de borde de transformación. El reconocimiento de este tipo de márgenes permitió explicar el movimiento integral de las placas en relación con sus diferentes bordes. La falla de **San Andrés** constituye un borde de transformación entre las placas de América del Norte y del Pacífico.

Casi la totalidad de los terremotos en el mundo se producen en los bordes de las placas tectónicas y, como se verá más adelante, las características de los sismos dependen fundamentalmente del tipo de bordes en que se producen.

## 2.2. Mecanismos de generación de terremotos

Como consecuencia de la interacción entre las placas tectónicas, la litósfera está constantemente sometida a fuerzas que la van deformando paulatinamente. Mientras los esfuerzos que acompañan las deformaciones pueden ser soportados por el material, la corteza incrementa sus deformaciones y va almacenando energía de deformación elástica. Este proceso se conoce como el *refuerzo lento de energía*.

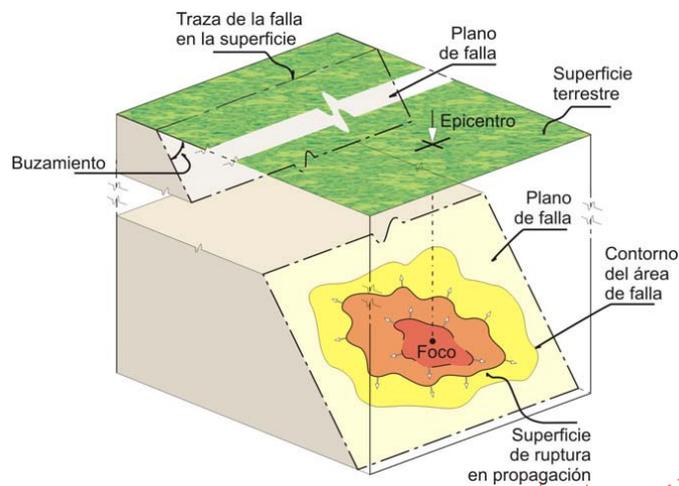
Cuando los esfuerzos en el interior alcanzan valores elevados, se produce un repentino rompimiento del material en el interior de la corteza y la energía almacenada se libera en forma de fricción, calor y ondas sísmicas durante unos segundos. Los trenes de ondas, al llegar a la superficie, pueden pasar desapercibidos o, en algunas ocasiones, pueden producir efectos tan importantes como el cambio mismo del paisaje.



**Figura 2.3** Colapso de un edificio de 5 pisos en el balneario de Santa María, al Sur de Lima, setiembre de 1968

Cortesía del *National Information Service for Earthquake Engineering, Karl V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center, University of California*

Durante un terremoto, el rompimiento del material empieza en una pequeña zona, generalmente de menor resistencia o de esfuerzos más elevados. La zona fallada va propagándose en todas direcciones dentro de un plano denominado el plano de falla. Los bordes del área de falla van extendiéndose de manera irregular de acuerdo con la resistencia y con el nivel de esfuerzos en el interior de la corteza (Figura 2.4). Los bordes de la superficie de ruptura dejan de extenderse conforme van alcanzando zonas de la roca con menores esfuerzos o con mayor resistencia, hasta que en un determinado momento el proceso de ruptura termina.



**Figura 2.4** Propagación de la ruptura de la roca en el plano de falla

En algunas ocasiones, la falla alcanza la superficie y ocasiona cambios importantes del relieve (Figura 2.5).

Mientras crece la superficie de ruptura, ambas orillas -a cada lado del plano de falla- tratan de recuperar la posición que tenían antes de haberse producido la deformación lenta de la roca. Este retroceso se produce de manera espasmódica originando el movimiento de la corteza y la liberación de la energía en trenes de ondas que se propagan y alcanzan la superficie. Esto se conoce como el fenómeno del rebote elástico, teoría que fue presentada por Reid en 1911.

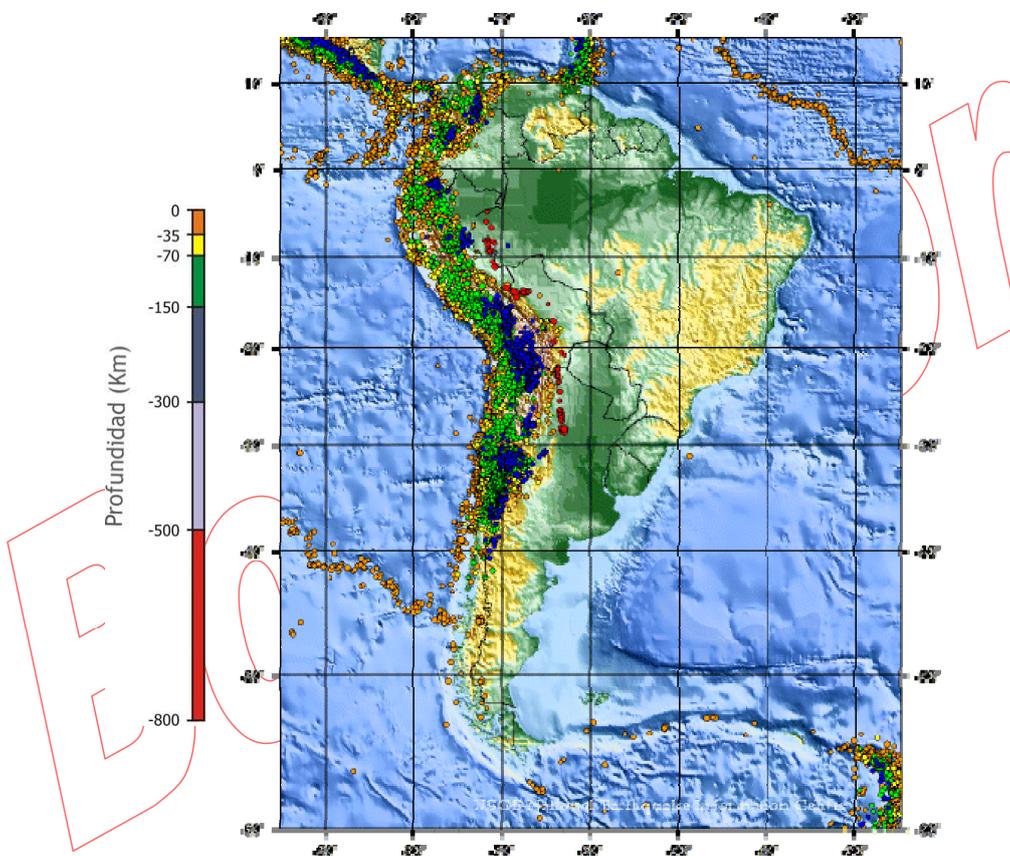


**Figura 2.5** Ruptura en superficie que atraviesa la pista atlética de la escuela de Kuangfu, terremoto de Chi-Chi, 1999, Taiwán  
Cortesía de Mitsutoshi Yoshimine

## Epicentro y Foco

Pese a que, durante un terremoto, el rompimiento de la corteza se produce en una zona de dimensiones considerables, para muchos efectos se debe identificar un punto en la superficie de falla como el inicio de la ruptura o el centro de propagación de las ondas sísmicas. Este punto se denomina foco o hipocentro y se identifica por sus coordenadas geográficas (latitud, longitud) y su profundidad.

La proyección del foco en la superficie terrestre se denomina epicentro. La figura 2.6 muestra la distribución de hipocentros en América del Sur.



**Figura 2.6.** Distribución de hipocentros en América del Sur

Cortesía del *United States Geological Survey* (USGS)

## Parámetros de Falla

Para explicar el mecanismo de un terremoto, se supone que la ruptura se inicia y se propaga en una superficie plana denominada el plano de falla.

La ruptura de la corteza llega a la superficie sólo en pocas ocasiones. La intersección del plano de falla con la superficie se denomina traza de la falla y el ángulo que forma esta intersección con el Norte Geográfico es conocido como el acimut de la traza ( $\phi$ ). La inclinación del plano de falla con la horizontal se denomina buzamiento ( $\beta$ ) (figura 2.7).

El movimiento relativo de los bloques de corteza a ambos lados de la falla se mide por el desplazamiento promedio denominado dislocación ( $\Delta$ ) y por el ángulo que forma el vector desplazamiento con la horizontal ( $\lambda$ ).

Luego de un terremoto, la zona de ruptura tiene un contorno totalmente irregular cuya dimensión horizontal máxima se denomina longitud de la Falla (L) y cuyo ancho (D) se mide en el plano de falla en dirección perpendicular a "L".

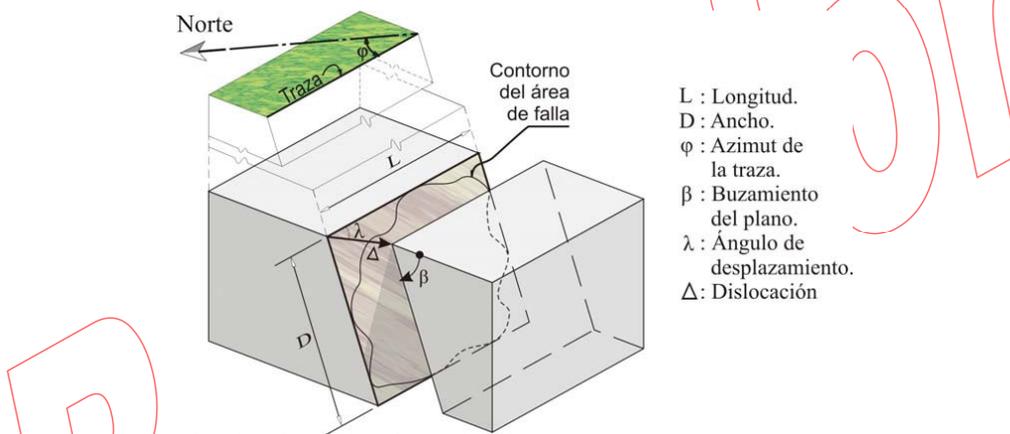


Figura 2.7 Parámetros de falla

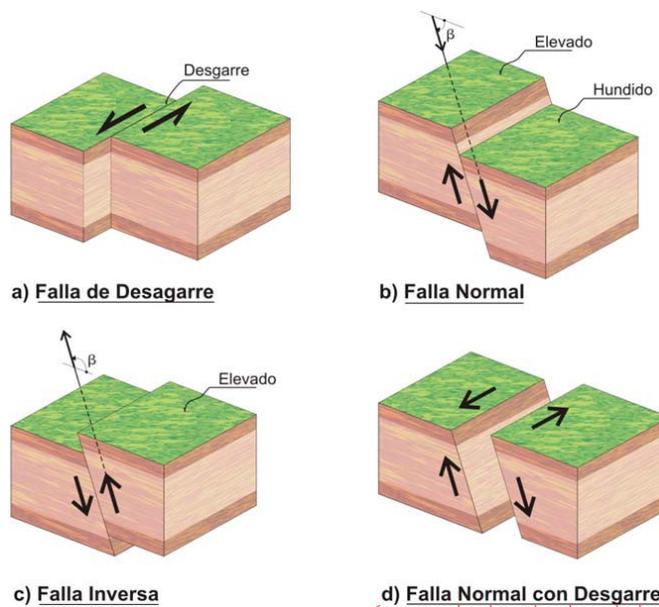
## Tipos de Falla

De acuerdo con el movimiento de la roca y con la inclinación del plano de falla, se reconoce tres tipos de fallas (figura 2.8).

La **falla de desgarre** se caracteriza por el movimiento horizontal de las rocas a ambos lados del plano de falla y tiene un ángulo de buzamiento recto y un ángulo de desplazamiento nulo ( $\beta=90^\circ$ ,  $\lambda=0^\circ$ ).

Las **fallas normales e inversas** corresponden a un movimiento de la roca en dirección perpendicular a la traza. Las fallas normales tienen un ángulo de buzamiento ( $\beta$ ) entre 0 y 90 grados, y las **fallas inversas** corresponden a buzamientos entre 90 y 180 grados.

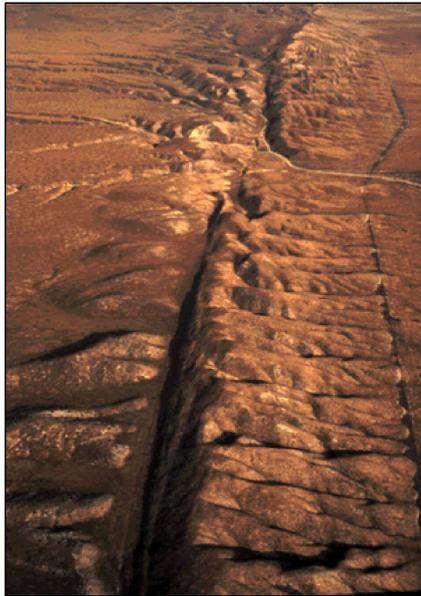
Existen también fallas combinadas, como se muestra en la figura 2.8 (d).



**Figura 2.8** Tipos de falla

Una de las fallas más conocidas y estudiadas es la de San Andrés, en California, EE.UU (figura 2.9). Se extiende a lo largo de 970 Km. y la ruptura alcanza la superficie. Esta falla corresponde a un borde de transformación entre la placa del Pacífico y la placa de América del Norte.

En la mayoría de terremotos, las fallas no alcanzan la superficie y, si lo hacen, no tienen una manifestación tan espectacular como la de San Andrés.



**Figura 2.9**

**Falla de San Andrés, California, Estados Unidos de América**

*Cortesía del United States Geological Survey (USGS)*

### Fallas geológicas activas en el Perú

Diversos autores consideran que una falla está activa cuando se le puede asociar terremotos ocurridos en los últimos 10 ó 35 mil años. En el Perú, entre las principales fallas activas, están las anotadas en la tabla 2.1.

**Tabla 2.1 Fallas activas en el Perú**

<i>Falla</i>	<i>Ubicación</i>
<b>Chaquillbamba</b>	Entre Chaquillbamba y Marcabal, en los departamentos de Cajamarca y La Libertad.
<b>Quiches</b>	Entre Quiches y Chingalpo, en la margen occidental del Río Marañón, al NE de Huaraz.
<b>Cordillera Blanca</b>	En la localidad de Chiquián, en Ancash.
<b>Huaytapallana</b>	Al pie de los nevados de la Cordillera de Huaytapallana, al NE de Huancayo.
<b>Zurite</b>	Al NO del Cuzco.
<b>Tambomachay</b>	Al borde del Cuzco.
<b>Chulibaya</b>	Al NO de Tacna, entre Locumba e Ilabaya.

## Distribución Espacial de los Sismos en el Mundo

De los terremotos de origen tectónicos, aproximadamente el 95 % se producen en los bordes entre placas y se denominan terremotos interplaca; sólo el 5 % restante se presentan en el interior de las placas y se denominan terremotos intraplaca.

Respecto a la profundidad de los focos, se ha convenido en llamar **terremotos superficiales** a aquellos con profundidades de foco menores a 60 Km., terremotos **profundos** a aquellos con hipocentros a más de 300 Km. de profundidad, y terremotos **intermedios** a aquellos con focos entre 60 y 300 Km.

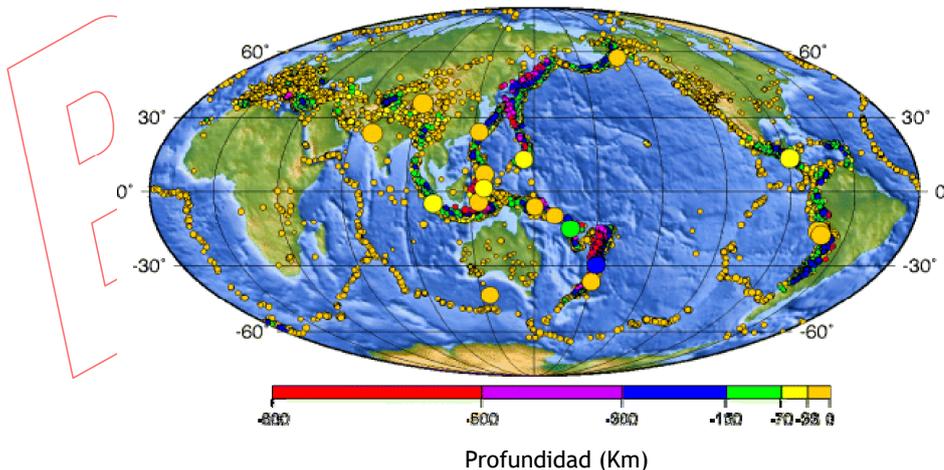
En los bordes de extensión, los terremotos son superficiales, de magnitud moderada y corresponden generalmente a fallas normales.

En los bordes de subducción, los terremotos pueden alcanzar grandes magnitudes, como en el caso de las costas de **Perú y Chile**. Hay terremotos tanto en zonas próximas a la línea de encuentro de placas como en la parte profunda de la placa buzante (zonas de Wadati y Benioff). Hay zonas de subducción, como las Islas Marianas, donde los terremotos no llegan a tener una magnitud importante. Los sismos superficiales de subducción corresponden generalmente a fallas inversas.

En los bordes de transformación, los sismos son superficiales (15 a 20 Km.) y pueden alcanzar magnitudes elevadas.

Las zonas de mayor actividad sísmica en el mundo son el cinturón CircumPacífico, la región Mediterráneo-Himalaya y los dorsales oceánicos.

En ocasiones, los terremotos intraplaca pueden alcanzar magnitudes elevadas como en el caso del terremoto de Pekín, en 1980, o el de Charleston en Carolina del Norte en 1886.



**Figura 2.10** Distribución mundial de hipocentros en el 2001

Cortesía del *United States Geological Survey (USGS)*

### 2.3. Silencio sísmico

Podemos suponer que cuando se consideran largos periodos de tiempo, la distribución espacial de los terremotos en el mundo se mantiene prácticamente constante; así, en zonas de baja sismicidad esperamos sólo terremotos pequeños mientras que, en regiones de sismicidad elevada podemos suponer que tarde o temprano se producirán terremotos importantes.

Existen zonas de conocida sismicidad que han permanecido en silencio sísmico, sin terremotos, en las últimas décadas o centurias. Estas zonas se conocen como ventanas o brechas sísmicas.

La figura 2.11 muestra una parte del borde oeste de Sudamérica con las áreas de ruptura de los terremotos más importantes del siglo XX (Tavera, 2000). El sur del Perú y el norte de Chile, a finales del siglo XX, formaban una brecha sísmica extensa, hasta que en junio del 2001 se produjo una ruptura de casi 400 km. de longitud en el sur peruano durante el terremoto más grande del planeta en ese año,  $M_w = 8.4$ . Otro terremoto importante se produjo luego en el Norte de Chile, en el 2005,  $M_w=7.8$ . Esta ventana, que hoy continúa cerrándose, tuvo dos grandes terremotos  $M_w = 9.0$ , en el siglo XIX: el primero, al Sur del Perú, en 1868; y el segundo, al norte de Chile, en 1877.



**Figura 2.11**  
Áreas de ruptura de los principales terremotos del siglo XX en una zona del borde oeste de Sudamérica

Cortesía del Instituto Geofísico del Perú (IGP)

## 2.4. Ondas sísmicas

Durante un sismo, conforme avanza la ruptura en el plano de falla, la energía liberada se irradia desde el foco en forma de ondas que atraviesan la roca y continúan propagándose en la superficie.

Las ondas que viajan en el interior de la tierra se denominan:

1) **Ondas de Cuerpo**, dependiendo del movimiento que producen en relación con su dirección, se denominan Ondas Primarias y Ondas Secundarias.

a) Las **Ondas Primarias** (ondas **P**) hacen que las partículas se muevan en la misma dirección de su propagación, causando a su paso compresión y dilatación del material. Estas ondas son las más veloces, por lo que alcanzan primero la superficie. Debido al movimiento que producen, pueden viajar tanto en la roca como en el magma o los océanos. Cuando alcanzan la superficie, parte de ellas puede convertirse en ondas de aire audibles.

b) Las llamadas **Ondas Secundarias** (ondas **S**) hacen vibrar a la roca en dirección perpendicular a la de su propagación y tienen una velocidad menor que las Ondas **P**, pero mayor que las ondas de superficie. Debido a las deformaciones angulares que producen, no pueden propagarse en los océanos.

2) **Ondas de superficie**, se propagan dos tipos de ondas: las Ondas Love y las Ondas Rayleigh.

a) **Ondas Love**, mueven el suelo horizontalmente en dirección perpendicular a la de su propagación. Son, en gran medida, las causantes de los daños en las edificaciones.

b) **Ondas Rayleigh**, mueven las partículas en un plano vertical, haciéndolas describir elipses. Estas ondas son las de menor velocidad de propagación.

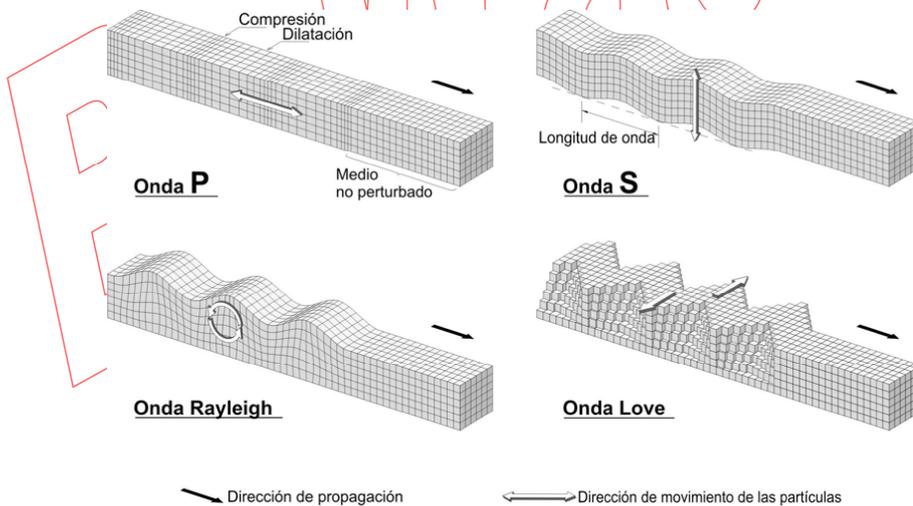


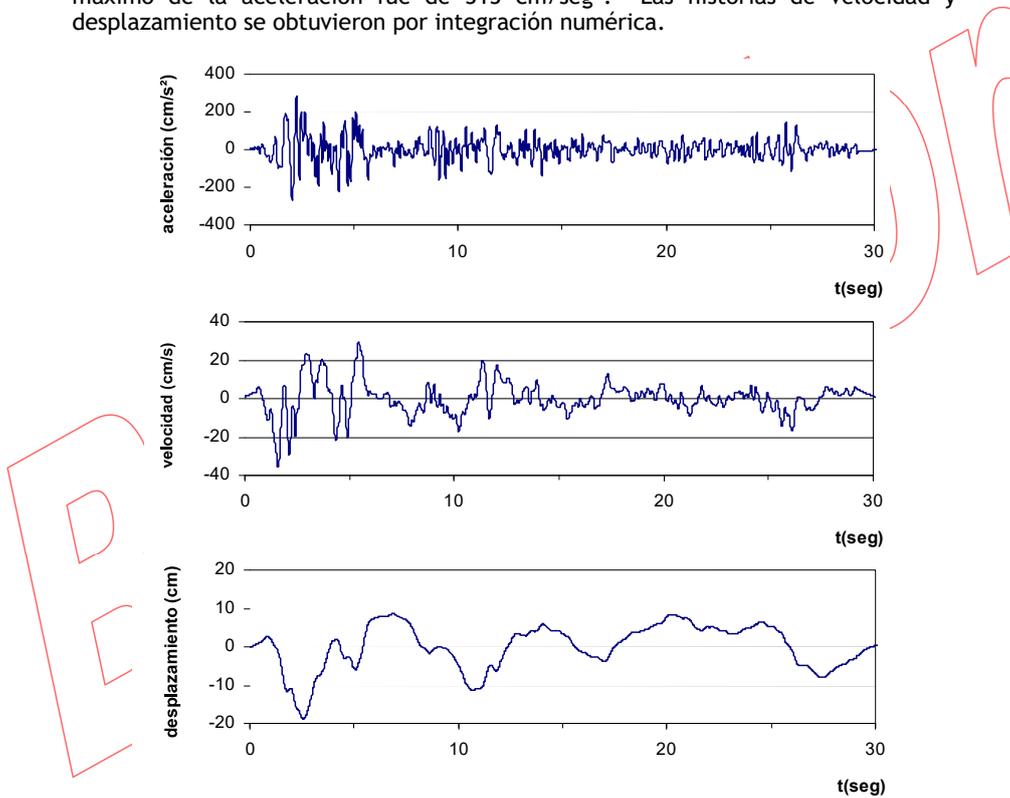
Figura 2.12 Tipos de ondas sísmicas

## Registro del movimiento del Suelo

En un punto de la superficie, el paso de los diferentes trenes de ondas causa un movimiento altamente complejo, del cual se registra la aceleración o el desplazamiento en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Durante los segundos que dura el terremoto, se obtienen dos componentes horizontales y una vertical del movimiento.

Los instrumentos que registran los desplazamientos y las aceleraciones se denominan **sismómetros** y **acelerómetros**, respectivamente.

La figura 2.13 muestra la componente N-S del movimiento registrado en El Centro durante el terremoto de Imperial Valley, California, el 18 de mayo de 1940. El valor máximo de la aceleración fue de 313 cm/seg<sup>2</sup>. Las historias de velocidad y desplazamiento se obtuvieron por integración numérica.



**Figura 2.13** Historia del movimiento registrada en el El Centro durante el terremoto de Imperial Valley, EEUU, en 1940.

## 2.5. Severidad Local de la Sacudida, Intensidad

Durante un terremoto, tanto los daños producidos como la amplitud del movimiento del suelo varían con la ubicación del lugar de observación. Generalmente, a mayor distancia epicentral, el movimiento y los daños decrecen.

La severidad de la sacudida en una determinada ubicación geográfica se denomina **intensidad**. Esta medida del efecto puntual del sismo en el lugar de observación se cuantifica en función de los daños producidos, el efecto en las personas y los cambios en el paisaje.

La intensidad depende tanto de la energía total liberada por el sismo como de la distancia respecto del foco, de la geología local, de las características del suelo y del tipo de obras civiles en el sitio.

Una de las escalas más difundidas para expresar la intensidad es la denominada escala de **Mercalli Modificada (MM)**, presentada en 1902 por Mercalli, modificada en 1931 por Wood y Neumann, y por Richter en 1956. Otra escala muy empleada es la **MSK** (Europa), propuesta en 1964 por Medvedev, Sponheuer y Karnik.

Los primeros grados de estas escalas se definen en función del nivel de percepción en las personas y por los efectos en el mobiliario. Los grados intermedios se determinan tanto por el nivel de daño causado en las obras civiles como por las alteraciones en la superficie. Los grados altos corresponden fundamentalmente a cambios severos en la naturaleza.

Para precisar los daños en edificaciones, Richter propuso una clasificación de las construcciones tal como se muestra a continuación, junto con una breve descripción de los 12 grados de la escala de Mercalli Modificada según Richter.

**Tabla 2.2 Categoría de las construcciones**

Categoría de las construcciones	
<b>Tipo A</b>	Estructuras de acero y concreto armado diseñadas para resistir fuerzas sísmicas y que han sido construidas adecuadamente.
<b>Tipo B</b>	Estructuras de concreto armado sin diseño sismorresistente detallado, pero con buena calidad de construcción.
<b>Tipo C</b>	Estructuras sin diseño sismorresistente y con calidad de construcción regular.
<b>Tipo D</b>	Estructuras de materiales pobres, como adobe, y sin resistencia lateral.

**Tabla 2.3 Escala de Mercalli modificada**

<b>Escala de Mercalli Modificada, 1956</b>	
<b>Grado</b>	<b>Descripción</b>
<b>I</b>	Sentido sólo por algunas personas en condiciones sumamente favorables.
<b>II</b>	Percibido por personas en descanso, especialmente en los pisos altos de los edificios.
<b>III</b>	Percibido en el interior de los edificios, pero sin reconocerse como sismo.
<b>IV</b>	Percibido en el interior de edificios y por algunas personas en las calles. Objetos colgantes que oscilan. Vibración perceptible en puertas, ventanas y vajilla. Los vehículos detenidos oscilan.
<b>V</b>	Percibido por la mayoría de personas. Algunas personas despiertan. Objetos inestables se vuelcan. Es posible estimar la dirección del movimiento.
<b>VI</b>	Percibido por todos. Personas que huyen hacia exteriores. Caminar inestable. Se rompen vidrios, caen objetos de los armarios y muros. Muebles desplazados. Algunas grietas en revestimientos y construcciones tipo D. Pequeñas campanas que tañen. Árboles sacudidos visiblemente.
<b>VII</b>	Dificultad para mantenerse en pie. Percibido por conductores de automóviles en marcha. Tañen las campanas. Grietas en edificaciones tipo D. Algunas grietas en edificaciones tipo C. Algunas chimeneas caen. Ondas en los lagos. Pequeños deslizamientos y hundimientos en terraplenes y taludes de arena y grava. Daños en canales de concreto para regadío.
<b>VIII</b>	Manejo inseguro de vehículos. Daños y hasta colapsos parciales en edificios tipo C. Daños menores en construcciones tipo B. Ningún daño en construcciones tipo A. Caen chimeneas, monumentos, torres y depósitos elevados. Desprendimiento de tabiques. Se quiebran las ramas de los árboles. Cambios en las corrientes de agua. Grietas en suelos húmedos y pendientes escarpadas.
<b>IX</b>	Pánico general. Destrucción de construcciones tipo D. Daños serios en edificaciones tipo C, inclusive algunos colapsos. Daños importantes en edificaciones tipo B y en depósitos de agua. Ruptura de tuberías subterráneas. Grietas grandes en suelos secos. Pequeñas eyecciones de arena y barro en suelos aluviales.
<b>X</b>	Gran destrucción de edificaciones. Grandes daños en malecones, represas, diques y terraplenes. Grandes desplazamientos de tierra en taludes y orillas de los ríos. Agua de canales, ríos y lagos sale hacia las playas. Rieles de las vías férreas deformados.
<b>XI</b>	Pocas edificaciones quedan en pie. Tuberías subterráneas completamente fuera de servicio. Puentes destruidos. Grandes grietas en el suelo. Rieles de vías férreas muy retorcidos. Hundimientos y desplazamientos en suelos blandos.
<b>XII</b>	Destrucción casi total. Cambios en la topografía. Desplazamiento de grandes masas de roca. Líneas de mira y niveles distorsionados. Objetos lanzados al aire.

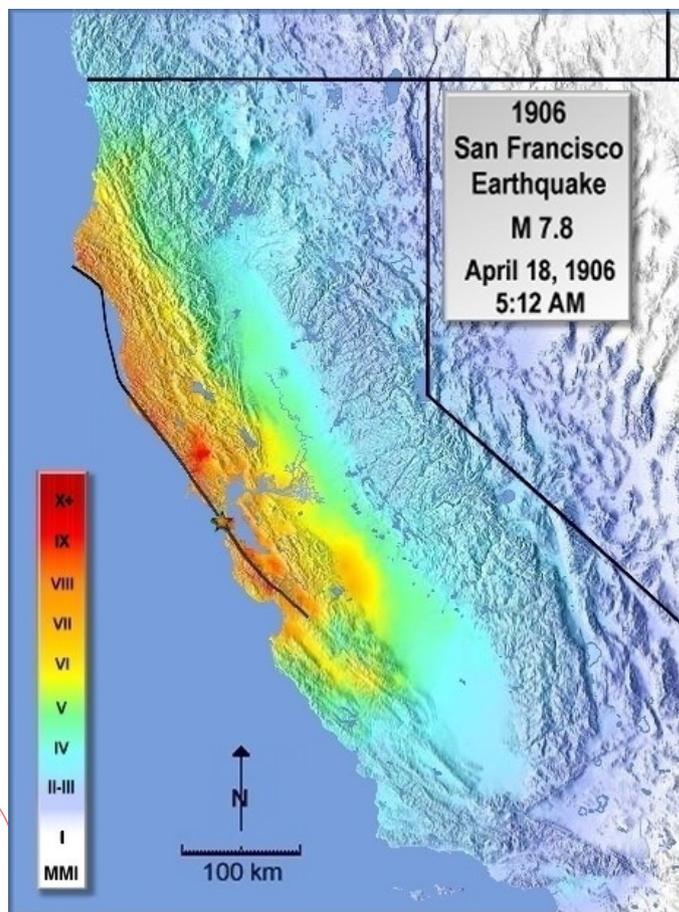
Debido a que los primeros grados de la escala de intensidades tienen mucho que ver con el nivel de percepción humana y los grados intermedios con la evaluación de daños en las edificaciones, se puede afirmar que la determinación de la intensidad resulta en cierta medida subjetiva. Por otro lado, el hecho que las edificaciones modernas tengan en general una resistencia sísmica mayor que las edificaciones de décadas pasadas, complica aún más la determinación de los valores de intensidad. Pese a todo esto, la intensidad nos permite cuantificar de manera sencilla la severidad del movimiento y establecer comparaciones entre diferentes puntos de una región afectada, o entre los efectos de diferentes sismos en un lugar determinado.

Aunque la aceleración máxima en un lugar determinado no se puede relacionar directamente con el nivel de daño observado, se han sugerido algunas relaciones entre la Intensidad y la aceleración máxima. A continuación, se muestran las correlaciones propuestas por Neumann en 1954, por Sponheuer en 1965 y Sauter en 1977. Las diferencias son evidentes.

**Tabla 2.4 Correlaciones aceleración-Intensidad**

		Intensidad (MM)								
		III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Aceleración (g)	Autor									
	Neumann	0.008	0.01	0.03	0.064	0.13	0.26	0.54	1.1	2.2
	Sponheuer	0.003	0.006	0.012	0.025	0.05	0.1	0.2	0.4	0.8
	Sauter	-----	0.02	0.04	0.08	0.15	0.29	0.55	1.0	---

Tanto las aceleraciones máximas registradas como las intensidades asignadas en diferentes lugares, permiten estudiar la distribución de los efectos sísmicos en la región afectada. Esta distribución se puede representar en un mapa de la zona, usando una escala cromática o por medio de curvas de igual aceleración o de igual intensidad (isosistas). La figura 2.14 muestra la distribución de intensidades para el terremoto de San Francisco de 1906.



**Figura 2.14** Distribución de intensidades en el terremoto de San Francisco de 1906, EEUU

Cortesía del *United States Geological Survey (USGS)*

## 2.6. Tamaño de un terremoto

Así como es necesario cuantificar los efectos de un terremoto en diferentes ubicaciones de una región afectada, es preciso también medir de alguna manera la importancia del evento geológico. El tamaño de un terremoto, visto como un fenómeno tectónico completo, se denomina **magnitud** y se relaciona con la cantidad de energía liberada durante el evento.

Richter propuso en 1935, expresar la magnitud ( $M$ ) de los terremotos en el Sur de California, en función de la amplitud del desplazamiento ( $A$  en micrones) registrado a 100 Km. del epicentro por un sismómetro Wood-Anderson. Para permitir mediciones a otras distancias, Richter agregó un término de corrección ( $A_0$ ) según la siguiente expresión:

$$M = \log(A) - \log(A_0)$$

La magnitud de Richter solo puede emplearse para terremotos cercanos, por lo que se conoce como Magnitud Local ( $M_L$ ). Para sismos lejanos, se debe precisar el tipo de onda que se emplea al establecer la magnitud. Si se usan las ondas de superficie la magnitud se denota por  $M_s$  y si se usan las ondas de cuerpo, generalmente P, la magnitud se representa por  $m_b$ . La magnitud  $M_s$  se determina en función de la amplitud ( $A$ ) y la distancia al foco  $R$ , medida en grados latitud-longitud, como:

$$M_s = \log(A) + 1.66 R + 2$$

Se han desarrollado correlaciones empíricas entre escalas como la siguiente:

$$m_b = 2.5 + 0.63 M_s$$

Para sismos grandes, las escalas anteriores se saturan y no permiten comparar adecuadamente los tamaños de los terremotos. Las escalas  $m_b$  y  $M_s$  se saturan alrededor de 6.5 y 8.5, respectivamente.

Como medida del tamaño de un terremoto, se ha propuesto también el **momento sísmico** ( $M_0$ ), que se determina a partir del área de ruptura ( $S$ ), el desplazamiento de la falla ( $\Delta$ ) y el módulo de rigidez de la roca ( $G$ ), como

$$M_0 = S \Delta G$$

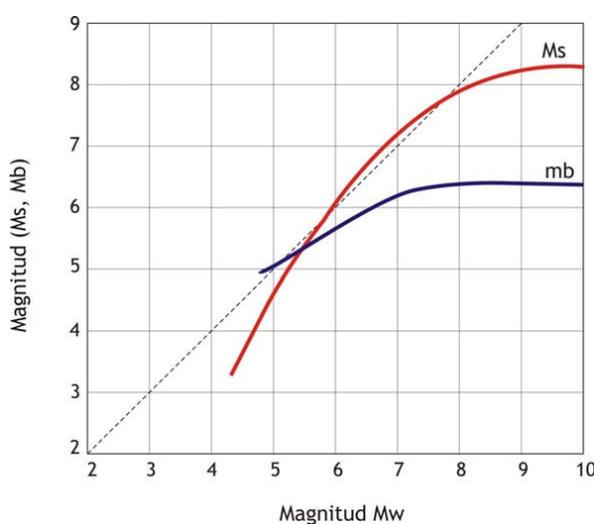
En 1977, Kanamori propuso la escala  $M_w$  empleando el valor del momento sísmico en dinas-cm, mediante la siguiente expresión:

$$M_w = (2/3) \log M_0 - 10.7$$

Esta escala tiene la ventaja que no se satura y permite establecer diferencias entre terremotos con valores  $M_s$  o  $m_b$  cercanos. La tabla 2.5 muestra tres ejemplos al respecto y la figura 2.15 presenta una relación propuesta para las magnitudes  $M_w$ ,  $M_s$  y  $m_b$ .

**Tabla 2.5 Terremotos y Magnitudes Ms y Mw**

Ubicación	Fecha	Ms	Mw
San Francisco	18/4/1906	8.25	7.9
Kamchatka	4/11/1952	8.25	9.0
Chile	22/5/1960	8.3	9.5



**Figura 2.15 Relación entre valores de magnitud Mw, Ms y mb (Idriss, 1985)**

La **energía** liberada durante un terremoto ( $E$ , en ergios) puede estimarse en función de la magnitud  $M_s$ , como

$$\log E = 11.8 + 1.5 M_s$$

y para las magnitudes obtenidas en función de las ondas de cuerpo ( $m_b$ ), como

$$\log E = 5.8 + 2.4 m_b$$

Es importante notar que, entre dos grados consecutivos de la escala  $M_s$ , la energía crece en 32 veces ( $10^{1.5} \approx 32$ ), y para las escalas que emplean las ondas de cuerpo, la energía crece en 251 veces ( $10^{2.4} \approx 251$ ).

### 3.1. Introducción

El daño que podría presentar una obra de ingeniería por efecto de los sismos depende tanto de la sismicidad del lugar en que se ubica, como de las características propias de la obra misma. En zonas de alta sismicidad, las obras civiles están expuestas a sufrir daños importantes, sin embargo, el daño que experimenten dependerá finalmente de las características propias de cada obra en particular.

#### Peligro, vulnerabilidad y riesgo

La severidad de los sismos en un emplazamiento determinado se denomina **peligro sísmico** y depende exclusivamente del panorama sismotectónico de la zona, de las características del suelo y de la topografía local. Para propósitos de ingeniería, el peligro se expresa por medio del valor máximo que podría alcanzar en el sitio un determinado parámetro indicador de severidad, por ejemplo la aceleración máxima del suelo o la intensidad local.

Durante un sismo importante, las obras civiles son afectadas en mayor o menor medida en función a sus propias características de resistencia, rigidez o regularidad estructural. El daño que podría sufrir una obra en particular considerando exclusivamente sus características propias se denomina **vulnerabilidad**. Las edificaciones en mal estado, o aquellas sin una adecuada resistencia lateral, son más vulnerables que aquellas otras proyectadas y construidas con criterios sismorresistentes, independientemente del lugar donde se ubiquen.

El daño que podría presentar una obra determinada como consecuencia del peligro que la amenaza y de su propia vulnerabilidad, se denomina **riesgo sísmico**.

Simbólicamente, el riesgo puede expresarse en función del peligro y la vulnerabilidad como:

$$\text{Riesgo} = \text{peligro} \times \text{vulnerabilidad}$$

Esta sencilla expresión permite materializar el riesgo como el producto simbólico de dos agentes independientes. El **peligro**, que constituye la componente de amenaza natural sobre la cual no es posible intervenir, y la **vulnerabilidad** que puede ser manejada con el fin de controlar el **riesgo** final de las obras civiles.

Si se pretende lograr niveles similares de riesgo en construcciones de igual uso (por ejemplo hospitales) independientemente de la sismicidad de la zona en que se ubiquen, se tendrá que construir estructuras muy robustas en zonas de alto peligro y se aceptarán construcciones menos competentes lateralmente en zonas de bajo o nulo peligro sísmico.

Debido a la naturaleza aleatoria de los sismos, a la natural variabilidad en las características físicas de las obras civiles y a la incertidumbre en los procedimientos de ingeniería, tanto el riesgo, como el peligro y la vulnerabilidad, deben representarse en términos de probabilidades.

### Representación del Peligro Sísmico

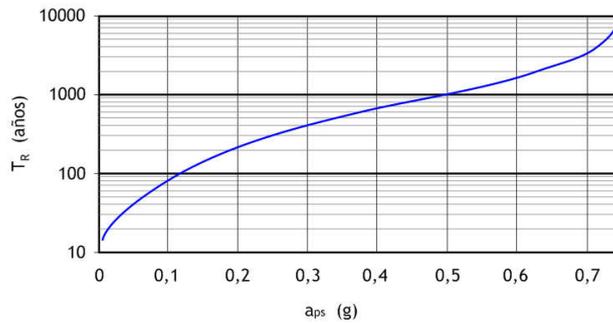
El diseño y construcción sismorresistentes tienen como objetivos evitar el colapso de las obras civiles en terremotos fuertes y reducir los daños que podrían presentarse en terremotos menos severos, pero más frecuentes. Para lograr estos objetivos, es necesario conocer las características de los movimientos que podrían producirse en el lugar de la obra.

Para una construcción en particular, se podría pensar en el mayor terremoto posible del lugar o en los movimientos de diferente severidad que podrían presentarse durante su vida útil. Dar protección absoluta contra el terremoto más grande no resulta una alternativa razonable para la mayoría de las obras de ingeniería, debido al costo elevado que esto significa y a que los terremotos extremos están muy distanciados en el tiempo y, por tanto, tienen una baja probabilidad de ocurrir durante el tiempo de servicio de las obras civiles.

Entre los movimientos que pueden afectar una obra de ingeniería, es necesario definir algunos niveles de severidad con el fin de establecer objetivos de diseño en cada uno de ellos. Por ejemplo, se debe definir el nivel hasta el cual se pretende evitar el colapso y también el nivel hasta el cual no se deberían presentar daños. Para posibilitar esta elección, es necesario representar la severidad del movimiento en términos de probabilidades, considerando la importancia de la obra y su tiempo de vida útil.

Para propósitos de ingeniería, la severidad del movimiento en el lugar en estudio se representa, en su forma probabilística, expresando la aceleración máxima que podría alcanzar el suelo ( $a_{ps}$ ) en función del intervalo de tiempo en que se alcanza

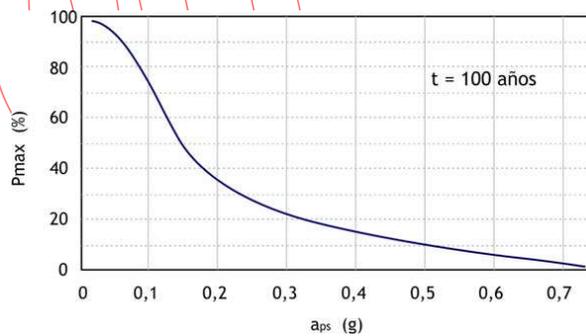
o excede cada valor de aceleración denominado periodo de retorno ( $T_R$ ). La figura 3.1 muestra esta relación para un sitio en particular.



**Figura 3.1** Aceleración pico y periodo de retorno para el sitio de la obra

La figura indica, por ejemplo, que, para el lugar en estudio, cada 1000 años se iguala o supera el valor de 0,5 g y que una aceleración de 0,2 g es superada en un periodo de retorno de 200 años, aproximadamente.

Para poder elegir los niveles de aceleración apropiados para cada objetivo de diseño, es necesario considerar el tiempo de vida (" $t$ " años) de cada obra en particular; luego, se debe lograr una relación entre cada valor de aceleración y la probabilidad que tiene de excederse durante el tiempo de vida de la obra,  $P_{max}$ . La figura 3.2 muestra esta relación para una obra con 100 años de vida útil ubicada en la zona estudiada. Se ve, por ejemplo, que la aceleración de 0,4 g tiene una probabilidad de 15 % de presentarse durante los 100 años de vida de la obra.



**Figura 3.2** Aceleración pico del suelo y probabilidad de excedencia durante la vida útil de una obra en particular

De acuerdo con la importancia de la obra, se suele aceptar un determinado valor de la probabilidad de excedencia en cada nivel de severidad. Usando este valor y una relación como la presentada en la figura 3.2, se determinan finalmente los valores de aceleración apropiados para cada uno de los objetivos de protección. Para el ejemplo, si la obra debe protegerse contra el colapso hasta aceleraciones que tienen sólo 10 % de probabilidad de excedencia en los 100 años de exposición, entonces la aceleración buscada es 0.5 g. De igual manera, si se debe evitar el daño hasta aceleraciones con 60 % de probabilidad de excedencia, entonces el valor correspondiente es 0.12 g.

La relación entre la aceleración en un lugar de interés y la sismicidad de la zona es compleja en términos de probabilidades. Un valor pequeño de aceleración podría ser ocasionado por un sismo leve cercano o por un terremoto severo distante. Los sismos leves y los sismos severos tienen frecuencias de ocurrencia marcadamente diferentes; por lo tanto, influyen de manera diferente en la probabilidad de excedencia asociada a cada valor de aceleración.

Para construir la relación aceleración-probabilidad de excedencia, es necesario conocer la sismicidad en una región importante alrededor del sitio en estudio y la forma como se atenúa el movimiento con la distancia. En particular, es necesario conocer la distribución espacial de los hipocentros, la distribución de magnitudes y frecuencias de los terremotos en la región así como estimar el decaimiento de la aceleración con la distancia al foco. En este capítulo, se presenta los temas relacionados con la cuantificación del peligro sísmico para fines de ingeniería, usando un enfoque descriptivo y una presentación matemática muy sencilla.

Borrador

### 3.2. Atenuación de los efectos sísmicos

A medida que las ondas sísmicas se propagan, la energía se va disipando y los efectos en la superficie disminuyen. Este fenómeno de atenuación de efectos es altamente complicado y para fines de ingeniería su manejo se hace sobre la base del procesamiento estadístico de las observaciones de campo.

Desde el punto de vista de la ingeniería, se necesita relacionar la intensidad y los valores máximos del movimiento del suelo en un lugar determinado, con un indicador de la energía total liberada por el sismo y con la distancia al foco o al epicentro.

#### Leyes de atenuación

El problema se maneja mediante un análisis de regresión de valores pico (“y”) en función de la magnitud del sismo (M) y de la distancia del lugar en estudio al foco o al epicentro (R). Estas expresiones se conocen como leyes de atenuación y constituyen relaciones empíricas con un considerable nivel de dispersión y evidentes limitaciones. Generalmente, las ecuaciones de regresión tienen la siguiente forma:

$$y = b_1 e^{b_2 M} (R + b_4)^{-b_3}$$

“y” representa la intensidad o los valores pico de la aceleración, velocidad o desplazamiento en la roca;  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  y  $b_4$  son constantes que se determinan del análisis de regresión; R generalmente se expresa en Km.

Pese a que las ecuaciones de regresión se obtienen con los datos de regiones específicas, también se suelen emplear en zonas de características sismotectónicas similares cuando éstas no cuentan con la información apropiada.

Una expresión para la atenuación de aceleraciones, en función de la distancia focal (R) y la magnitud (M), es la propuesta por Donovan:

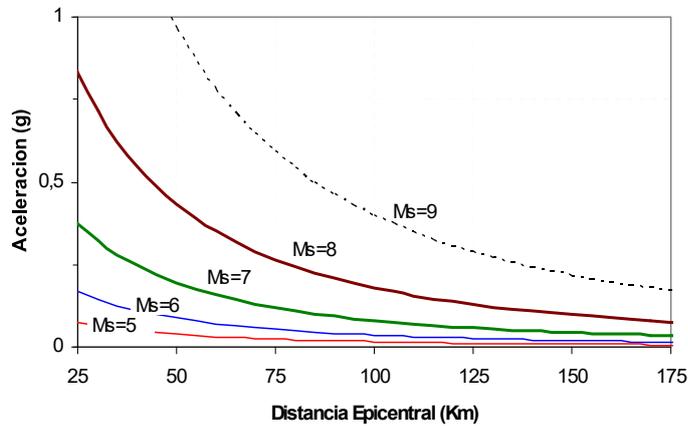
$$a = 1320 e^{0.58 M} (R + 25)^{-1.52}$$

a : aceleración del suelo en cm/seg<sup>2</sup>  
M : magnitud de Richter  
R : distancia focal en Km.

Una de las ecuaciones de regresión más conocidas y empleadas en estudios de peligro sísmico es la de Esteva y Villaverde (1972) (figura 3.3).

$$a = 5600 e^{0.8 M} (R_e + 40)^{-2}$$

$R_e$  : distancia epicentral en Km.

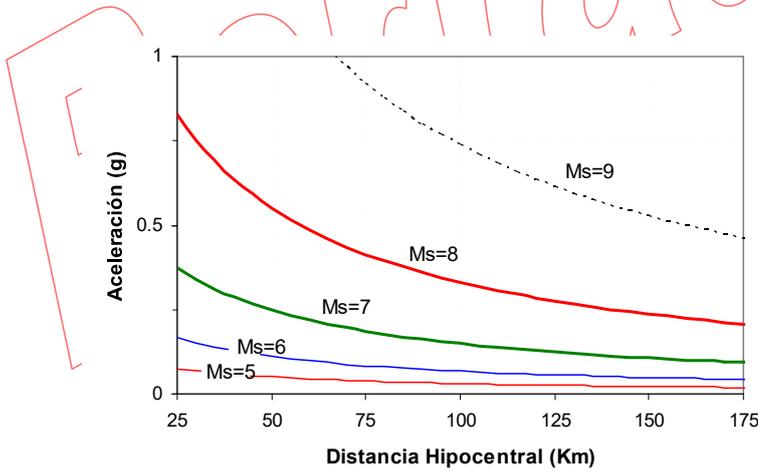


**Figura 3.3** Atenuación de aceleraciones para sismos de subducción, Esteva y Villaverde (1972)

Casaverde y Vargas propusieron en 1980 la siguiente expresión para terremotos de subducción en el Perú:

$$a = 68.7 e^{0.8 M_s} (R + 25)^{-1.0}$$

- a : aceleración del suelo en cm/seg<sup>2</sup>
- Ms : magnitud de ondas de superficie
- R : distancia focal en Km.



**Figura 3.4** Atenuación de aceleraciones para sismos de subducción, Casaverde y Vargas, 1980

Esta relación de atenuación se emplea actualmente en los estudios de riesgo sísmico en el Perú.

Para sismos continentales, puede emplearse la ecuación propuesta por McGuire (1974) en función de la magnitud de ondas de superficie ( $M_s$ ) y la distancia hipocentral ( $R$ ) en Km.:

$$a = 472 e^{0.64 M_s} (R + 25)^{-1.3}$$

La figura 3.5 muestra curvas de atenuación para magnitudes  $M_s$  entre 5 y 9.

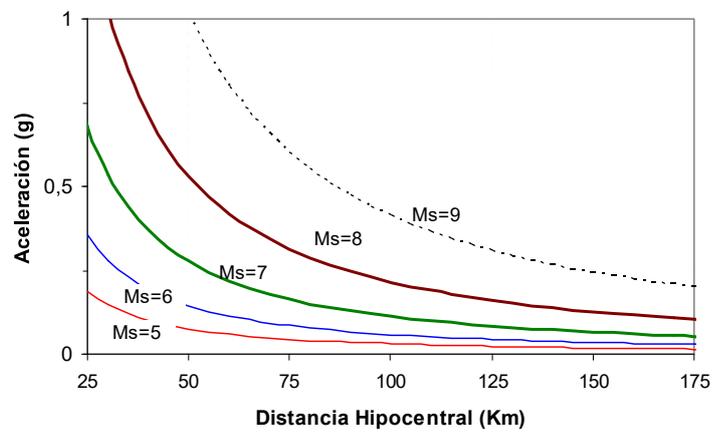


Figura 3.5 Atenuación de Aceleraciones para sismos corticales, McGuire, 1974

### 3.3. Sismicidad

La actividad sísmica o sismicidad de una región se debe representar para propósitos de ingeniería mediante la distribución espacial y temporal de los eventos junto con la distribución de sus magnitudes.

#### 3.3.1. Distribución de magnitudes

En cualquier región del mundo, el número de terremotos pequeños es significativamente mayor que el número de sismos grandes. La relación entre la magnitud y el número de sismos depende del proceso de liberación de la energía elástica de la corteza. Como este proceso es muy poco conocido, la relación magnitud-número de sismos debe manejarse en términos estadísticos. Las ecuaciones que se obtienen del análisis de regresión se denominan ecuaciones de recurrencia de magnitudes.

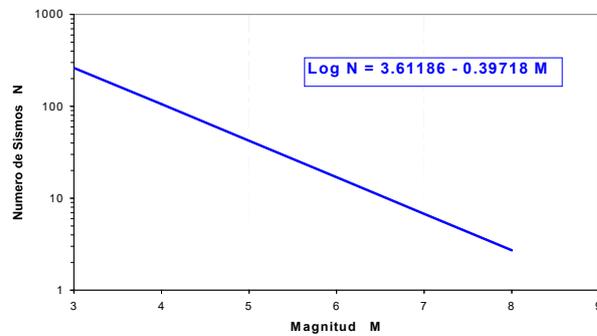
Gutenberg y Richter propusieron en 1944 la siguiente relación entre la magnitud ( $M$ ) y el número de sismos ( $N$ ) con magnitud igual o mayor que  $M$ .

$$\log N = a - b M$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan mediante un análisis de regresión con los datos de la zona correspondientes a un intervalo de tiempo definido que, luego, generalmente se normaliza a la unidad.

La constante “ $b$ ” constituye un indicador de la proporción de terremotos pequeños en relación con los grandes. Un alto valor de “ $b$ ” indica un gran predominio de terremotos pequeños y, por consiguiente, que la corteza es poco resistente y se fractura con frecuencia sin alcanzar esfuerzos elevados. En cambio, valores bajos de “ $b$ ” indican menor proporción de sismos pequeños y, por lo tanto, mayor resistencia en la roca, la misma que no se fractura con tanta frecuencia sino que llega a alcanzar esfuerzos elevados. La constante “ $a$ ” se denomina de actividad sísmica.

Las ecuaciones de recurrencia pueden determinarse para una región muy amplia o para una zona más pequeña, de acuerdo con los fines que se persiga. La figura 3.6 muestra la relación de recurrencia obtenida para un área que comprende la costa y sierra central del Perú por Casaverde y Vargas, en 1979.



**Figura 3.6** Relación de recurrencia para la costa y sierra central del Perú en un intervalo de 51 años (1925-1975) Casaverde y Vargas, 1979

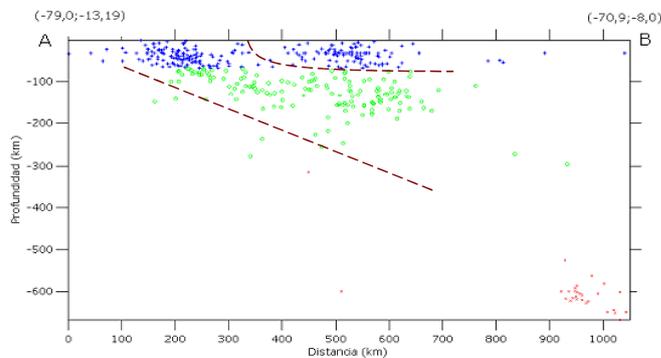
Otra manera de expresar la relación de recurrencia es la siguiente:

$$N = 10^a e^{-\beta M} \quad \text{con} \quad \beta = b \ln 10$$

Al hacer el estudio de regresión, se debe definir el valor mínimo de la magnitud a partir del cual se toman los datos estadísticos ( $M_{min}$ ). El número de sismos con magnitud  $M \geq M_{min}$  por unidad de tiempo se denomina tasa anual ( $\lambda$ ); el valor de  $\lambda$  junto a  $M_{min}$  permite determinar la constante "a".

### 3.3.2. Distribución espacial de la sismicidad, fuentes

La figura 3.7 muestra la distribución en profundidad de los hipocentros, en una región de corteza entre dos planos verticales perpendiculares al borde, entre las placas de Nazca y Sudamericana, en la costa central del Perú. Los planos están separados 200 Km. y los hipocentros corresponden a sismos ocurridos durante el periodo 1963-2003. Se observa que la distribución de hipocentros queda determinada por la geometría del borde de subducción y que es muy heterogénea.

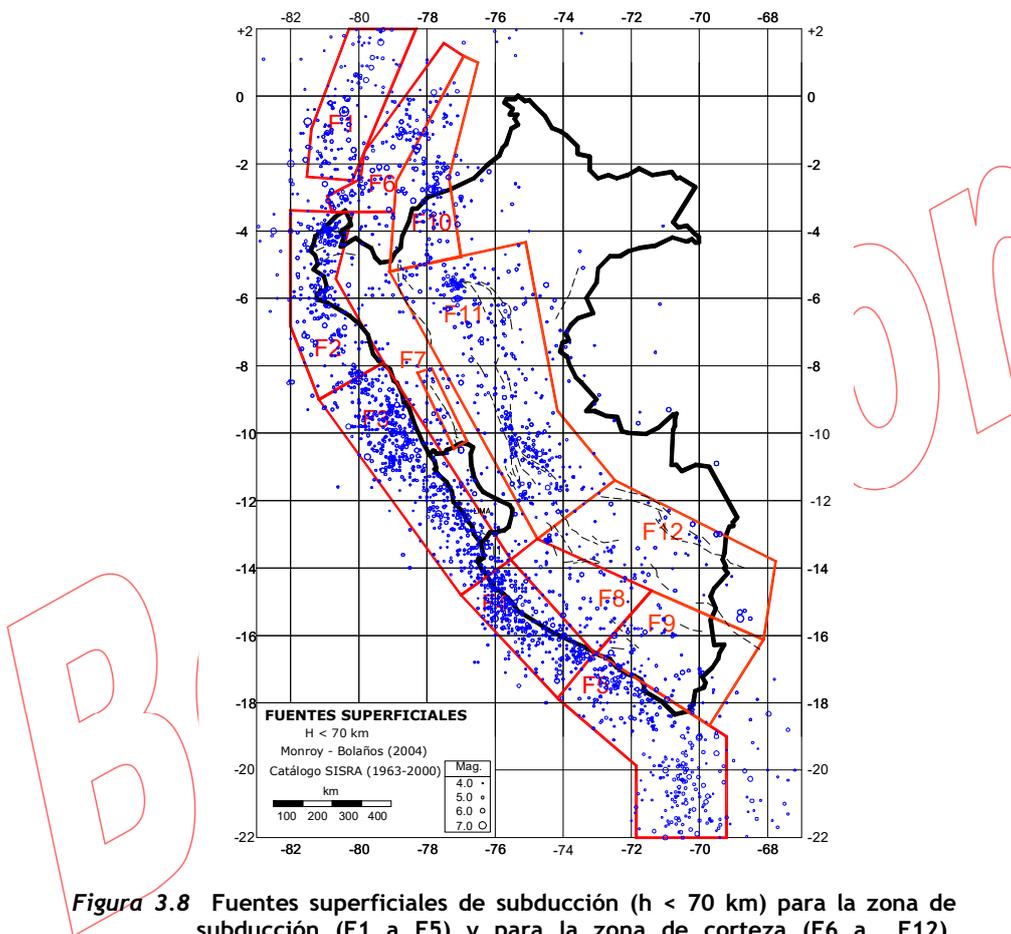


**Figura 3.7** Distribución de hipocentros en la zona de estudio

Al estudiar la sismicidad de una región más amplia, se observa que, además de los hipocentros, los parámetros característicos empleados para definir la sismicidad varían con la subregión de corteza que se estudia. Por esto, es necesario identificar volúmenes corticales con similar densidad de hipocentros y características homogéneas de sismicidad. Estos volúmenes se denominan ‘fuentes sismogénicas de volumen’.

La sismicidad en cada fuente queda definida por su ecuación de recurrencia, por las magnitudes máxima y mínima asociadas y por el número promedio anual de sismos. Para fines prácticos, las fuentes se definen como prismas verticales achatados de sección genérica poligonal. La ubicación de cada fuente se hace mediante las coordenadas de sus vértices, y las profundidades máxima y mínima.

Las fuentes sismogénicas del Perú fueron propuestas por Casaverde y Vargas, en 1980, y hasta la fecha se emplean en los estudios de peligro sísmico. La figura y tablas que siguen muestran algunos datos de las fuentes superficiales peruanas, según la última revisión propuesta por Monroy y Bolaños (2004).



**Figura 3.8** Fuentes superficiales de subducción ( $h < 70$  km) para la zona de subducción (F1 a F5) y para la zona de corteza (F6 a F12), propuestas por Monroy y Bolaños, 2004

**Tabla 3.1** Coordenadas geográficas de los vértices de las fuentes superficiales de subducción y corticales

FUENTE	COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES			
	LONGITUD	LATITUD	LONGITUD	LATITUD
F1	-80.29	2.00	-78.32	2.00
	-81.39	-0.97	-79.65	-1.21
	-81.52	-2.39	-80.19	-2.50
F2	-82.0	-3.39	-80.17	-3.45
	-82.0	-6.83	-80.67	-5.42
	-81.17	-9.00	-79.27	-7.90
F3	...	...	...	...
	...	...	...	...

**Tabla 3.2** Parámetros sísmicos de las fuentes superficiales

FUENTE	M <sub>mín</sub> (Mw)	M <sub>máx</sub> (Mw)	BETA ( $\beta$ )	RAZÓN SÍSMOS	PROFUNDIDAD (Km)
F1	4.50	7.33	1.248	0.939	35.00
F2	4.00	8.00	1.142	4.05	30.00
F3	...	...	...	...	...

En algunos casos, la distribución espacial de la sismicidad se puede representar mediante fuentes lineales, como en el caso de fallas, o por medio de fuentes puntuales para fuertes concentraciones de hipocentros lejanos.

### 3.3.3. Distribución temporal de los sismos

Es frecuente escuchar en Lima que el mes de octubre es de terremotos o que en los años 60 y 70 se produjeron en el Perú más terremotos que en otras décadas. Estos comentarios aluden a la ubicación de los sismos en el tiempo; sin embargo, como se verá a continuación, no en el sentido que interesa para los estudios de sismicidad y riesgo.

El número de sismos (**N**) que pueden ocurrir en un lapso de tiempo (digamos un año) es una variable aleatoria. Por otro lado, durante un lapso de tiempo mayor (digamos un siglo), el número de veces (**V**) en que se produjeron anualmente **N** sismos exactamente es también otra variable aleatoria. La relación entre **N** y **V** constituye la distribución temporal de los terremotos.

Fijemos una zona geográfica y un intervalo de tiempo para estudiar la distribución temporal de los sismos; por ejemplo entre 1901 y 2000. Anotemos ahora el número de sismos (**N<sub>i</sub>**) que se produjeron en cada año, teniendo en cuenta solamente aquellos con magnitud mayor a un valor fijado de antemano (digamos  $M > 4.0$ )

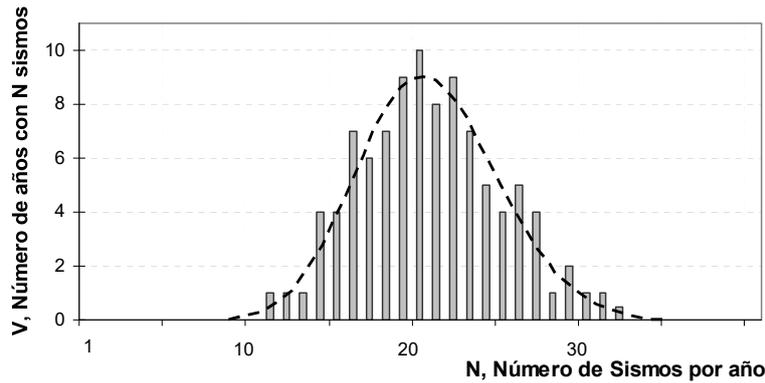
Año	N <sub>i</sub>
1901	28
1902	14
...	...
1926	19
1927	21
...	...
...	...
1999	18
2000	27
Total de sismos = 2050	

Con el total de sismos y el lapso de tiempo considerados, podemos determinar ahora la tasa anual de terremotos ( $\lambda$ ); para el ejemplo propuesto, tendríamos  $\lambda = 2050/100 = 20,5$  sismos/año.

Luego, construyamos una tabla indicando el número de veces (**V**) en que se produjeron anualmente 0, 1, 2, 3... "**N**" sismos, y también el cociente de este número de veces entre el número de años considerados  $P=V/Tot$ ".

Número de sismos ( <b>N</b> )	Número de veces que ocurrieron "N" sismos por año. ( <b>V</b> )	$P=V/Tot$
0	0	0
11	1	0,01
...	...	...
20	10	0,1
21	9	0,09
...	...	...
27	3	0,03
...	...	...
Total de años = Tot = 100		

Esta tabla nos indica, por ejemplo, que ningún año transcurrió sin sismos y que solamente hubo 1 año en que ocurrieron 11 sismos, mientras que fueron 10 los años con 20 sismos.



**Figura 3.9** Probabilidad que se presente “N” sismos al año para una fuente con una tasa  $\lambda=20,5$  sismos/ año

Supongamos que el intervalo de tiempo para el estudio se extiende considerablemente; entonces, el cociente “P” representará la distribución de probabilidades para la variable “N sismos en el año”.

Si se acepta que cada sismo es independiente de sus predecesores y que la probabilidad de que dos o más sismos ocurran en simultáneo es pequeñísima, podemos emplear el modelo de Poisson para expresar “P” como:

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

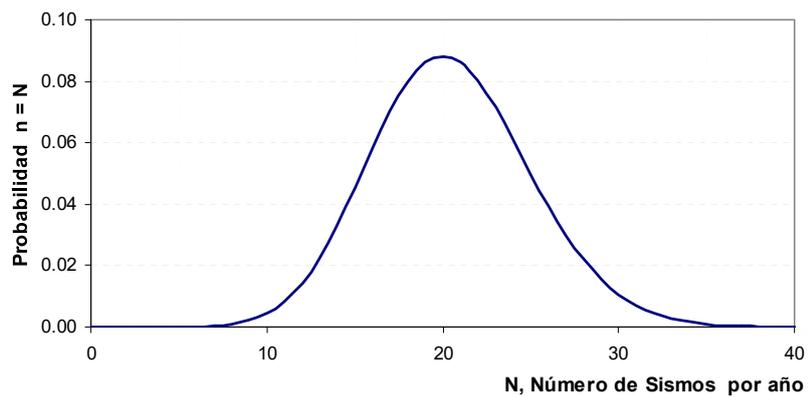
$P(N=n)$  representa la probabilidad de que la variable “N” tome el valor “n” en una unidad de tiempo

$\lambda$  es la tasa anual de sismos en la región en estudio.

De manera similar, para un tiempo “t”, la probabilidad correspondiente será:

$$P(N = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

La figura 3.10 muestra la función de probabilidades para el ejemplo de las tablas ( $\lambda=20,5$  sismos/año)



**Figura 3.10** Probabilidad que se presente “N” sismos al año para una zona con una tasa  $\lambda=20,5$  sismos/ año

Borrador

### 3.4. Cuantificación del peligro sísmico

Durante el proyecto de obras de ingeniería es necesario conocer y, de alguna manera, cuantificar la severidad de los sismos que podrían presentarse en el lugar de una obra. En otros casos, es necesario estimar, además, el nivel de daño y cuantificar las pérdidas que podrían producirse como consecuencia de los sismos en obras ya construidas o en proyecto.

#### 3.4.1. Estudios de peligro sísmico

Una manera de cuantificar el peligro sísmico consiste en estimar el valor máximo que podría alcanzar en el lugar de una obra un indicador de daño como la intensidad, la aceleración, la velocidad o el desplazamiento del suelo. La determinación de estos valores máximos constituye el enfoque determinístico en la evaluación del peligro sísmico.

Sin embargo, los valores máximos que se esperan corresponden generalmente a eventos excepcionales, que acontecen cada grandes intervalos de tiempo y que, por tanto, tienen pocas probabilidades de presentarse durante la vida de una obra. Por esto, la cuantificación del peligro debe hacerse en términos de probabilidades y en función del tiempo de vida de una edificación (enfoque probabilístico).

#### Estudio determinístico

El primer enfoque expresa el peligro en términos del valor máximo que podría alcanzar un parámetro sísmico determinado, como por ejemplo la aceleración máxima del suelo, la intensidad, la magnitud, etc. Este valor máximo elegido para expresar el peligro se determina por medio de los valores registrados en el pasado y en función de las características sismológicas en la zona del proyecto.

Por ejemplo, si se elige la aceleración máxima del suelo para expresar el peligro sísmico se debe estimar el valor máximo de aceleración que se podría producir por causa de los diferentes agentes sísmicos. El peligro queda definido por el mayor valor obtenido.

Supongamos que se desea estimar el peligro sísmico en un emplazamiento “E” distante 20 Km. de una falla y 80 Km. del promedio de hipocentros de una fuente de subducción. (figura 3.8)

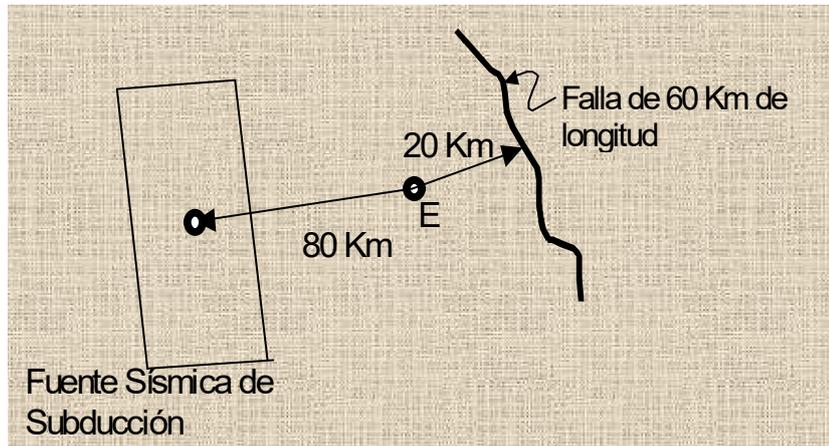


Figura 3.8 Evaluación del peligro sísmico

Como se conoce que la longitud de la falla es de 60 Km., se puede estimar la magnitud máxima que se puede asociar a esta falla empleando una relación magnitud-longitud acorde con el tipo de falla. Para el ejemplo, usando la expresión de Slemmons (1982):

$$M_s = 0.809 + 1.341 \text{ Log } L$$

con  $L=60000$  m. se obtiene  $M_s=7.2$

Para estimar la aceleración máxima que este sismo máximo produciría en el emplazamiento en estudio, se debe emplear una ecuación de atenuación. Para el ejemplo, usando la ecuación de Patwardhan (1978)

$$a = 224 e^{0.823 M_s} (R + C(M))^{-1.56}$$

siendo  $C(M) = 0.864 e^{0.46 M_s}$

y con  $R= 20$  Km y  $M_s=7.2$ , se obtiene  $a=230$  cm/seg<sup>2</sup>

En cuanto a la fuente de subducción, se deben revisar los catálogos sísmicos para establecer la magnitud máxima y, luego, empleando relaciones de atenuación, se puede estimar la aceleración máxima en el lugar en estudio. Si se supone, para el ejemplo, que del estudio de los catálogos se ha determinado que la magnitud máxima asociada a la fuente es  $M_s=8.2$ , empleando ahora la ecuación de atenuación de Casaverde y Vargas se obtendría  $a=460$  cm/seg<sup>2</sup>.

Finalmente, si se elige entre los dos valores de aceleración, asociada a la falla y a la fuente de subducción, se representa el peligro sísmico por una aceleración máxima de  $460 \text{ cm/s}^2$ .

En algunos casos, el valor del parámetro elegido para cuantificar el peligro se calcula no solamente para los sismos máximos, sino también para los sismos con determinados periodos de retorno. Por ejemplo, como parte de un estudio determinístico, se puede evaluar la aceleración correspondiente a sismos que en promedio regresan cada 250 ó 500 años.

### Estudio probabilístico

Los valores máximos de los indicadores de peligro en un lugar determinado (intensidad, aceleración, etc.) corresponden a grandes terremotos muy espaciados en el tiempo (1000, 2000 años) y, por tanto, con posibilidades reducidas de presentarse durante el tiempo de exposición de una obra (50, 100, 200 años). Por esta razón, estos valores máximos no siempre se pueden emplear para el diseño de toda edificación.

La elección de los valores de aceleración o intensidad para un proyecto específico solo puede hacerse conociendo la aceleración o intensidad en términos de probabilidad y en función del tiempo de vida de la obra. Por ejemplo, durante los 3 años que sirva una obra provisional, existirá un determinado valor de aceleración que puede ser excedido con 90% de probabilidades; sin embargo, para una edificación que debe servir 150 años, la aceleración que se espera con igual probabilidad de excedencia será necesariamente mayor.

### 3.4.2. Evaluación probabilística del peligro sísmico

El presente acápite desarrolla el enfoque probabilístico para la evaluación del peligro sísmico. Este enfoque expresa el peligro sísmico como la probabilidad de que un determinado parámetro sísmico sea igualado o superado durante un intervalo de tiempo. El intervalo en que se evalúa el peligro generalmente se asocia con el tiempo de vida de una obra o con el tiempo de recuperación de la inversión de la misma. Para el estudio probabilístico, se necesita conocer la actividad sísmica de una extensión importante alrededor del lugar del proyecto y las leyes de atenuación correspondientes con el parámetro que cuantifica el peligro.

#### Distribución de aceleraciones

Como se recordará, la proporción entre terremotos pequeños y grandes en una región o fuente sismogénica se encuentra representada en la ecuación de recurrencia. Lo que se pretende ahora es determinar la proporción que tendrían las grandes aceleraciones (o intensidades) en relación con las pequeñas en un emplazamiento específico.

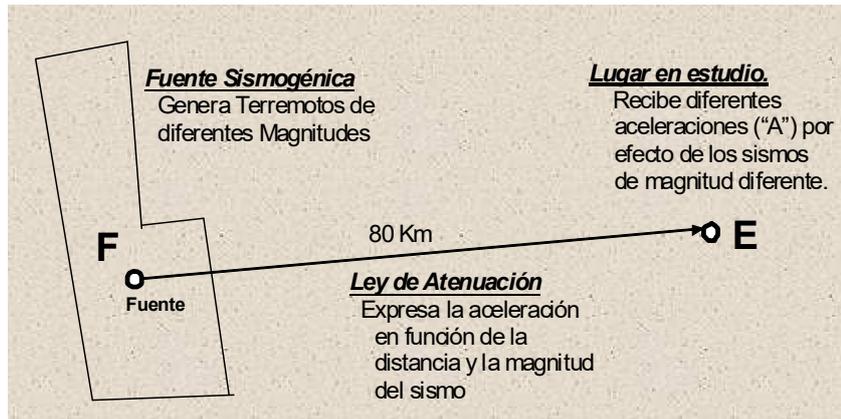
Esta relación entre aceleraciones grandes y pequeñas se puede expresar como la probabilidad de que la variable de aceleración "A" supere un valor determinado "a". Si se conociera el número de veces que el valor "a" es superado (X) y el número total de aceleraciones que se presentan (Y), la probabilidad referida se expresaría como:

$$P(A > a) = \frac{\# \text{ de aceleraciones } A > a}{\# \text{ total de aceleraciones}} = \frac{X}{Y}$$

Consecuentemente, la probabilidad de que un cierto valor de aceleraciones "a" no sea superado será  $F(a) = P(A < a) = 1 - P(A > a)$ .

Para cada magnitud (M) en la fuente, existe un número de terremotos (N) cuya magnitud es mayor o igual que M (ecuación de recurrencia). Ahora bien, cada uno de estos terremotos causará, en el lugar de interés, una aceleración "a" (o una intensidad "i") que se puede estimar empleando una ecuación de atenuación. Por lo tanto, se puede establecer una relación directa entre un valor de la aceleración "a" en el punto de estudio y el número de terremotos que harán que se supere este valor de "a". Finalmente, empleando esta relación se puede establecer la función de probabilidades buscada  $P(A > a)$ .

A manera de ejemplo, en la figura se muestra un emplazamiento “E” distante 80 Km. de una fuente sismogénica.



**Figura 3.11** Fuente sismogénica que genera aceleraciones variadas en el lugar en estudio.

Si la ecuación de recurrencia para la fuente es

$$N = e^{17.58005 - 3.21M}$$

y las magnitudes mínima y máxima fijadas son  $M_{\min}=4.8$  y  $M_{\max}=8$ .

Para cada valor de  $M$  en el rango de 4.8 a 8, se puede determinar el número de sismos que igualan o superan el valor de  $M$ .

Si se supone, además, que la ecuación de atenuación apropiada es

$$a = 68.7 e^{0.8M} (R + 25)^{-1}$$

se puede, ahora, para cada valor de  $M$ , determinar la aceleración que se produciría en el punto “E”.

Así, se obtienen los valores de la tabla 3.3:

**Tabla 3.3** Valores obtenidos con la fórmula de recurrencia y la ley de atenuación.

Magnitud M	Núm. de sismos con $M_s > M$ N	a (g)
4.8	8.780	0.031
5	4.620	0.036
5.5	0.928	0.054
6	0.186	0.081
6.5	0.037	0.121
7	0.008	0.180
7.5	0.002	0.269
8	0.000	0.401

Se observa que el número de sismos con magnitud mayor o igual a la mínima es 8.78 (es decir  $\lambda=8.78$  sismos/año); por consiguiente, la aceleración asociada (0.031 g) en el punto en estudio es superada 8.78 veces al año. En cambio, la aceleración de 0.269g (para  $M=7.5$ ) sería superada 0.002 veces al año, es decir, cada 500 años.

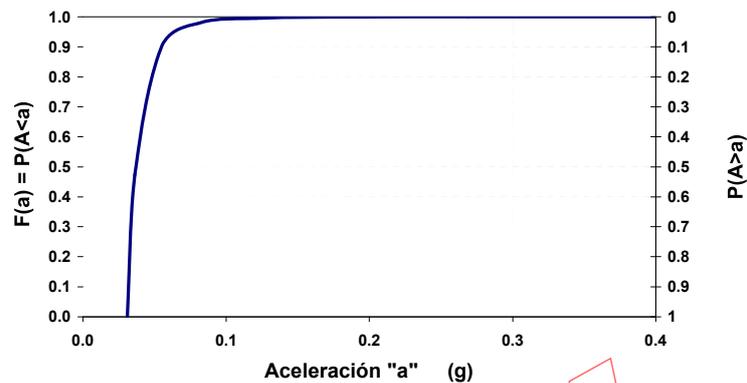
Se puede ahora establecer la probabilidad buscada  $P(A>a)$  dividiendo el número de sismos asociados a cada valor de aceleración entre el número total de estos en el lapso considerado para el ejemplo  $\lambda=8.78$ .

En la tabla que sigue, se muestran los valores de aceleración y las probabilidades de excedencia  $P(A>a)$  y confiabilidad  $P(A<a)$ .

**Tabla 3.4** Distribución de aceleraciones, probabilidad de excedencia y confiabilidad

Distribución de aceleraciones		
"a" (g)	$P(A>a)$	$F(a)=P(A<a)$
0.031	1.0000	0.0000
0.036	0.5262	0.4738
0.054	0.1057	0.8943
0.081	0.0212	0.9788
0.121	0.0043	0.9957
0.180	0.0009	0.9991
0.269	0.0002	0.9998
0.401	0.0000	1.0000

La figura 3.12 muestra la distribución de aceleraciones en el punto en estudio en términos de  $F(a)=P(A<a)$ , denominada la función de densidad acumulada.



**Figura 3.12** Distribución de aceleraciones en un punto en estudio por efecto de una fuente sismogénica

En este ejemplo, se ha supuesto que una sola fuente sismogénica influye en el emplazamiento en que se evalúa el peligro. Si se tuviera más de una fuente, el proceso debe variarse ligeramente.

Cuando existan varias fuentes sismogénicas, se puede preestablecer un juego de aceleraciones en el punto en estudio. Luego, con cada fuente y para cada aceleración preestablecida, se debe calcular la magnitud que la ha producido (ecuaciones de atenuación) y, luego, para cada magnitud calculada, se debe determinar el número de sismos asociados (ecuación de recurrencia). Cuando se repita este proceso para todas las fuentes, se encontrará relaciones entre aceleraciones y número de sismos que se pueden acumular, ya que todas tienen el mismo juego de aceleraciones. Con el número de sismos obtenido a partir de la suma de todas las fuentes, se podría obtener finalmente la función de densidad acumulada.

La función de densidad acumulada anterior ( $F(a)=P(A<a)$ ) solo representa la relación entre el número de veces que se presentan los diferentes valores de aceleración. Se debe ahora incluir en el problema el tiempo de exposición.

## Probabilidad de excedencia en el tiempo

Como se explicó anteriormente, en el enfoque probabilístico, el peligro sísmico se expresa como la probabilidad de que en un lapso de tiempo fijado un cierto parámetro elegido "A" (aceleración, intensidad, etc.) supere un valor determinado "a".

Si el intervalo en el que se evalúa el peligro es de "t" unidades de tiempo (generalmente años) y si durante los "t" años ocurrieran exactamente "n" sismos, cada uno de ellos con aceleraciones máximas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , entonces, como se supone que los "n" eventos son independientes e idénticamente distribuidos, la probabilidad de que todas las aceleraciones no superen el valor de "a" sería:

$$P(A_1 < a) * P(A_2 < a) * \dots * P(A_n < a) = P(A < a)^n$$

Además, el número de sismos "N" es una variable aleatoria y, por consiguiente, la probabilidad de que en los "t" años el número de sismos sea exactamente "n" es:

$$P(N = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Por consiguiente, la probabilidad de que en "t" años ocurra "n" sismos y de que todas sus aceleraciones ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) sean menores que "a" se puede obtener como el producto de las expresiones anteriores:

$$P(A < a)^n \cdot \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Considerando ahora todos los posibles valores para "n", se tendrá que la probabilidad de que el valor "a" no sea superado en los "t" años será:

$$\begin{aligned} P_{MAX}(A < a) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(A < a)^i \cdot \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} P(A < a)^i \cdot \frac{(\lambda t)^i}{i!} \end{aligned}$$

La sumatoria del segundo miembro constituye el desarrollo de la siguiente función exponencial:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} * P(A < a)^i = e^{\lambda t P(A < a)}$$

Por tanto, sustituyendo esta igualdad en la expresión de  $P_{M\acute{A}X}(A < a)$ , se obtendría

$$P_{M\acute{A}X}(A < a) = e^{-\lambda t} * e^{\lambda t} P(A < a)$$

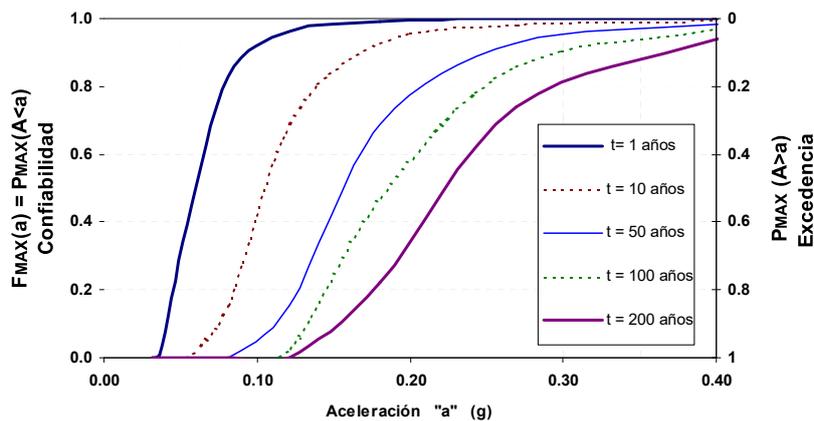
o

$$P_{M\acute{A}X}(A < a) = e^{-\lambda t} [1 - P(A < a)]$$

Consecuentemente, la probabilidad de excedencia sería

$$P_{M\acute{A}X}(A > a) = 1 - P_{M\acute{A}X}(A < a)$$

En la figura 3.13, se muestran las probabilidades de excedencia y confiabilidad para el emplazamiento del ejemplo, considerando tiempos de exposición de  $t = 1, 10, 50, 100$  y  $200$  años.

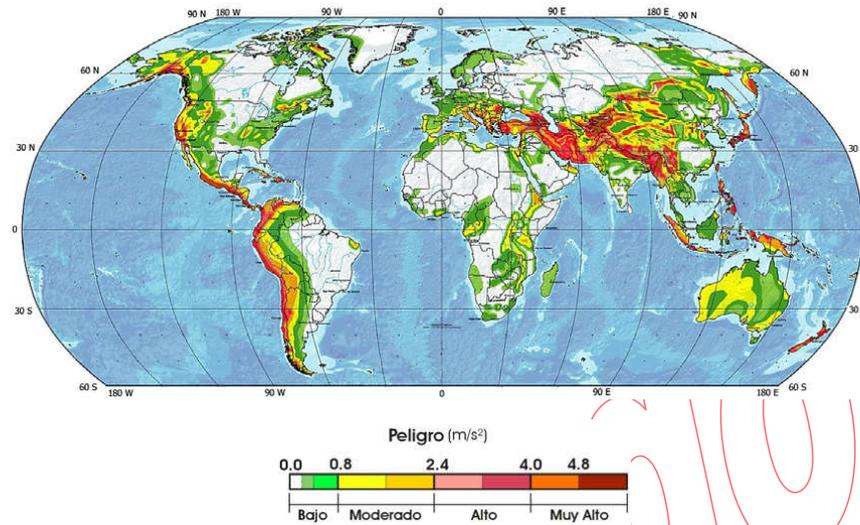


**Figura 3.13 Peligro sísmico expresado en términos de probabilidad de excedencia de aceleraciones**

Con el ánimo de simplificar la presentación de los temas de este acápite, se ha considerado que toda la actividad sísmica de una fuente se puede concentrar en un punto. Sin embargo, es obvio que hacer esto distorsiona significativamente los valores obtenidos con las leyes de atenuación. Por esto, es necesario tomar en cuenta que la actividad sísmica está distribuida en todo el volumen de la fuente y, por lo tanto, se debe emplear una distancia variable (R) desde el lugar de interés hacia cada punto de la fuente. El cálculo se logra por integración numérica.

Por otro lado, se ha indicado que la actividad sísmica se puede asociar a volúmenes de la litósfera con características sismotectónicas similares (fuentes sísmogénicas de volumen). Sin embargo, en muchos casos, para modelar la actividad sísmica de fallas es necesario considerar fuentes lineales o puntuales.

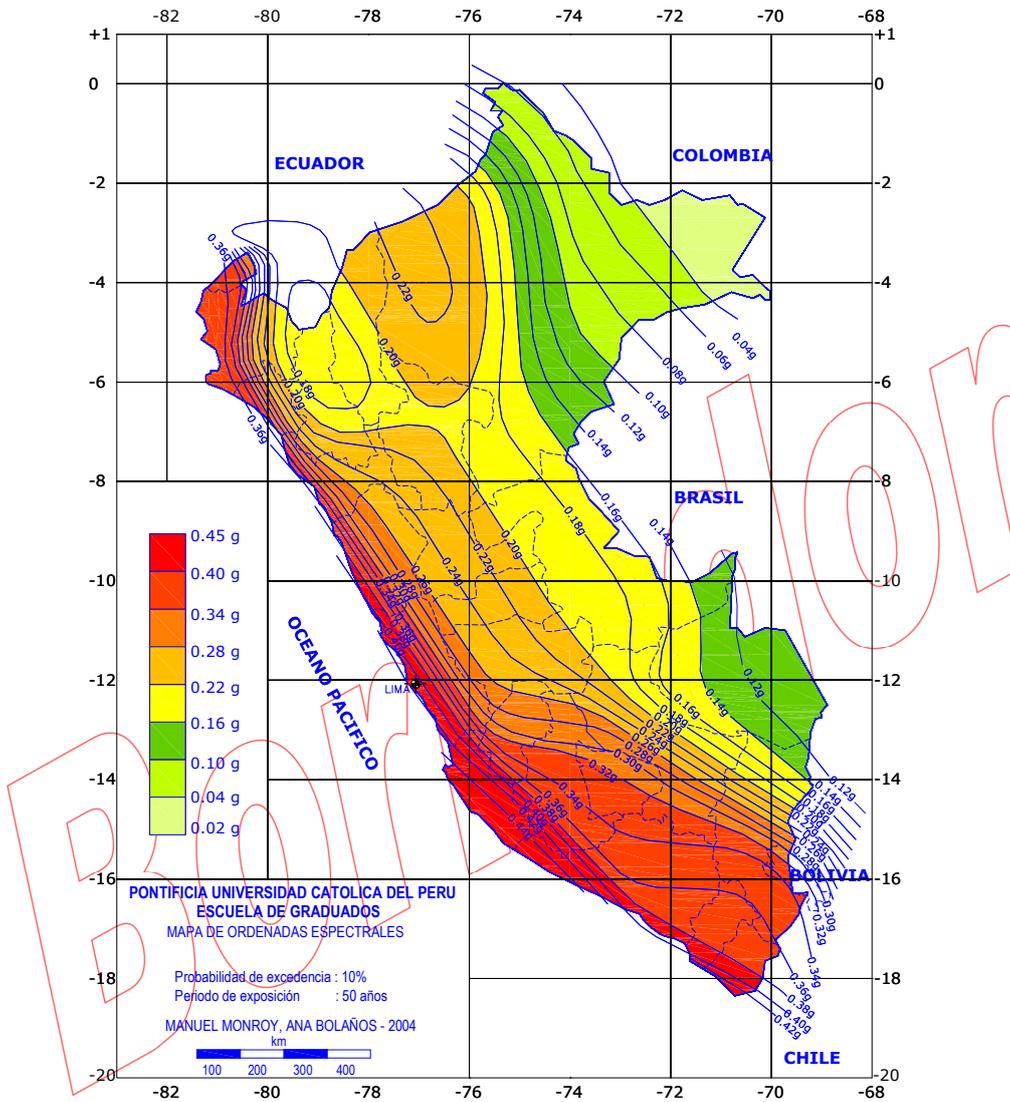
El programa de cómputo EQRISK desarrollado por Robin McGuire, en 1976, se emplea actualmente para los estudios de riesgo sísmico. Las figuras 3.14 y 3.15 muestran el peligro sísmico en el mundo y en el Perú, respectivamente, en términos de aceleración de la roca.



**Figura 3.14** Distribución de aceleraciones en el mundo considerando 10 % de excedencia y 50 años de exposición. (Cortesía del *Global Seismic Hazard Assessment Program*)

El movimiento esperado en la superficie del suelo difiere del movimiento que se estima en la base rocosa debido al comportamiento dinámico de los estratos de suelo que yacen sobre el lecho rocoso. También se han observado cambios importantes en el movimiento del suelo por efecto de la topografía; tal es el caso de amplificaciones importantes reportadas en acantilados y laderas pronunciadas.

Por estas razones, todo estudio de peligro sísmico para un determinado lugar debe considerar las características de la estratigrafía y la topografía local. En el capítulo 7, se estudian estos temas.



**Figura 3.15** Distribución de aceleraciones en la roca considerando 10 % de excedencia y 50 años de exposición.

## Periodo de retorno

Se denomina periodo de retorno,  $T_R$ , al número de años en que se supera, en promedio, un determinado parámetro empleado para cuantificar el peligro sísmico. Por ejemplo, el periodo de retorno correspondiente a los sismos que en un lugar determinado producen una aceleración "A" mayor que "a" puede obtenerse considerando un intervalo de "t" años de observación y el número de sismos con  $A > a$ , como:

$$T_R = \frac{t}{\text{número de sismos con } A > a}$$

Se ha convenido en llamar sismos frecuentes a aquellos con periodos de retorno de 50 ó 100 años, y sismos raros a aquellos con periodos de retorno de 500 ó 1000 años.

El inverso de  $T_R$  representa el número anual de veces que en el lugar en estudio se excede o iguala el valor de la aceleración "a".

## Periodo de retorno y probabilidad de excedencia

Si la tasa anual de sismos que afectan el punto de interés es  $\lambda$ , entonces en "t" años se producirían " $\lambda t$ " sismos.

Por otro lado, el número de veces que la aceleración "a" es superada en el lugar de interés se puede expresar en función de la probabilidad de excedencia de "A" ( $P(A > a)$ ) y del tiempo de exposición "t", como:

$$\text{número de sismos con } A > a = P(A > a) \lambda t = [1 - P(A < a)] \lambda t$$

Luego, sustituyendo esta expresión en la anterior se tendrá:

$$T_R = \frac{t}{[1 - P(A < a)] \lambda t} = \frac{1}{[1 - P(A < a)] \lambda}$$

$$[1 - P(A < a)] = \frac{1}{T_R \lambda}$$

Hay que recordar que la probabilidad de que la aceleración "A" no supere el valor "a" en "t" años se determina como:

$$P_{MÁX}(A < a) = e^{-\lambda t} [1 - P(A < a)]$$

Luego, reemplazando en esta expresión la última relación obtenida para **[1-P(A<a)]** se tendría:

$$P_{MÁX} (A < a) = e^{-\frac{t}{T_R}}$$

Luego, la probabilidad de que en "t" años la aceleración "a" sea superada será:

$$P_{MÁX} (A > a) = 1 - e^{-\frac{t}{T_R}}$$

### Tiempo de vida útil, periodo de retorno y probabilidad de excedencia

Generalmente, las obras de ingeniería se proyectan para su empleo en un lapso de tiempo determinado, que se conoce como *tiempo de vida útil*. Por ejemplo, las edificaciones comunes se consideran con un tiempo de vida útil de 50 años, muchos puentes con 100 años y algunos autores sugieren 500 años para la vida útil de las instalaciones nucleares.

Mientras mayor es el tiempo de vida de una obra de ingeniería, mayor es también la probabilidad de que un evento importante la afecte. A manera de ejemplo, si se tiene un edificio común y una edificación esencial con tiempos de vida útil de 50 y 475 años, respectivamente, y se calcula la probabilidad de ser alcanzados por un sismo severo con 475 años de periodo de retorno, empleando la expresión anterior se tendría para el edificio común:

$$P_{MÁX} (A > a) = 1 - e^{-\frac{50}{475}} = 0.1$$

y para la edificación esencial:

$$P_{MÁX} (A > a) = 1 - e^{-\frac{475}{475}} = 0.632$$

Se puede observar que el edificio común tiene sólo 10 % de probabilidad de ser alcanzado por un sismo con 475 o más años de periodo de retorno. En cambio, la edificación esencial tiene 63% de probabilidad de ser alcanzada por el mismo evento.

# 4

## Objetivos de la Ingeniería Sismorresistente

El propósito de la Ingeniería Sismorresistente es la protección de la vida y la reducción del daño durante terremotos. En los últimos años, se han desarrollado propuestas que intentan precisar este objetivo, indicando el desempeño ideal que deberían tener las obras civiles según su importancia y en diferentes niveles de peligro. En este capítulo, se presentan las propuestas desarrolladas para edificaciones y se comentan las posibilidades actuales de hacerlas realidad.

### 4.1. El primer objetivo

El objetivo primario de la Ingeniería Sismorresistente es la reducción de las pérdidas de vidas humanas y de bienes materiales durante los terremotos. Como este objetivo se asocia frecuentemente a sismos grandes durante los cuales el riesgo de colapso podría ser significativo, el diseño se ha orientado tradicionalmente a evitar el colapso de puentes, presas, edificios y obras civiles en general durante terremotos grandes.



**Figura 4.1** Colapso de una autopista elevada en el terremoto de Kobe, Japón, 1995  
Cortesía del *Earthquake Engineering Research Institute*, EERI

Este objetivo básico de protección contra terremotos severos ha motivado que, por mucho tiempo, la Ingeniería Sismorresistente oriente sus estrategias y procedimientos con el afán de lograr la sobrevivencia de las obras frente a sismos importantes. A manera de ejemplo, la tabla 4.1 presenta los tiempos de vida de algunas obras civiles junto al “sismo máximo de diseño”.

**Tabla 4.1 “Sismos máximos” para el “diseño” de algunas obras de Ingeniería**

<i>Tipo de la obra</i>	<i>Tiempo de vida útil (años)</i>	<i>Sismo máximo</i>	
		<i>Periodo de retorno (años)</i>	<i>Probabilidad de excedencia en el tiempo de vida de la obra (%)</i>
Instalaciones esenciales que podrían constituir fuentes de contaminación luego de un sismo. Instalaciones nucleares.	50 a 100	Más de 5000	1
Equipos de estaciones eléctricas de alto voltaje	50	1600	3
Puentes y viaductos de avenidas principales	100	950	10
Edificios para viviendas	50	500	10
Construcciones temporales que no amenacen obras de importancia mayor	15	40	30

El objetivo primario de evitar el colapso se ha perseguido a pesar de que no siempre se precisó la “distancia aceptable al estado de colapso” ni hubo un claro entendimiento del “sismo de sobrevivencia” en términos de probabilidades.

Solo en años recientes (década del 90 en adelante), se han desarrollado iniciativas para precisar los objetivos de la Ingeniería Sismorresistente, tanto en lo referente a la sobrevivencia de las obras durante grandes sismos, como en lo concerniente al desempeño de éstas frente a sismos menos importantes pero más frecuentes. En la definición de estos objetivos ampliados, ahora se incluyen aspectos relacionados no solo con el daño estructural, sino también con la interrupción de los servicios y las posibilidades de reparación futura.

#### **4.2. Objetivos de la Ingeniería Sismorresistente de edificaciones**

Aunque para muchas obras de Ingeniería no se han precisado con claridad los objetivos del diseño y construcción sismorresistentes, para el caso de edificios existen algunas propuestas, como las desarrolladas por el “Comité Visión 2000 de la Asociación de Ingenieros Estructurales de California” (Vision 2000-SEAOC) y por la “Agencia Federal para el Manejo de Emergencias de los Estados Unidos de América” (FEMA).

En general, las propuestas desarrolladas para edificaciones son similares en esencia, pero con detalles y enfoques algo diferentes. Se definen ciertos niveles de severidad en las demandas sísmicas y los objetivos se establecen indicando el comportamiento ideal que una edificación debería tener en cada nivel de peligro.

A continuación, se presenta la propuesta desarrollada por el SEAOC con el propósito de precisar conceptos y discutir las posibilidades actuales de la Ingeniería para lograr estos objetivos.

### Niveles de severidad y sismos de diseño

Se establecen cuatro niveles de severidad en las solicitaciones sísmicas por medio de cuatro “sismos de diseño”. Como los terremotos son tratados como sucesos aleatorios, cada “sismo de diseño” se describe por su periodo medio de retorno o por la probabilidad de excedencia durante el tiempo de vida de una edificación. Independientemente del tipo de edificación, se asume un tiempo de vida de 50 años. La tabla 4.2 muestra los periodos de retorno y las probabilidades de excedencia en 50 años de exposición para los sismos de diseño sugeridos por el SEAOC.

**Tabla 4.2** Sismos de diseño para edificios, sugeridos por el Comité Visión 2000, SEAOC.

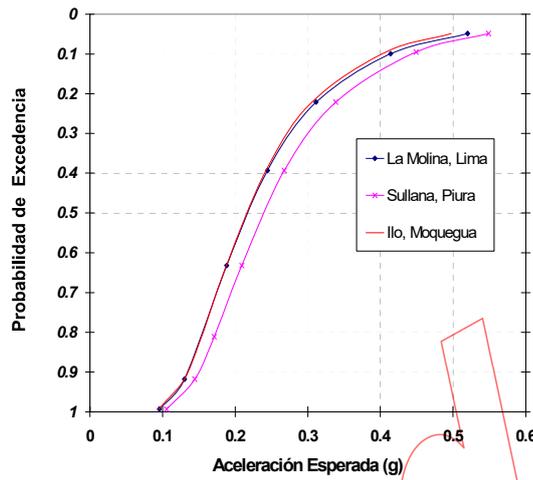
Sismo de diseño	Período de retorno (años)	Probabilidad de excedencia en 50 años (%)
Sismos frecuentes	45	69
Sismos ocasionales	75	50
Sismos raros	475	10
Sismos muy raros	970	5



**Figura 4.2**  
Colapso de un edificio de vivienda en el terremoto de Chi-Chi, Taiwan, 1999.

Cortesía del *Earthquake Engineering Research Institute, EERI*

La figura 4.3 resume los resultados del estudio de peligro para tres ciudades en la costa del Perú, en términos de aceleración pico en la base rocosa y probabilidad de excedencia en 50 años de exposición.



**Figura 4.3** Aceleración y probabilidad de excedencia en 50 años de exposición para tres ciudades en la costa del Perú.

Estudios en regiones más extensas sugieren que las aceleraciones asociadas a los cuatro sismos de diseño en la costa oeste de América del Sur tendrían valores cercanos a los mostrados en la tabla 4.3.

**Tabla 4.3** Aceleración máxima en roca para los sismos de diseño de edificios en la costa oeste de América del Sur

Sismo de diseño	Aceleración esperada para la costa oeste de América del Sur (g)
Sismos frecuentes	0.2
Sismos ocasionales	0.25
Sismos raros	0.40
Sismos muy raros	0.5

### Niveles de desempeño de las edificaciones

El desempeño de una edificación luego de un sismo se califica en función del nivel de daño que sufre el sistema estructural, las instalaciones y su contenido en general. La tabla 4.4 y la figura 4.4 muestran la propuesta del SEAOC.

Tabla 4.4 Niveles de desempeño según SEAOC, 1995

Nivel de desempeño	Descripción
<b>Completamente operativo</b>	No hay daño. El edificio es seguro. Todas las instalaciones y servicios operan normalmente. La estructura conserva su rigidez y resistencia. No es necesario hacer reparaciones.
<b>Operativo</b>	Daño reducido en componentes no estructurales sin compromiso para la seguridad de los ocupantes. Daño muy reducido en elementos estructurales sin compromiso de la seguridad general. La estructura mantiene casi íntegramente su resistencia y rigidez. Luego del sismo, las instalaciones y servicios están operativos o podrían estar parcialmente interrumpidos, pero podrían ser fácilmente recuperados.
<b>Resguardo de la Vida</b>	Daño estructural y no estructural moderado. La estructura ha perdido una parte importante de su rigidez y resistencia, pero conserva un margen de seguridad contra el colapso. Luego del sismo, es baja la probabilidad de derrumbes. Los ascensores podrían estar fuera de servicio, pero las rutas de evacuación están seguras. El edificio podría repararse aunque no siempre resulte económicamente aconsejable.
<b>Cerca al colapso</b>	Daño importante y extendido. La estructura ha sido seriamente afectada en su capacidad de resistir acciones laterales y cargas de gravedad, pero aún conserva un pequeño margen contra el colapso. Componentes no estructurales desplomados o en peligro de hacerlo. Probablemente, no es técnica o económicamente posible reparar el edificio. Las réplicas podrían ocasionar el colapso.
<b>Colapso</b>	La estructura no puede ya resistir acciones laterales y ha perdido su competencia para cargas de gravedad. Pérdida de verticalidad y problemas de inestabilidad. Colapso parcial o total. No es posible reparar la edificación.

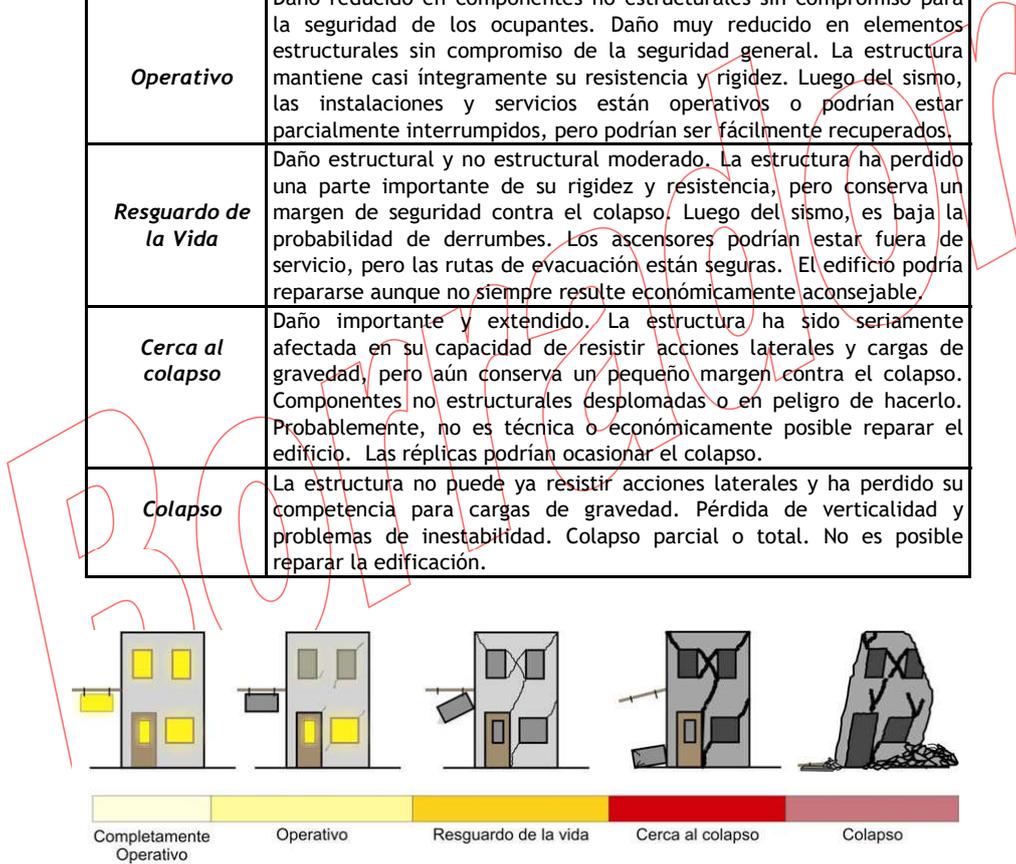
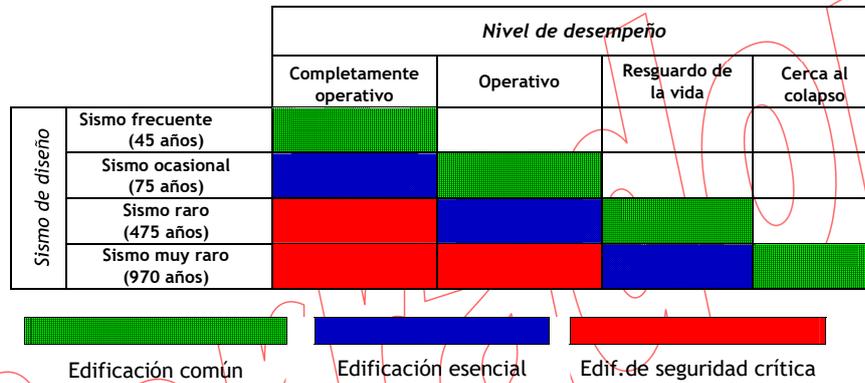


Figura 4.4 Niveles de desempeño

### Objetivos múltiples de desempeño

Los objetivos del diseño sismorresistente se pueden definir ahora estableciendo el desempeño que debe tener una edificación en cada sismo de diseño. El desempeño deseado depende directamente de la importancia del edificio. Según el SEAOC, se identifican tres tipos de edificaciones: edificios comunes, edificios esenciales que deben funcionar en una emergencia (por ejemplo, hospitales) y edificaciones de seguridad crítica (como plantas nucleares).

La figura 4.5 muestra el desempeño mínimo que deben tener estos tres tipos de edificios en los 4 niveles de peligro considerados. Cada tipo de edificio se identifica por un color. Los casilleros que quedan a la derecha de un tipo de edificio en particular, representan comportamiento inaceptable. Los casilleros en blanco representan comportamiento inaceptable para cualquier tipo de edificio.



**Figura 4.5 Desempeño de edificios comunes, esenciales y de seguridad crítica**

Esta definición de objetivos pretende lograr que edificios del mismo uso tengan un desempeño similar, independientemente del peligro sísmico del lugar en que se ubiquen. En términos de probabilidades, esto significa aspirar a que edificios de igual uso queden expuestos a niveles similares de riesgo. Como el riesgo final es el resultado del peligro de la zona y la vulnerabilidad de cada edificación, se desprende directamente de esta propuesta de objetivos que en zonas de peligro elevado se deberán construir estructuras de baja vulnerabilidad y en zonas de baja sismicidad se podrán aceptar estructuras menos competentes para acciones laterales, generalmente también menos costosas.

### 4.3. Ingeniería Sismorresistente orientada al desempeño

El proyecto de edificios con objetivos múltiples de comportamiento, denominado generalmente 'Diseño Orientado al Desempeño', requiere de estrategias de diseño específicas en cada nivel de amenaza. Por ejemplo, para sismos frecuentes, es necesario que las edificaciones tengan una resistencia superior a las demandas de los

sismos de 50 años de periodo retorno y, para sismos raros, es necesario que las estructuras puedan desarrollar desplazamientos más allá del rango elástico.

Las estrategias generales de diseño en múltiples escenarios de peligro deben necesariamente materializarse en procedimientos y requerimientos numéricos de Ingeniería. Por ejemplo, para un edificio en particular, es necesario establecer una relación directa entre el comportamiento estructural deseado y un indicador del peligro en el lugar donde se construya. A manera de ejemplo, la tabla 4.5 muestra, para cada nivel de peligro, la aceleración pico en roca en la costa oeste de América del Sur y el comportamiento estructural esperado en edificios comunes

**Tabla 4.5 Aceleración pico en roca para la costa oeste de América del Sur y comportamiento estructural deseado para edificios comunes.**

<i>Sismo de diseño</i>	<i>Aceleración (g)</i>	<i>Comportamiento estructural</i>
Sismos frecuentes (45 años)	0.2	Perfectamente elástico
Sismos ocasionales (75 años)	0.25	Prácticamente elástico
Sismos raros (475 años)	0.40	Importantes incursiones inelásticas con pérdida de resistencia y rigidez. La estructura podría repararse.
Sismos muy raros (970 años)	0.5	Severas incursiones inelásticas, pérdida casi total de rigidez y resistencia. No es posible reparar la estructura.

Construir edificios en zonas de alta sismicidad tratando de satisfacer objetivos de desempeño como los presentados en este capítulo no es una tarea sencilla. Por ejemplo, preparar los edificios de vivienda para que se mantengan sin daño bajo aceleraciones cercanas a 0.2 g requeriría elevar su resistencia lateral en relación con los valores usados actualmente en la mayoría de países con alta sismicidad. Pretender diseñar un hospital para que permanezca operativo luego de un sismo con aceleraciones cercanas a 0.4 g es una tarea muy complicada y, en algunos casos, técnicamente imposible o poco viable en términos económicos.

Por otro lado, la fuerte incertidumbre en los procedimientos de análisis y diseño sismorresistente dificulta aún más el proyecto y la construcción de edificios con objetivos que, por hoy, parecen ser muy ambiciosos.

Para la Ingeniería Sismorresistente de hoy, el Diseño Orientado al Desempeño constituye un valioso marco de referencia para discutir objetivos y para desarrollar procedimientos y líneas de trabajo que, en el futuro, hagan posible la construcción de edificios con buen comportamiento en múltiples escenarios de peligro.

## Respuesta Elástica de Estructuras

---

### 5.1. Introducción

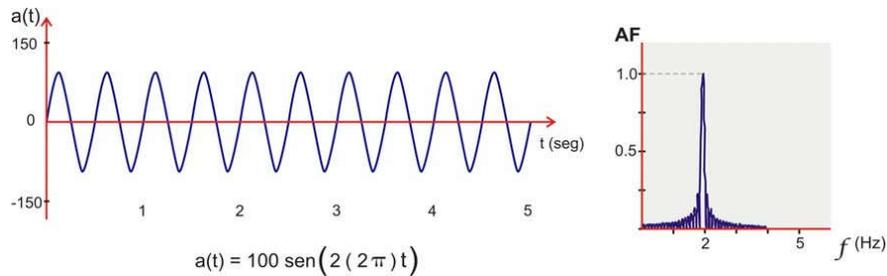
Uno de los objetivos de la Ingeniería Sismorresistente es la construcción de obras civiles que no experimenten daño durante sismos pequeños. Esto se logra solo si los desplazamientos del sistema estructural permanecen dentro del rango elástico y, además, son pequeños con el fin de proteger las componentes no estructurales.

Para lograr el comportamiento elástico de las obras civiles durante sismos pequeños, es necesario estimar las fuerzas que se generarían sobre el sistema estructural, así como los valores máximos de los desplazamientos laterales. En este capítulo, se estudia el comportamiento de estructuras sometidas a movimientos sísmicos suponiendo un comportamiento linealmente elástico.

### Espectro de Fourier

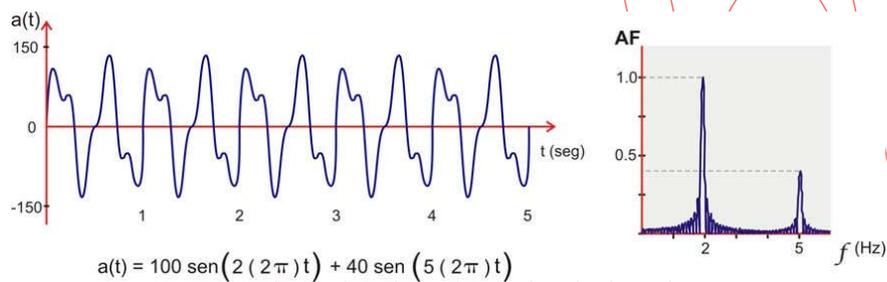
La aceleración del suelo durante un terremoto constituye formalmente una función de tiempo,  $a(t)$ , que podemos imaginar como compuesta de funciones armónicas sencillas. Para cada función de tiempo  $a(t)$  existe otra función denominada Función de Amplitudes de Fourier (AF) o Espectro de Fourier (EF) que, en términos muy simples, describe la “importancia” de los armónicos que conforman la función de tiempo. Para cada frecuencia en el eje horizontal del Espectro de Fourier, las ordenadas indican la “importancia” por medio de un valor que, en su forma normalizada, está entre 0 y 1.

La figura 5.1 muestra una función de tiempo  $a(t)$  junto con su Espectro de Fourier;  $a(t)$  está compuesta de un solo armónico de 100 de amplitud y 2 Hz de frecuencia, consecuentemente el Espectro de Fourier presenta un pico en 2 Hz con un valor de “importancia” igual a 1.



**Figura 5.1 Función de tiempo compuesta por un armónico y función AF**

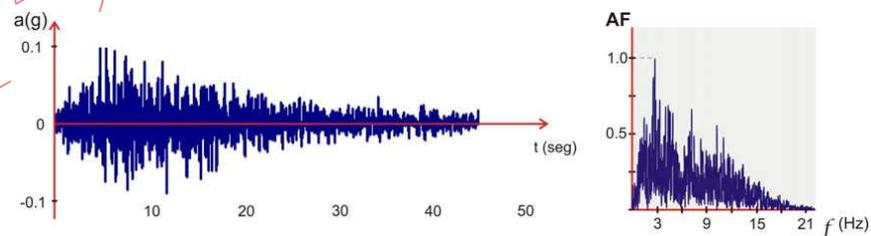
Otro ejemplo: la figura 5.2 muestra una función de tiempo  $a(t)$  compuesta por dos armónicos con 2 y 5 Hz de frecuencia y amplitudes 100 y 40, respectivamente. La función de Amplitudes de Fourier muestra dos picos en estas frecuencias con valores de importancia de 1 y 0.4.



**Figura 5.2 Función compuesta por dos armónicos y Espectro de Fourier**

Generalmente, la función de Amplitudes de Fourier se obtiene por un algoritmo numérico denominado la Transformada Rápida de Fourier y se simboliza por FFT (de sus siglas en inglés *Fast Fourier Transform*).

La figura 5.3 muestra un acelerograma del terremoto de 1970, en el norte del Perú, junto con su Espectro de Fourier. Este espectro muestra una composición muy densa de armónicos, entre los cuales el predominante es de 2.7 Hz.



**Figura 5.3 Componente E-O, 31/05/1970, Perú y Espectro de Fourier**

## Respuesta dinámica

Veamos ahora el comportamiento de un edificio sometido a 5 casos de sollicitaciones. Los dos primeros casos corresponden a una fuerza horizontal que actúa en el techo del edificio siguiendo un eje de simetría (figura 5.4). Como la carga varía en el tiempo, se representa como  $P(t)$ . En ambos casos, el valor máximo que alcanza la carga es 150 ton, pero su variación en el tiempo es notoriamente diferente. En el caso 1, la carga crece lentamente, en 10 horas, desde cero hasta su valor máximo y luego se mantiene constante. En el caso 2, la carga tiene una variación armónica con 0.3 seg de periodo.

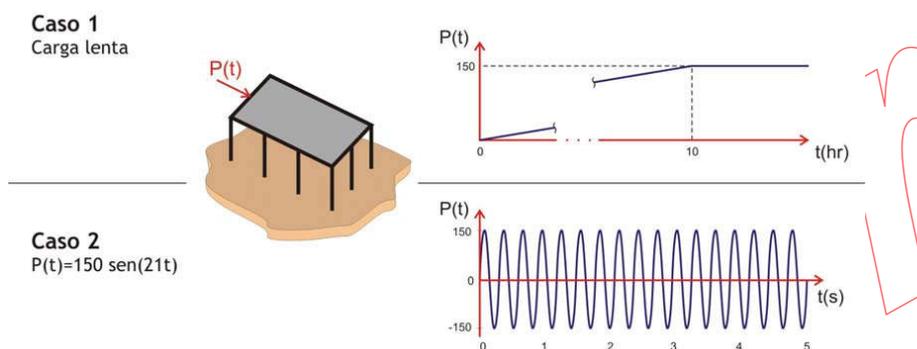


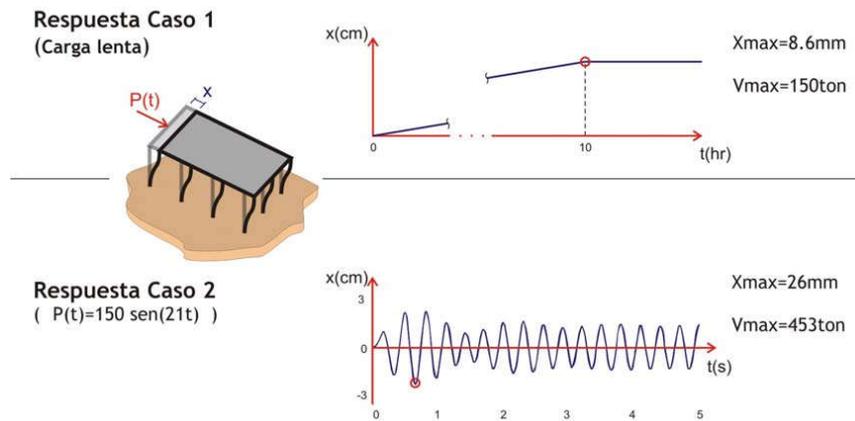
Figura 5.4 Casos de carga lenta y carga armónica

En cada uno de estos casos de carga, el techo de la estructura se desplaza y sobre el sistema estructural se produce una fuerza horizontal que resulta ser igual a la suma de las fuerzas cortantes en los elementos verticales.

El desplazamiento lateral del techo respecto del suelo,  $x$ , es una función de tiempo,  $x(t)$ , generalmente referida como *historia de desplazamientos*. La fuerza lateral sobre el sistema estructural constituye también una función de tiempo  $V(t)$  cuyo valor máximo representaremos por  $V_{m\acute{a}x}$ .

En el caso de carga lenta, caso 1, el desplazamiento del techo,  $x(t)$ , crece lentamente hasta alcanzar su máximo valor ( $x_{m\acute{a}x} = 8.6$  mm) y luego se mantiene constante (figura 5.5). Debido a la lentitud del proceso, la carga externa aplicada es la única fuerza actuante y, por tanto, igual a la fuerza lateral sobre el sistema estructural ( $P(t) = V(t)$ ); entonces, la máxima fuerza en el sistema estructural es  $V_{m\acute{a}x} = 150$  ton.

En general, las sollicitaciones de carga muy lenta constituyen casos estáticos de carga cuya solución corresponde al análisis estructural estático.



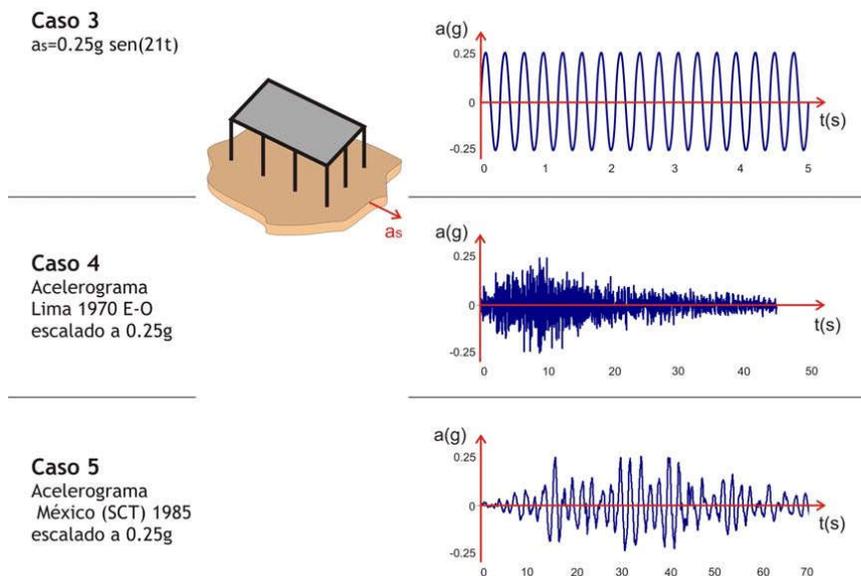
**Figura 5.5 Respuesta ante carga lenta y carga armónica**

Cuando la carga se aplica con una variación armónica, caso 2, la estructura oscila, pero con una cadencia diferente que la carga. La figura 5.5 muestra que el desplazamiento en los 2 primeros segundos no es un armónico perfecto, sino que pareciera contener más de un armónico simple; luego de los dos primeros segundos, el desplazamiento ya luce como una función armónica. El desplazamiento máximo del techo es, en este caso,  $x_{\max} = 26$  mm, casi tres veces el desplazamiento máximo del caso estático.

Como la estructura es linealmente elástica, la fuerza sobre el sistema estructural,  $V(t)$ , es en cada instante proporcional al desplazamiento lateral y, por tanto, en este caso 2, diferente de la carga aplicada sobre el edificio, es decir  $V(t) \neq (P(t))$ . Como valor máximo de la fuerza sobre la estructura, se obtiene en este caso  $V_{\max} = 453$ ton, 3 veces la fuerza correspondiente al caso estático.

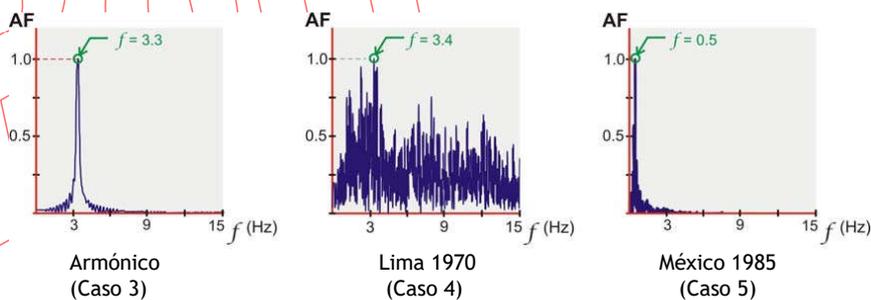
Los tres siguientes casos corresponden a movimientos en la base de la estructura, representados por sus historias de aceleración  $a(t)$  (figura 5.6). Las tres historias tienen igual aceleración máxima.

El caso 3 corresponde a una aceleración armónica de periodo 0.3 seg y amplitud 0.25 g. Los casos 4 y 5 corresponden a acelerogramas registrados en terremotos importantes: el terremoto de 1970, en Perú, y el de 1985, en México. Ambos registros se tomaron a muchos kilómetros del epicentro y sus valores máximos fueron cercanos a 0.1 g; para este ejemplo, los dos acelerogramas se escalaron a 0.25g.



**Figura 5.6 Casos de movimiento en la base**

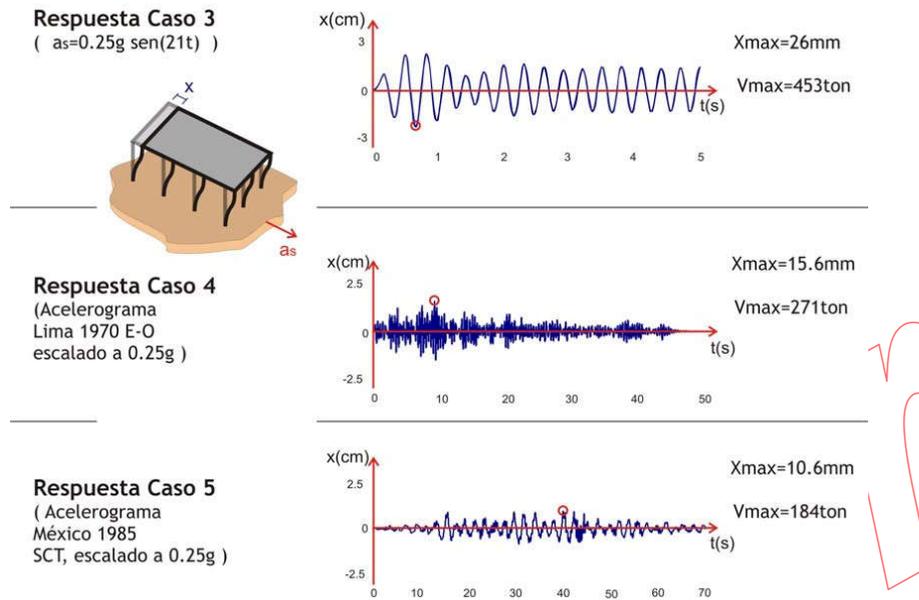
Las tres historias de aceleración en la base de la estructura tienen el mismo valor pico (0.25g), pero difieren notablemente en su contenido de frecuencias, como se aprecia en los correspondientes Espectros de Fourier mostrados en la figura 5.7. La señal armónica tiene una sola frecuencia componente de 3.3 Hz. El acelerograma peruano contiene muchos armónicos importantes; el predominante es de 3.4 Hz. La señal SCT, de México, tiene una franja muy estrecha de frecuencias componentes, con un valor predominante de 0.5 Hz.



**Figura 5.7 Espectro de Fourier para las tres historias de aceleración**

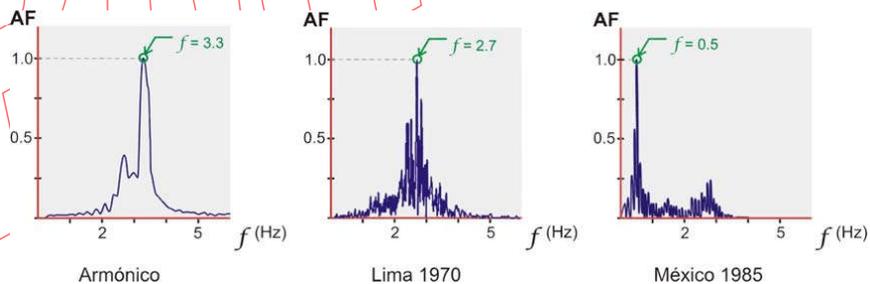
La figura 5.8 muestra la respuesta de la estructura en los tres casos de movimiento en la base. Las historias de desplazamiento,  $x(t)$ , difieren

notoriamente tanto en su variación en el tiempo como en sus valores máximos 26, 16 y 11 mm.



**Figura 5.8 Respuesta ante movimiento en la base**

Los Espectros de Fourier correspondientes a estas historias de desplazamiento se presentan en la figura 5.9. Para el caso de aceleración armónica en la base, caso 3, el EF indica que el desplazamiento del techo tiene un armónico dominante de 3.3 Hz. Para los casos de acelerogramas en la base, casos 4 y 5, el análisis de Fourier indica que las frecuencias dominantes en las historias de desplazamientos son 2.7 Hz y 0.5 Hz.



**Figura 5.9 Composición de frecuencias en las historias de respuesta a tres movimientos en la base: un armónico y dos acelerogramas**

En los casos de carga armónica externa y movimiento armónico en la base (casos 2 y 3), el edificio tiene la misma historia de desplazamientos y fuerza sobre el

sistema estructural. Esta suerte de equivalencia entre aceleración en la base y carga externa se explica y emplea en los acápites siguientes.

En los tres casos de aceleración en la base, no actúa una fuerza externa sobre el edificio ( $P(t) = 0$ ); sin embargo, el sistema estructural sí recibe una fuerza lateral como lo evidencian los desplazamientos laterales del techo. La fuerza sobre el sistema estructural es proporcional a estos desplazamientos y, por tanto, en cada uno de estos tres casos es notoriamente diferente, tanto en su variación en el tiempo como en sus valores máximos. Se obtuvo 453 ton para la sollicitación armónica, 271 ton para el registro de Lima y 184 ton para el registro en Ciudad de México.

La tabla 5.1 resume los valores máximos de los 5 casos estudiados.

**Tabla 5.1 Resumen de casos estudiados**

Caso	Solicitud		Respuesta		
	Valor Pico	$f_{pred}$ (Hz)	$X_{m\acute{a}x}$ (mm)	$f_{pred}$ (Hz)	$V_{m\acute{a}x}$ (Ton)
1. Carga lenta	150 ton	---	8.6	---	150
2. Carga armónica	150 ton	3.33	26.0	3.33	453
3. Aceleración armónica	0.25 g	3.33	26.0	3.33	453
4. Acelerograma Perú, E-O mayo de 1970, Lima	0.25 g	3.4	15.6	2.7	271
5. Acelerograma México Set. de 1985, DF	0.25 g	0.5	10.6	0.5	184

Los casos donde la sollicitación sobre la estructura y la respuesta estructural varían significativamente en el tiempo (casos 2 a 5 del ejemplo) constituyen fenómenos dinámicos en los cuales aparecen otras fuerzas, como se estudia a continuación.

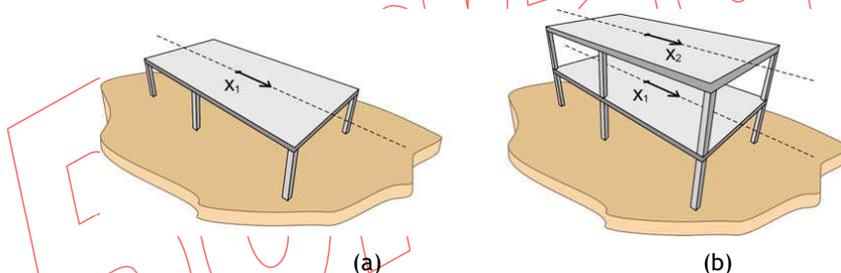
## 5.2. Fuerzas de inercia y sistema de coordenadas

Cuando una estructura responde dinámicamente a una sollicitación de carga o movimiento en su base, el desplazamiento de respuesta varía significativamente en el tiempo y aparecen aceleraciones importantes. Como producto de estas aceleraciones y de las masas del conjunto, se generan fuerzas de inercia que deben considerarse en el problema.

Para conocer la variación de las fuerzas de inercia durante el movimiento es necesario medir la aceleración en el sistema. Estas mediciones se denominan coordenadas dinámicas y el conjunto de observaciones se suele referir como el sistema de coordenadas dinámicas.

El número mínimo de coordenadas dinámicas necesarias para describir el conjunto de fuerzas de inercia en una estructura se denomina el grado de libertad dinámico del sistema (**gdl**).

La figura 5.10 muestra dos edificios simétricos con diafragmas rígidos para los cuales se asume que la masa de cada nivel se concentra en cada diafragma. Cuando el suelo se mueve siguiendo el eje de simetría, las masas se aceleran y en cada diafragma aparece una fuerza de inercia. Así, para estudiar el movimiento traslacional de un edificio, se debe emplear una coordenada de traslación por cada nivel y, entonces, el grado de libertad dinámico en estos casos resulta igual al número de pisos del edificio.



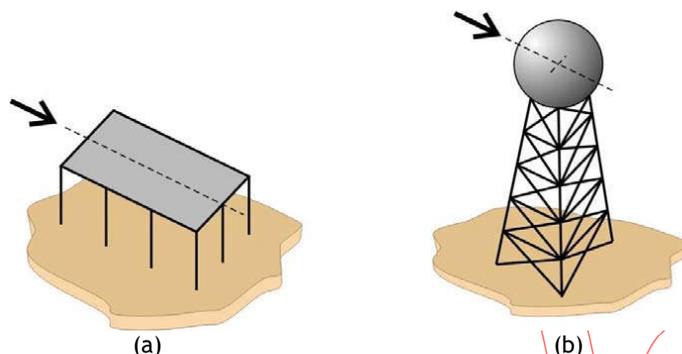
**Figura 5.10** (a) Estructura con una sola coordenada dinámica, (b) Edificio simétrico de dos pisos que necesita de dos coordenadas dinámicas

## 5.3. Estructuras de un grado de libertad

En algunas estructuras, la simetría y la dirección de la sollicitación permiten que el movimiento de respuesta se produzca en la misma dirección que la sollicitación actuante y que, además, en cada instante del movimiento, la aceleración de respuesta sea prácticamente uniforme en toda la masa importante de la estructura. Tal es el caso de edificios con masas importantes a nivel de los

diafragmas rígidos, o el de estructuras con masas elevadas importantes y estructuras de soporte con masa despreciable (figura 5.11).

En estos casos, basta una coordenada para describir en cada instante la aceleración y la fuerza de inercia del sistema.



**Figura 5.11 Estructuras de un grado de libertad: (a) edificio de un piso simétrico con masa concentrada en el diafragma rígido, (b) estructura con masa superior importante y soporte liviano**

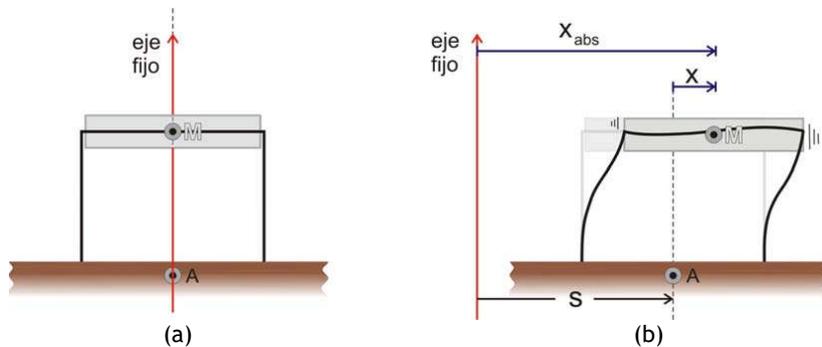
### 5.3.1. Ecuación de equilibrio dinámico

La figura 5.12 (a) muestra un edificio al inicio del movimiento con un eje vertical de referencia fijo en el espacio, respecto del cual se medirán los desplazamientos absolutos del suelo y del diafragma. Existe, además, otro eje de referencia vertical unido permanentemente al suelo en un punto "A" anclado al suelo, que servirá para medir los desplazamientos de la estructura respecto de su base. Al inicio del movimiento, ambos ejes coinciden (figura 5.12(a)).

En un instante genérico del movimiento, figura 5.12 (b), el suelo se ha desplazado respecto del eje fijo una cantidad  $s$  (distancia del punto A al eje fijo) y la masa de la estructura respecto del suelo se ha movido una distancia  $x$  (distancia del centro de masas al eje vertical que pasa por A).

En cada instante, el desplazamiento absoluto de la masa del sistema se obtiene como:

$$x_{abs} = x + s$$

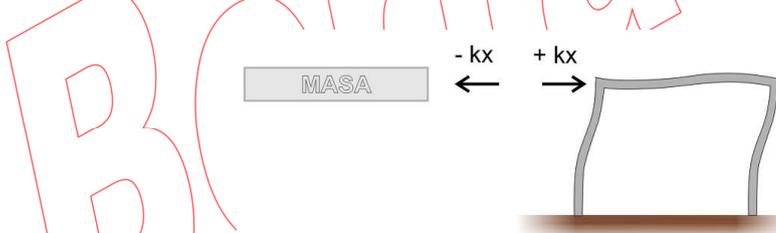


**Figura 5.12** Sistema de referencia para describir el movimiento de una estructura de un grado de libertad dinámico

Supongamos que, además del movimiento del suelo, actúa una fuerza externa  $P(t)$  sobre la masa de la estructura.

Veamos ahora las fuerzas que se presentan sobre la masa de la estructura durante el movimiento.

El desplazamiento del techo del edificio respecto del suelo indica la presencia de una fuerza lateral sobre el sistema estructural. Como se ha supuesto que la estructura es linealmente elástica, esta fuerza se determina como el producto del desplazamiento relativo ( $x$ ) y la rigidez lateral de la estructura ( $k$ ). A su vez, el sistema estructural ejerce una fuerza de igual valor pero de sentido contrario sobre la masa del edificio. Esta fuerza se denomina restitutiva, se representa por  $F_R$  y se determina como  $F_R = -kx$ . La figura 5.13 muestra ambas fuerzas.



**Figura 5.13** Fuerza restitutiva para una estructura linealmente elástica

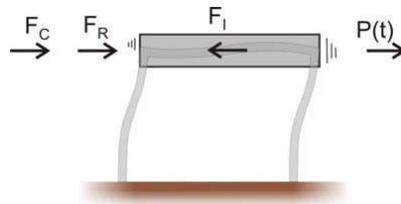
Existen mecanismos de fricción interna y de interacción con el entorno que actúan reduciendo la respuesta estructural durante el movimiento. Para el caso de estructuras de un grado de libertad, las acciones de amortiguamiento se representan por una fuerza única, denominada fuerza de amortiguamiento ( $F_c$ ). Se asume que esta fuerza es proporcional a la velocidad relativa de la estructura respecto del suelo,  $\dot{x}$ , pero de sentido contrario (modelo viscoelástico). Representando por "C" a la constante de proporcionalidad, tendremos:

$$F_c = -C\dot{x}$$

La aceleración absoluta de la masa de la estructura ocasionada por las fuerzas que recibe puede interpretarse como una fuerza de inercia con el fin de establecer la condición de equilibrio dinámico como la simple suma de todas las fuerzas presentes. Expresamos la fuerza de inercia como el producto de la masa de la estructura  $M$  por la aceleración absoluta como:

$$F_I = -M \ddot{x}_{abs}$$

La figura 5.14 muestra un instante del movimiento con las fuerzas actuantes sobre la masa de la estructura.



**Figura 5.14 Diagrama de cuerpo libre para la masa de la estructura**

La condición de equilibrio dinámico queda establecida como:

$$F_I + F_R + F_C + P(t) = 0$$

Sustituyendo las expresiones para las fuerzas tendremos:

$$-M \ddot{x}_{abs} - C \dot{x} - Kx + P(t) = 0$$

expresando la aceleración absoluta en función de la relativa y la aceleración del suelo:

$$-M(\ddot{x} + \ddot{s}) - C \dot{x} - Kx + P(t) = 0$$

finalmente, reagrupando, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) - M\ddot{s}$$

### Oscilador de un grado de libertad

El comportamiento de una estructura de un grado de libertad puede representarse por un oscilador como el mostrado en la figura 5.15. El sistema está constituido por una masa igual a la de la estructura montada sobre un pequeño carro móvil que representa el suelo. La masa está unida al carro móvil por un resorte y un amortiguador. El resorte tiene una constante de proporcionalidad igual a la rigidez lateral del sistema estructural y el amortiguador reproduce el amortiguamiento estructural. El movimiento del carro móvil representa el movimiento del suelo y el movimiento de la masa respecto del carro corresponde al movimiento relativo de la masa de la estructura respecto del suelo.

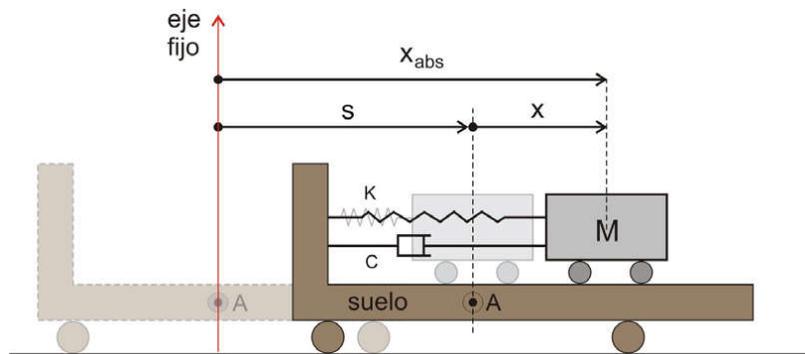


Figura 5.15 Oscilador de un grado de libertad

### Equivalencia entre carga actuante y movimiento en la base

Una estructura sometida exclusivamente al movimiento de su base tiene como ecuación diferencial:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{s}$$

cuando no hay movimiento en la base y se aplica una carga externa igual a

$$P(t) = -M\ddot{s}$$

se obtiene la misma ecuación diferencial y, consecuentemente, la misma historia de desplazamientos relativos de respuesta.

Por tanto, el desplazamiento relativo de una estructura sometida a una historia de aceleraciones en su base ( $s$ ) puede obtenerse fijando la base de la estructura

y aplicando una carga externa igual al producto de su masa por la historia de aceleraciones. La figura 5.16 muestra esta equivalencia.

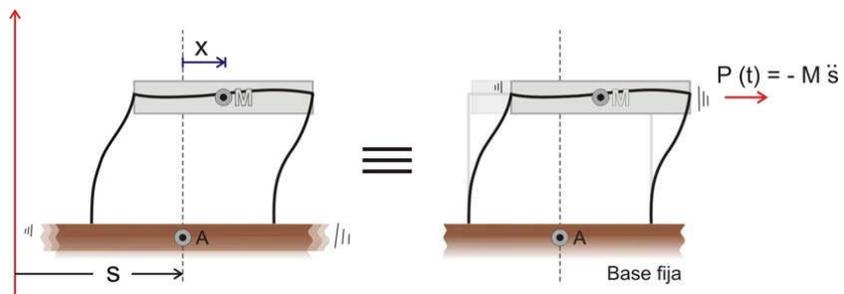


Figura 5.16 Aceleración del suelo y carga equivalente para ....

Borrador

### 5.3.2. Respuesta en vibración libre

Cuando cesan las causas que originaron el movimiento de una estructura, ésta continúa vibrando libremente. El desplazamiento y la velocidad iniciales de esta fase corresponden al instante en que las acciones externas desaparecieron.

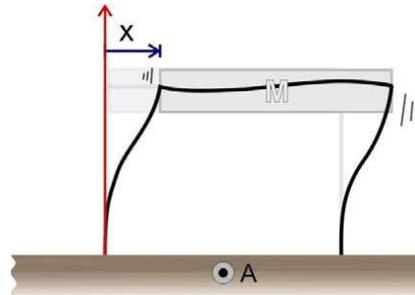


Figura 5.17 Estructura en vibración libre

Representando por  $x$  al desplazamiento de la estructura respecto del suelo, la ecuación de equilibrio dinámico es la siguiente:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

En esta ecuación, el tiempo se mide respecto del inicio de la vibración libre y las condiciones iniciales son los valores del desplazamiento y la velocidad para  $t=0$ , representados por:

$$x_0, \dot{x}_0$$

A continuación, se estudia la respuesta en vibración libre para sistemas ideales sin amortiguamiento y, luego, para estructuras que siempre tienen amortiguamiento.

#### Vibración libre sin amortiguamiento

Para sistemas sin amortiguamiento, la ecuación de equilibrio se reduce a

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

cuya solución es  $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$  se denomina frecuencia circular de vibración.

Si el desplazamiento y la velocidad inicial fueran nulos, la respuesta también lo sería ( $x(t)=0$ ). En otras palabras: para que exista vibración libre, es necesario que el sistema parta de un desplazamiento inicial o una velocidad inicial.

### Amplitud del movimiento y ángulo de fase

El desplazamiento,  $x(t)$ , puede expresarse también como:

$$x(t) = \rho_o \cos(\omega t - \phi)$$

donde  $\rho = \{x_o^2 + (\dot{x}_o / \omega)^2\}^{1/2}$  se denomina amplitud del movimiento

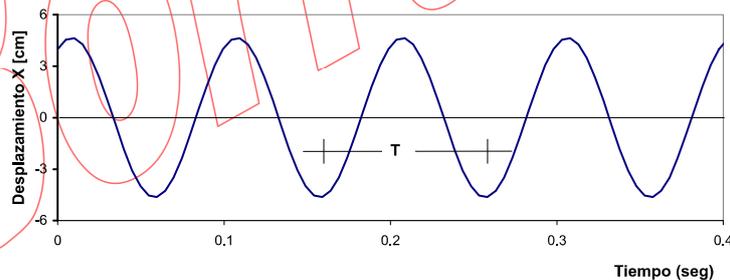
$$y \quad \phi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_o}{\omega x_o}\right) \text{ se denomina ángulo de fase.}$$

Supongamos una estructura de masa  $M = 2.5 \text{ ton seg}^2/m$  y rigidez  $K=10,000 \text{ ton/m}$  que al inicio de la vibración libre tiene las condiciones  $x_o = 4 \text{ cm}$  y  $\dot{x}_o = 150 \text{ cm/seg}$ .

La respuesta en vibración libre será:

$$x(t) = 4.6503 \cos(63.2455 t - 0.5352) \text{ (cm)}$$

La figura 5.18 muestra la naturaleza cíclica y sin decaimiento de la respuesta. La ordenada y la tangente a la curva al inicio constituyen el desplazamiento y la velocidad inicial.



**Figura 5.18** Respuesta en vibración libre de un sistema sin amortiguamiento

### Periodo de vibración

El intervalo de tiempo en que la estructura completa un ciclo se denomina el periodo de vibración y se representa por T. El valor de T se puede determinar haciendo  $x(t) = x(t+T)$ . Entonces, se obtiene:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

El inverso del periodo se denomina frecuencia de vibración, cuyas unidades son ciclos por segundo (Hz)

$$f = \frac{1}{T}$$

Para la estructura del ejemplo  $T = 0.1$  seg,  $f = 10$  Hz

### Vibración libre amortiguada

Uno de los mecanismos que tienen las estructuras para disipar energía y reducir los desplazamientos de respuesta es el amortiguamiento. La ecuación de equilibrio para el caso de una estructura en vibración libre es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

La forma que tendrá la solución de esta ecuación diferencial depende de la siguiente ecuación algebraica, denominada ecuación característica:

$$M\alpha^2 + C\alpha + K = 0$$

Las soluciones de la ecuación característica son:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-C}{2M} \pm \frac{\sqrt{C^2 - 4MK}}{2M}$$

Estas raíces serán reales o complejas dependiendo del valor del discriminante:

$$D = C^2 - 4MK$$

### Amortiguamiento crítico y amortiguamiento estructural

Cuando el discriminante de la ecuación característica se hace nulo ( $D = 0$ ), las raíces son reales e iguales a  $\alpha = -C/2M$  y la solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = e^{-\omega t} (At+B)$$

En este caso, el desplazamiento de respuesta ya no es oscilatorio y el valor del amortiguamiento se denomina amortiguamiento crítico,  $C_{cr}$ . Haciendo  $D = C^2 - 4MK = 0$ , se obtiene:

$$C_{cr} = 2\sqrt{K \cdot M}$$

Las estructuras tienen valores de amortiguamiento que son solo una fracción del amortiguamiento crítico. Esta fracción se expresa como  $\xi = C/C_{cr} \ll 1$ .

Las estructuras tienen valores de amortiguamiento entre el 2 y el 15 % del amortiguamiento crítico,  $\xi \approx 0.02$  a  $0.15$ . Para una edificación en particular, el valor de  $\xi$  generalmente se asume según el sistema estructural. Es usual emplear valores alrededor de 7 % para estructuras de concreto o acero y de 10 % para estructuras de madera.

### Sistemas subamortiguados

Cuando el valor del amortiguamiento es menor que el valor del amortiguamiento crítico ( $C < 2\sqrt{MK}$ ), se dice que el sistema es subamortiguado. Es el caso de las estructuras en general.

En este caso, el desplazamiento de respuesta se expresa como:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \{A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)\}$$

donde  $\omega_D$  se denomina frecuencia circular amortiguada y se determina como:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Las constantes A y B quedan determinadas por las condiciones iniciales como:

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \quad B = x_0$$

Sustituyendo estas expresiones en la función de desplazamientos y luego de una transformación trigonométrica sencilla se obtiene:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \rho \cos(\omega_D t - \phi)$$

donde la amplitud del movimiento,  $\rho$ , y el ángulo de fase,  $\phi$ , vienen dados por las siguientes expresiones:

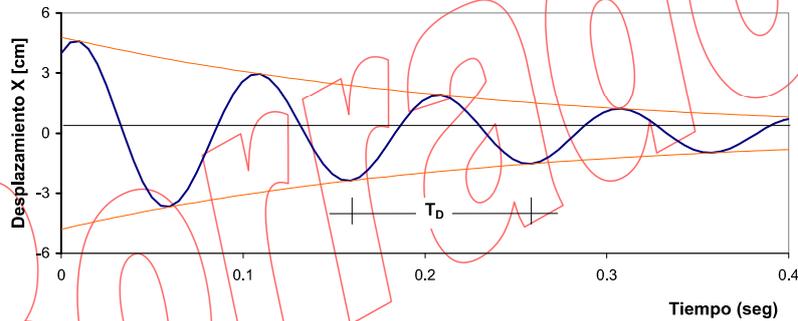
$$\rho = \left( x_o^2 + \left( \frac{\dot{x}_o + \xi \omega \cdot x_o}{\omega_d} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\dot{x}_o + \xi \omega \cdot x_o}{\omega_d \cdot x_o} \right)$$

Para la estructura del ejemplo anterior ( $M=2.5$  ton seg<sup>2</sup>/m,  $K=10,000$  ton/m,  $x_o = 4$  cm ,  $\dot{x}_o = 150$  cm/seg) pero con  $\xi=0.07$ , el desplazamiento de respuesta es:

$$x(t) = e^{-4.4272 t} 4.67 \cos(63.0904t - 0.5865)$$

La figura 5.19 muestra esta historia de desplazamientos; nótese la naturaleza cíclica y el decaimiento de la respuesta.

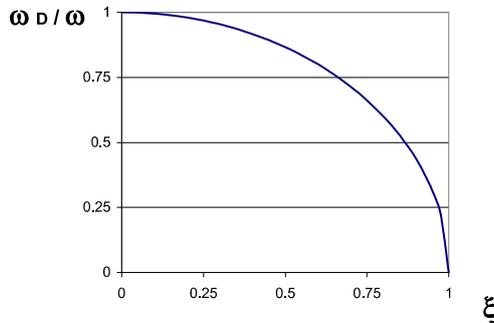


**Figura 5.19** Respuesta en vibración libre amortiguada

### Efecto del amortiguamiento

Debido al amortiguamiento, el desplazamiento decrece rápidamente. En la historia de desplazamientos del ejemplo anterior, si denotamos por  $x_1$  al primer desplazamiento máximo y por  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  a los siguientes desplazamientos pico, tendremos que  $x_2 = 0.64 x_1$ ,  $x_3 = 0.41 x_1$  y  $x_4 = 0.27 x_1$ ; es decir, luego de 3 ciclos, el desplazamiento es solo el 27 % del valor máximo inicial.

La frecuencia circular amortiguada  $\omega_d$  se reduce con el amortiguamiento. La figura 5.20 muestra el cociente  $\omega_d/\omega$  en función de la fracción de amortiguamiento crítico.

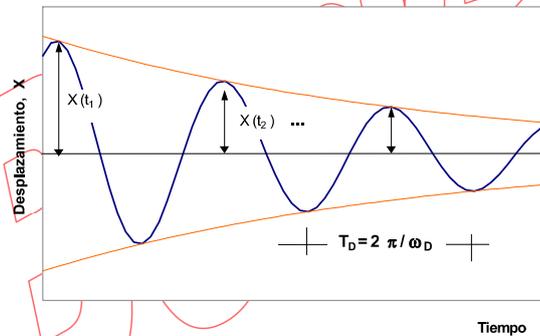


**Figura 5.20 Amortiguamiento y frecuencia circular amortiguada**

Se nota que para el rango de valores del amortiguamiento estructural, la variación de la frecuencia circular es despreciable. Incluso para sistemas con  $\xi = 0.2$ , se obtienen frecuencias circulares prácticamente iguales:  $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 0.98 \omega$ . Consecuentemente, el periodo de vibración de una estructura amortiguada,  $T_D$ , es prácticamente igual al de un sistema ideal sin amortiguamiento, es decir  $T_D \approx T$ .

**Decremento logarítmico**

Una medida del decaimiento en la respuesta se obtiene en función de los desplazamientos correspondientes a instantes separados  $n$  ciclos,  $x_i, x_{i+n}$ . El logaritmo del cociente entre estos dos desplazamientos se denomina decremento logarítmico y se representa por  $\delta$ , es decir  $\delta = Ln(x_i / x_{i+n})$ :



**Figura 5.21 Caída de la amplitud en el tiempo**

Expresando ambos desplazamientos en función del tiempo  $t_i$  y  $t_i + nT_D$ , obtenemos:

$$\delta = Ln \left( \frac{x(t_i)}{x(t_i + nT_D)} \right) = \frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Como  $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$ , el valor del amortiguamiento se puede obtener en función del decremento logarítmico y el número de ciclos como  $\xi \approx \delta / (2\pi n)$ .

Si experimentalmente se obtiene para una estructura una gráfica como la de la figura 5.21, el amortiguamiento se puede estimar con la expresión anterior y el periodo de vibración dividiendo el tiempo transcurrido (de  $t_1$  a  $t_1+nT_D$ ) entre “n”.

### 5.3.3. Respuesta ante cargas armónicas

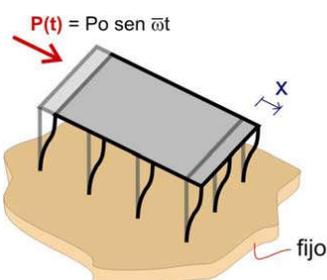


Figura 5.22 Estructura bajo carga armónica

La carga que induce el movimiento en la estructura puede provenir del movimiento del suelo o de una acción externa aplicada directamente a la estructura; en ambos casos, se representa como:

$$P(t) = P_o \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t)$$

$P_o$  constituye el valor máximo de la carga y  $\bar{\omega}$  la frecuencia circular de la misma. La ecuación de equilibrio dinámico para este caso es:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = P_o \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t)$$

La forma que tendrá la solución de esta ecuación depende directamente del amortiguamiento. A continuación, se trata el caso de sistemas ideales sin amortiguamiento y el caso de las estructuras que son sistemas con amortiguamiento.

#### Carga armónica sobre sistemas sin amortiguamiento

En este caso, la ecuación de equilibrio se reduce a:

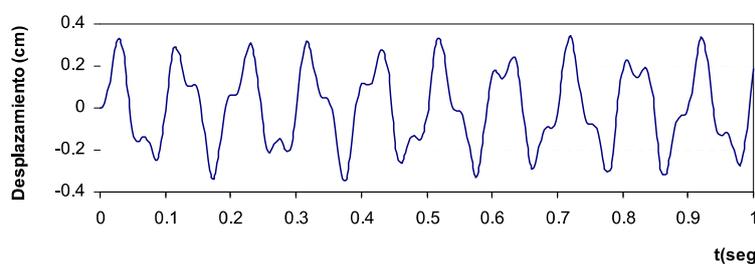
$$M\ddot{x} + Kx = P_o \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t)$$

Para condiciones iniciales nulas ( $x=0$ ,  $\dot{x}=0$ ) la solución es:

$$x(t) = \frac{P_o}{K} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) (\text{sen}(\bar{\omega} t) - \beta \text{sen}(\omega t))$$

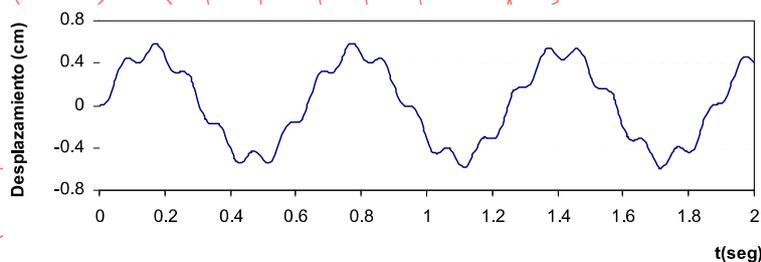
Donde  $\beta = \frac{\omega}{\omega}$  : relación de frecuencias

Como se observa, el desplazamiento de respuesta es la superposición de dos armónicos cuya importancia relativa depende de la relación de frecuencias ( $\beta$ ). Si el sistema del ejemplo anterior no tiene amortiguamiento ( $\omega=63.25$ ,  $T_{est}=0.1$ ,  $\xi = 0$ ) y se somete a la carga  $P(t)= 50 \text{ sen}(155 t)$ , ( $\omega =155$ ,  $T_{carga} = 0.04$ ) la relación de frecuencias es  $\beta=2.45$  y entonces el armónico predominante es el del propio sistema.



**Figura 5.23** Respuesta de un sistema sin amortiguamiento a una carga armónica,  $T_{sistema}=0.1$  seg,  $T_{carga}=0.04$  seg,  $\beta=2.45$ ,  $P_0/K= 0.5$  cm

En cambio, si la frecuencia de la carga actuante sobre el mismo sistema es  $\omega=10$  rad/seg ( $T_{carga}=0.63$  seg), la relación de frecuencias será  $\beta=0.158$  y, por consiguiente, la respuesta se dará prácticamente en términos del armónico de la carga, como se ve en la figura 5.24.



**Figura 5.24** Sistema sin amortiguamiento bajo carga armónica,  $T_{est}=0.1$  seg,  $T_{carga}=0.63$  seg,  $\beta=0.158$ ,  $P_0/K= 0.5$  cm.

El hecho de que en la respuesta del sistema predomine una u otra frecuencia dependiendo del valor de  $\beta$  sólo se da en sistemas sin amortiguamiento. Sin embargo, para el caso de estructuras, que son sistemas amortiguados, el comportamiento es diferente, como se ve a continuación.

### Respuesta estructural ante carga armónica

Una estructura tiene siempre amortiguamiento y cuando se somete a una carga armónica tiene por ecuación de equilibrio :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_o \text{sen}(\bar{\omega} t)$$

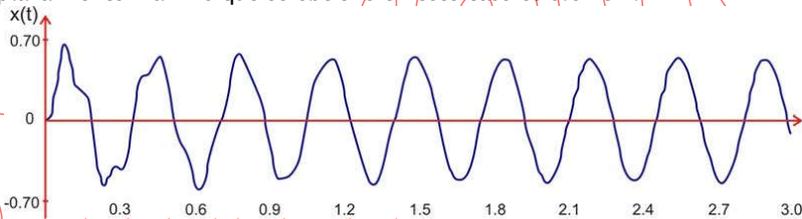
cuya solución general es:

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \{A \text{sen}(\omega_D t) + B \text{cos}(\omega_D t)\} + \frac{1}{\{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\}} \frac{P_o}{K} \{(1 - \beta^2) \text{sen}(\bar{\omega} t) - 2\xi\beta \text{cos}(\bar{\omega} t)\}$$

El primer sumando está en función de la frecuencia de la estructura y decae con el tiempo. Se le denomina componente transitoria de la respuesta,  $x_{trans}$ . El segundo sumando está en función de la frecuencia de la carga, no decae con el tiempo y se llama componente estacionaria  $x_{estac}$ .

$$x(t) = x_{trans} + x_{estac}$$

La figura 5.25 muestra el desplazamiento de una estructura con bajo amortiguamiento,  $\xi=0.02$ , de igual masa y rigidez que el ejemplo anterior ( $M=2.5$  ton  $\text{seg}^2/\text{m}$ ,  $K=100$  ton/cm) sometida a la carga  $P(t)=50 \text{sen}(18 t)$ ,  $T_{car}= 0.35\text{seg}$ . Sólo en la parte inicial de esta historia se nota la presencia de ambas componentes; luego, la respuesta luce como un armónico simple. El desplazamiento máximo que se obtiene en este caso es 0.67 cm.



**Figura 5.25 Estructura con bajo amortiguamiento,  $\xi=0.02$ , sometida a carga armónica,  $T_{est}=0.1$  seg,  $T_{carga}=0.35$  seg,  $\beta=0.286$ ,  $P_o/K= 0.5$  cm.**

Como la componente transitoria rápidamente tiende a cero, la respuesta puede obtenerse considerando solo la componente estacionaria. Esta componente es un armónico con la frecuencia de la carga y puede expresarse como:

$$x(t) = \delta_{est} D \text{sen}(\bar{\omega} t - \phi)$$

$\delta_{est}$  es el desplazamiento que se obtendría de aplicar  $P_o$  estáticamente, es decir

$$\delta_{est} = \frac{P_o}{K}$$

$D$  y  $\phi$  se denominan factor de amplificación dinámica y ángulo de fase. Se detallan a continuación.

### Factor de amplificación dinámico (D)

Este factor mide el incremento del desplazamiento máximo dinámico respecto del caso estático y se calcula como:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}}$$

La figura 5.26 muestra la variación del factor D con el amortiguamiento y la relación de frecuencias.

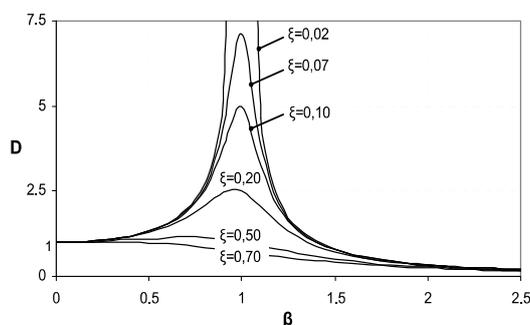


Figura 5.26 Factor de amplificación dinámica

Se nota que los valores máximos del factor de amplificación se dan para valores de  $\beta$  ligeramente menores a la unidad.

Para un determinado valor de amortiguamiento, el máximo factor D y el valor respectivo de  $\beta$  son:

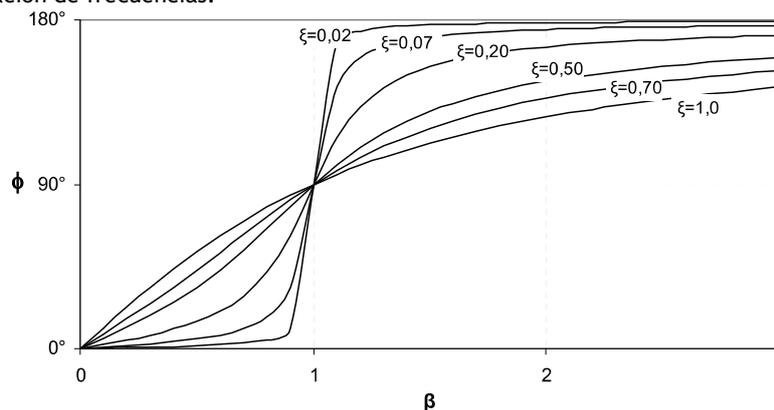
$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{1-2\xi^2}$$

### Ángulo de fase ( $\phi$ )

La carga aplicada y el desplazamiento de respuesta son funciones senoidales cuyos argumentos permanentemente difieren en el ángulo de fase ( $\phi$ ) y, por tanto, existe un retraso entre sus respectivos valores máximos. Por ejemplo, si  $\phi = 90^\circ$ , los desplazamientos de la estructura son máximos cuando la fuerza se hace cero. El ángulo de fase se calcula como:

$$\phi = \arctan \left( \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right)$$

La figura 5.27 muestra la variación del ángulo de fase con el amortiguamiento y la relación de frecuencias.



**Figura 5.27 Ángulo de fase**

Regresemos al ejemplo. Cuando se obtuvo la historia de desplazamientos de la estructura bajo carga armónica empleando las componentes transitoria y estacionaria (figura 5.25), se obtuvo como valor máximo 0.67 cm. Obtengamos ahora la respuesta empleando solo la componente estacionaria: el desplazamiento estático es  $\delta_{est} = 50/100 = 0.5$  cm, el factor de amplificación dinámica  $D = 1.09$  y el ángulo de fase  $\phi = 0.012$  rad. Por tanto, el desplazamiento máximo y la función de desplazamientos son

$$\rho = 0.5 * 1.09 = 0.54 \text{ cm} \quad \text{y} \quad x(t) = 0.54 * \text{sen}(18t - 0.012)$$

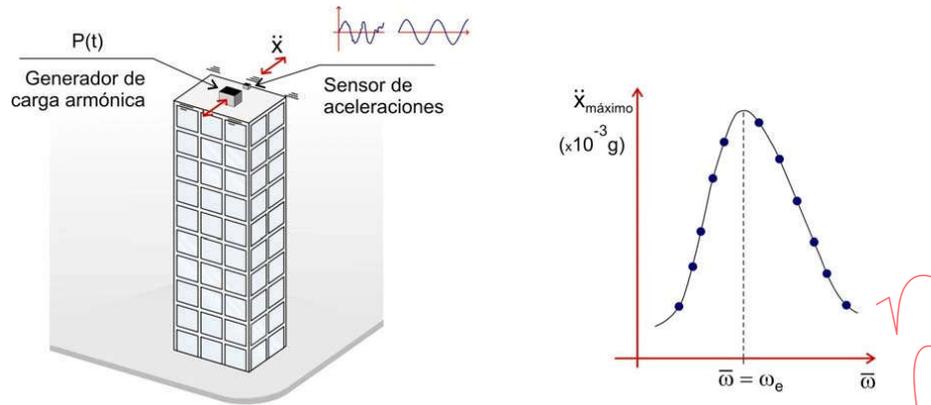
En este ejemplo en particular, al usar sólo la componente estacionaria se obtuvo un desplazamiento máximo que es sólo el 80 % del obtenido usando ambas componentes.

### **Determinación experimental del periodo de vibración de edificios**

Existen equipos mecánicos que generan cargas horizontales armónicas de magnitud y frecuencia controladas. La figura 5.28 muestra un edificio con el equipo instalado en la azotea.

Se hacen varios ensayos manteniendo la misma amplitud de carga, pero variando la frecuencia circular ( $\omega$ ). En cada ensayo se registra la amplitud máxima del movimiento estacionario de respuesta, mediante un sensor de aceleraciones

instalado en la azotea. Con los resultados de todos los ensayos se construye el gráfico  $\bar{\omega} - \ddot{x}_{m\acute{a}x}$  mostrado en la figura 5.28.



**Figura 5.28 Determinación experimental del periodo de vibración de edificios**

En cada ensayo de carga, el edificio responde con una amplitud estacionaria diferente, la máxima amplitud se produce cuando la frecuencia de la carga y la frecuencia del edificio ( $\omega_e$  en la figura) son numéricamente muy cercanas. Por tanto la frecuencia fundamental de vibración del edificio, se puede estimar como la frecuencia asociada a la mayor amplitud de la gráfica  $\bar{\omega} - \ddot{x}_{m\acute{a}x}$ .

Los edificios presentan permanentemente oscilaciones muy pequeñas por efecto del viento, del tránsito o de pequeños impactos. Estas oscilaciones, denominadas vibraciones ambientales, se registran con instrumentos relativamente sensibles y permiten estimar el periodo del edificio usando técnicas basadas en Espectros de Fourier. En un acápite posterior se presenta una técnica sencilla de cocientes espectrales.

### Instrumentos de medición de señales sísmicas

Los instrumentos para registrar el movimiento del suelo están constituidos esquemáticamente por un oscilador dentro de una caja que se une firmemente al suelo. Durante el movimiento, el instrumento registra el movimiento del oscilador respecto de su base (el suelo).

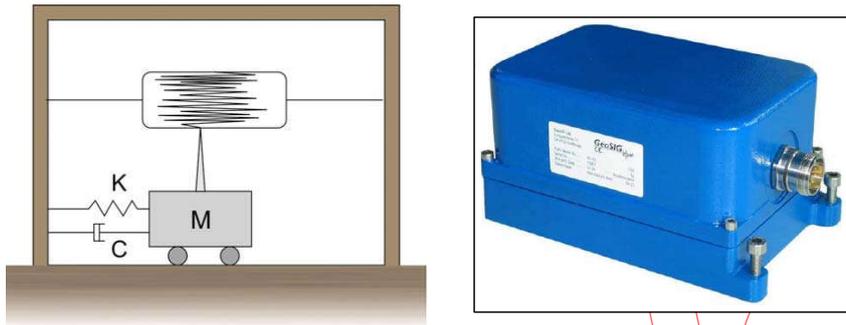


Figura 5.29 Instrumentos de medición de señales sísmicas

Para valores adecuados del periodo y amortiguamiento del oscilador, se logra que el registro obtenido represente la aceleración o el desplazamiento del suelo.

La ecuación del oscilador dentro del instrumento es:  $M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = -Ms$ , donde  $x$  representa el desplazamiento relativo del oscilador respecto del suelo y  $s$  la aceleración del suelo.

### Acelerómetro

La aceleración del suelo se puede expresar por la siguiente sumatoria de Fourier:

$$s = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left( \frac{2\pi n t}{T_s} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \left( \frac{2\pi n t}{T_s} \right)$$

por simplicidad en la explicación supondremos solamente:

$$\ddot{s} = \sum a_n \text{sen}(\omega_n t)$$

Como el oscilador dentro del instrumento es linealmente elástico, su desplazamiento relativo,  $x$ , puede obtenerse superponiendo las respuestas a cada uno de los armónicos simples. La ecuación de equilibrio para cada armónico es:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = -Ms = -Ma_n \text{sen}(\omega_n t)$$

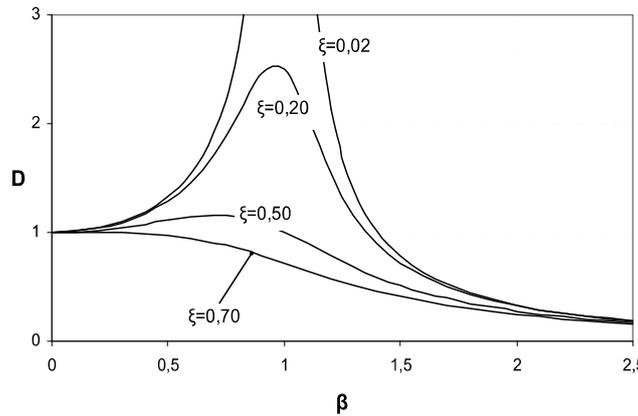
y la consiguiente solución:

$$x_n(t) = -M \frac{a_n}{K} D_n \text{sen}(\omega_n t - \phi_n)$$

Por tanto, la respuesta considerando todos los armónicos será:

$$x = -\frac{M}{K} \sum D_n a_n \text{sen}(\bar{\omega}_n t - \phi_n)$$

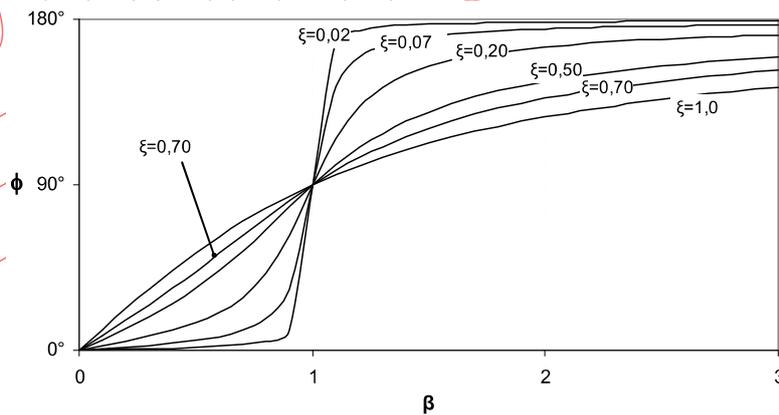
Como se ve en la figura siguiente, para  $\xi \approx 0.70$  y  $\beta \leq 0.6$ , el factor de amplificación dinámico (D) permanece constante y es aproximadamente igual a 1.0



**Figura 5.30** Factor de amplificación constante  $D=1$ , para  $\beta < 0.6$  y  $\xi \approx 0.70$

Por tanto x puede expresarse como:  $x = -\frac{M}{K} \sum a_n \text{sen}(\bar{\omega}_n t - \phi_n)$ , con  $D = 1$

Además, para tales valores de  $\xi$  y  $\beta$ , el ángulo de fase es proporcional a la relación de frecuencias ( $\beta$ ), como se muestra en el gráfico siguiente:



**Figura 5.31** Ángulo de fase proporcional a  $\beta$ ,  $\phi = (\pi/2) \beta$ , para  $\beta < 0.6$  y  $\xi \approx 0.70$

es decir  $\phi = \frac{\pi}{2} \beta = \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_n}$ , por tanto

$$x = -\frac{M}{K} \sum a_n \operatorname{sen} \left( \omega_n t - \frac{\pi \omega_n}{2\omega} \right) = -\frac{M}{K} \sum a_n \operatorname{sen} \left( \omega_n \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right) \right)$$

$$t' = t - \frac{\pi}{2\omega}$$

En esta expresión, haciendo finalmente tendremos:

Es decir, el desplazamiento del oscilador en un instante  $t$ ,  $x(t)$ , representa la

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2} \ddot{s}(t') \quad \text{o} \quad \ddot{s}(t') = \omega^2 x(t)$$

aceleración del suelo en un instante  $t'$ . Por lo tanto, el desplazamiento del oscilador multiplicado por el cuadrado de su frecuencia natural constituye la aceleración del suelo.

### Sismómetro

Supongamos que el desplazamiento del suelo se expresa por la sumatoria:

$$s = \sum a_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

entonces, la aceleración será:

$$\dot{s}' = - \sum \omega_n^2 a_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

El oscilador dentro del instrumento es elástico lineal y, por consiguiente, su desplazamiento relativo al suelo,  $x$ , puede obtenerse superponiendo las respuestas a cada uno de los armónicos simples. La ecuación de equilibrio para cada armónico genérico es:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + kx = -M \dot{s}' = M \omega_n^2 a_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

y la solución correspondiente será:

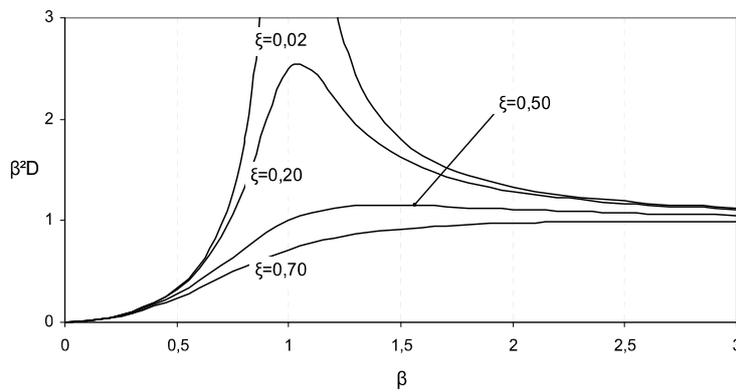
$$x_n(t) = \frac{M a_n \omega_n^2}{K} D_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_n) = \frac{a_n \omega_n^2}{\omega^2} D_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_n)$$

$$= a_n \beta_n^2 D_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_n)$$

Considerando ahora el efecto de todos los armónicos, la respuesta del oscilador en el interior del instrumento será:

$$x(t) = \sum a_n (\beta^2 D_n) \text{sen} (\omega_n t - \phi_n)$$

La figura que sigue muestra el producto  $\beta^2 D$ .



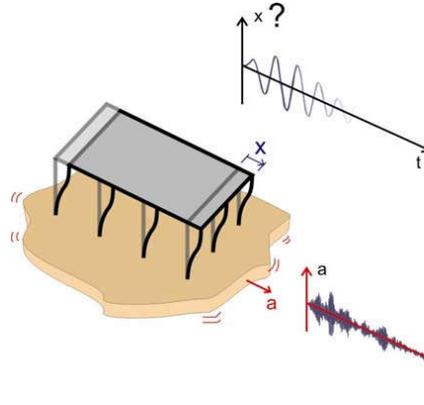
**Figura 5.32 Factor de amplificación  $\beta^2 D \approx 1$  para  $\beta \geq 2,5$  y  $\xi \approx 0,50$**

Se observa que para  $\xi \approx 0,20$  y  $\beta \geq 2,5$ , el factor  $\beta^2 D$  es aproximadamente constante e igual a la unidad. De igual manera, para el mismo rango de  $\beta$ , el ángulo de fase se hace prácticamente constante e igual a  $\pi$ ; entonces, la respuesta del oscilador se puede escribir como:

$$x(t) = - \sum a_n \text{sen} (\omega_n t) = - s(t)$$

Esta ecuación indica que el desplazamiento del oscilador registrado por el instrumento constituye también el desplazamiento del suelo.

### 5.3.4. Respuesta elástica de estructuras sometidas a terremotos



**Figura 5.33 Respuesta dinámica inducida por movimiento en la base**

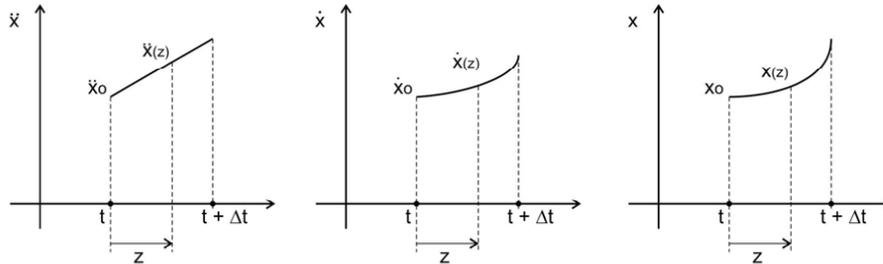
La aceleración del suelo en un terremoto es el resultado de complejos procesos de generación y propagación de ondas. La historia de aceleraciones es tan complicada que no pueden expresarse por medio de funciones matemáticas sencillas, por lo que debe manejarse como un conjunto de valores puntuales.

Para determinar la respuesta de estructuras sometidas a movimientos sísmicos, existen dos procedimientos: la **Integración de Duhamel**, aplicable solo a estructuras linealmente elásticas y la integración "**Paso a Paso**", para todo tipo de estructuras.

La integral de Duhamel permite resolver la ecuación diferencial del movimiento por medio de integración literal y, en el caso de estructuras sometidas a señales sísmicas, la integración se efectúa numéricamente. El inconveniente de este método es que no sirve para obtener la respuesta de estructuras sometidas a movimientos severos en que se espera comportamiento inelástico.

Los métodos de integración **paso a paso** permiten obtener la respuesta como un conjunto de valores que corresponden al inicio y al final de pequeños intervalos de tiempo en que se calcula la respuesta. Por medio de estos métodos, si se conoce la respuesta al inicio de un intervalo de tiempo, se puede determinar la respuesta al final del intervalo de integración. De este modo, si se parte de un estado inicial conocido, se puede calcular la respuesta al final del intervalo de integración; los valores así obtenidos se pueden emplear luego como valores iniciales del siguiente intervalo de integración y así sucesivamente.

Uno de los métodos más difundidos para la integración paso a paso es el de **Aceleración Lineal**, que consiste en tomar intervalos de integración muy cortos en los que se asume una variación lineal para la aceleración de la estructura. Como consecuencia de esta suposición, la velocidad y el desplazamiento quedan definidos por funciones de segundo y tercer grado.

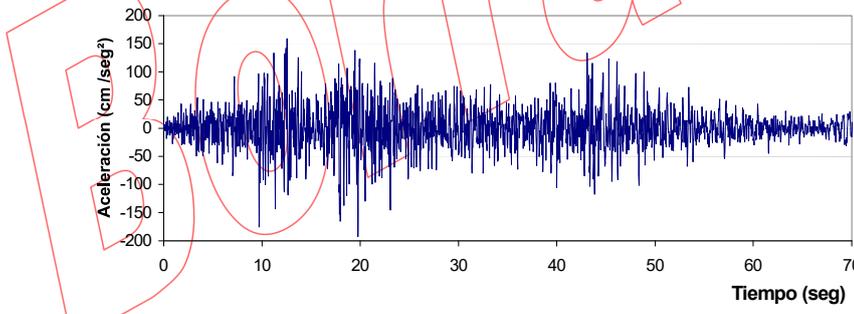


**Figura 5.34 Variación de la respuesta en un intervalo de integración según el método de Aceleración Lineal**

En muchos métodos de integración paso a paso, existen problemas de precisión a tal punto que, para valores inadecuados del intervalo de integración, la respuesta puede crecer descontroladamente (problemas de inestabilidad). Para el método de Aceleración Lineal, se sugiere emplear un intervalo de integración igual a 1/10 del periodo de la estructura.

Los programas de computación para calcular la respuesta de estructuras sometidas a una aceleración en su base están basados generalmente en procedimientos de integración paso a paso. Como información, estos programas necesitan las propiedades de la estructura (masa, rigidez y amortiguamiento) y la señal sísmica que se empleará. Como resultado, se obtienen las historias de desplazamiento, aceleración, fuerza restitutiva, etc.

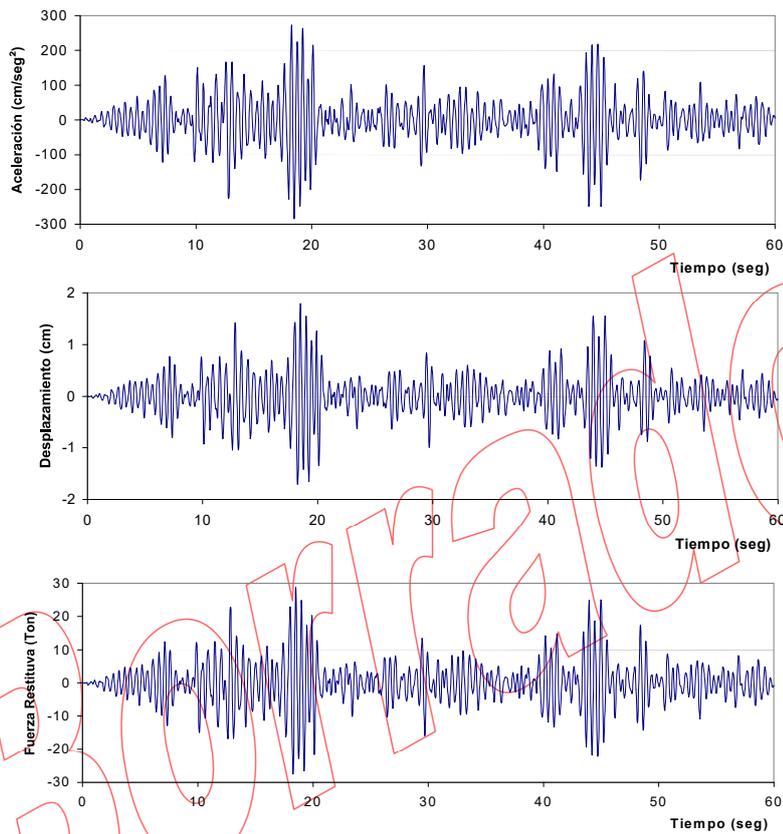
La figura 5.35 muestra la componente norte  $82^\circ$  oeste del registro de aceleraciones correspondiente al sismo del 3 de octubre de 1974 en la costa central del Perú. El acelerograma se obtuvo en Lima a 73 Km. del epicentro y tuvo un valor máximo de  $196 \text{ cm}/\text{seg}^2$  (aproximadamente 0.2 g).



**Figura 5.35 Componente N  $82^\circ$  O del registro de aceleraciones del terremoto del 3 de octubre de 1974 en la costa central del Perú (registro obtenido a 73 km. del epicentro)**

Uno de los objetivos de la Ingeniería Sismorresistente es lograr estructuras que puedan comportarse elásticamente durante los sismos frecuentes. Para la costa del

Perú, la aceleración del suelo asociada a estos sismos es de aproximadamente 0.2g. A manera de ejemplo, veamos la respuesta de una estructura elástica de 0.5 seg de periodo, 100 Ton de peso y 7 % de amortiguamiento, como respuesta a la señal del sismo de 1974 en Lima (figura 5.35). Las historias de respuesta se muestran en la figura 5.36.

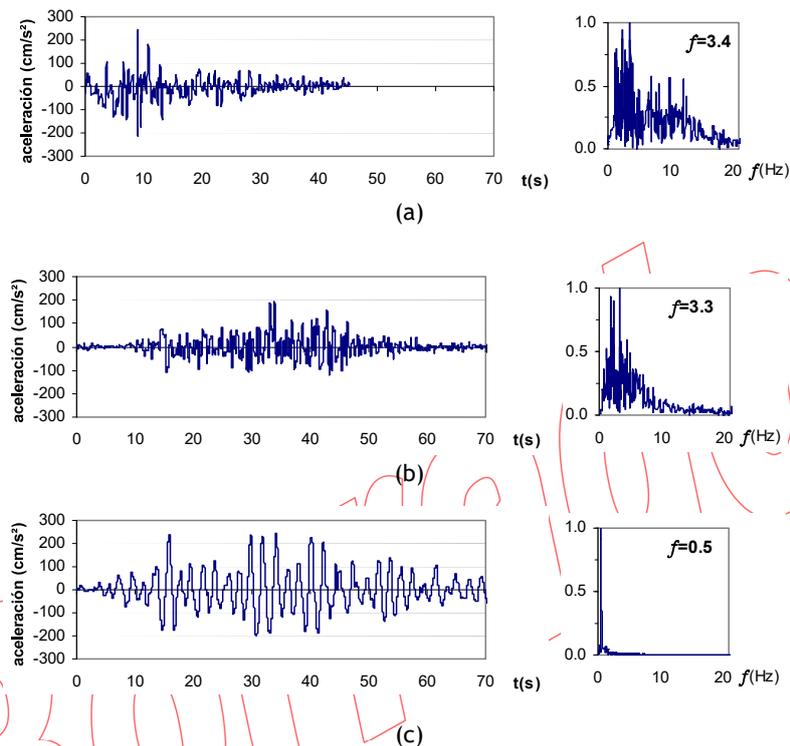


**Figura 5.36** *Respuesta de una estructura de 0.5 seg de periodo, 100 Ton de peso y 7 % de amortiguamiento a la señal N 82° O del terremoto del 3 de octubre de 1974 en la costa central del Perú*

La aceleración máxima alcanzada por la estructura fue de 285 cm/seg<sup>2</sup>, lo que significa que la estructura amplificó en 1.45 veces la aceleración pico que recibió en su base ( $1.45 = 285 / 196$ ). El desplazamiento máximo fue de 1.79 cm y el valor máximo de la fuerza restitutiva llegó a 29 Ton, lo que representa el 29 % del peso de la estructura.

### Frecuencia fundamental de la respuesta a movimientos en la base

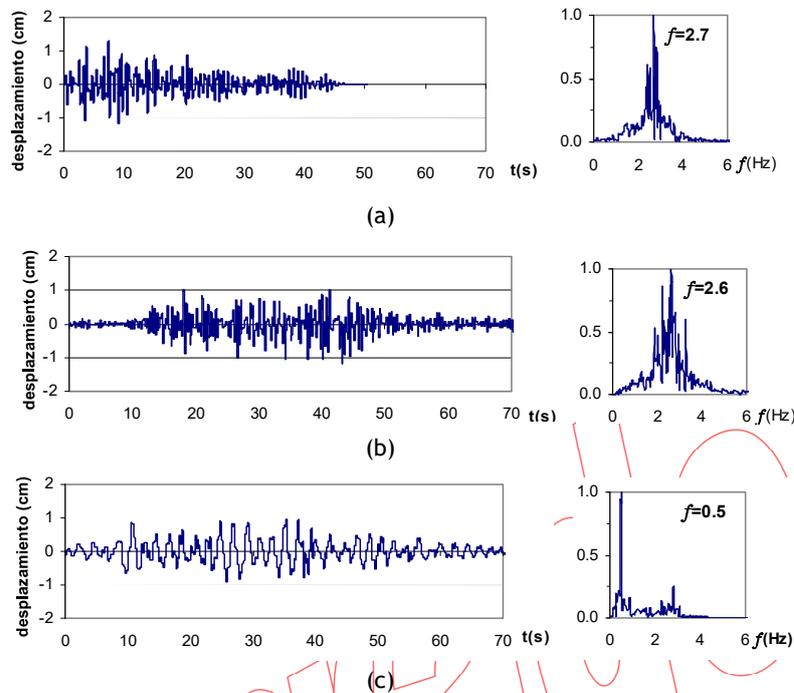
La figura 5.37 muestra tres acelerogramas escalados a 0.25 g con sus respectivos espectros de Fourier: el primer acelerograma corresponde al terremoto de 1970, en Perú, y los dos siguientes a los terremotos de 1985 en Chile y México.



**Figura 5.37** Acelerogramas y Espectros de Fourier correspondientes a los terremotos de (a) Perú, Lima, 1970; (b) Chile, Lolleo, 1985 y (c) México, DF, 1985

Los acelerogramas de Perú y Chile (a y b en la figura) corresponden a terremotos de subducción. Se registraron en suelo duro y tienen un rico contenido de frecuencias con, prácticamente, la misma frecuencia predominante (3.4 y 3.3 Hz). El acelerograma de México se registró en suelo blando y muestra prácticamente un solo armónico dominante de 0.5 Hz.

Veamos la respuesta de una estructura de 0.37 seg de periodo (2.7 Hz) y 5 % de amortiguamiento sometida a cada uno de estos acelerogramas. La figura 5.38 muestra las historias de desplazamientos con los respectivos espectros de Fourier.



**Figura 5.38** Respuesta de una estructura de 0.37 seg de periodo (2.7 Hz) a los acelerogramas de (a) Perú, Lima, 1970; (b) Chile, Lolleo, 1985 y (c) México, DF, 1985

La tabla 5.2 muestra las frecuencias predominantes del acelerograma y de la respuesta en cada uno de los casos analizados.

**Tabla 5.2** Frecuencias predominantes de la sollicitación y de la respuesta

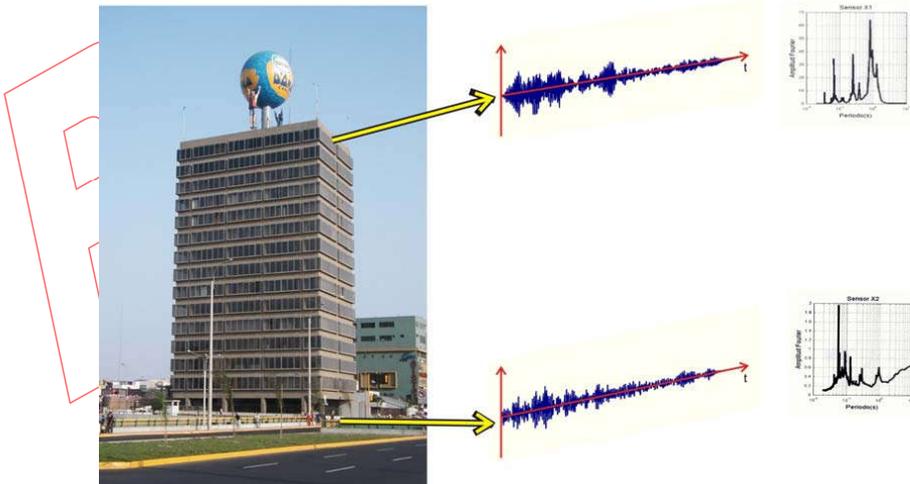
Caso	Solicitación $f_{\text{predominante}}$ (Hz)	Respuesta $f_{\text{predominante}}$ (Hz)
1. Acelerograma Perú, E-O mayo 1970, Lima	3.4	2.7
2. Acelerograma Chile, E-O 1985, Lolleo	3.3	2.6
3. Acelerograma México Set. 1985, DF	0.5	0.5

En general, una estructura responde amplificando las frecuencias en una franja estrecha alrededor de su frecuencia fundamental (ver factor de amplificación dinámico). En este caso, los espectros de Fourier muestran que la respuesta de la estructura a los registros de Perú y Chile tiene un contenido de frecuencias en una estrecha franja alrededor de una frecuencia fundamental, que en ambos casos es prácticamente igual a la frecuencia de la estructura (2.7 Hz). Como ambos acelerogramas tienen amplitudes de Fourier importantes en la zona de la frecuencia estructural, esta frecuencia, que es la que más se amplifica, también resulta ser la que alcanza la mayor amplitud en la respuesta de la azotea (2.7 Hz).

El espectro de Fourier para la respuesta al acelerograma de México muestra un gran pico en la frecuencia del acelerograma (0.5 Hz) y otro pico pequeño en la frecuencia de la estructura (2.7 Hz). Esto se debe a que la aceleración en la base de la estructura tiene prácticamente un solo armónico componente en 0.5 Hz y no contiene armónicos importantes en la zona de la frecuencia estructural (ver AF para la señal). Por tanto, los armónicos amplificados en la franja estrecha de la estructura no logran tener la importancia que tiene el armónico asociado a la frecuencia del acelerograma y, para decirlo en términos muy simples, la estructura responde casi como en vibración forzada por una carga armónica.

**Determinación del periodo de un edificio usando cocientes espectrales**

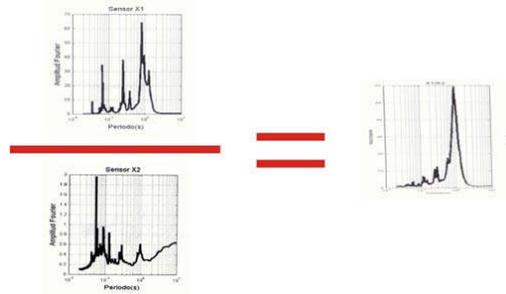
La figura 5.39 muestra un edificio y los registros simultáneos del movimiento en el suelo y en el techo, bajo condiciones usuales de un día cualquiera. Estas vibraciones son de muy baja amplitud y se denominan vibraciones ambientales.



**Figura 5.39 Registro del movimiento y espectros de Fourier en la base y el techo de un edificio durante vibraciones ambientales**

El movimiento en la base puede considerarse compuesto de muchos armónicos cuya importancia se refleja en el espectro de Fourier correspondiente. De los armónicos que la estructura recibe en su base, amplifica aquellos que se encuentran en una franja de frecuencias estrecha alrededor de la frecuencia estructural. De este modo, el movimiento en la azotea es el resultado de los armónicos en la base y la transformación que introduce la propia estructura.

Para estimar la zona estrecha de frecuencias en que se produce la amplificación, se puede recurrir al cociente de los valores espectrales correspondientes al techo y la base. Así, para cada frecuencia se obtiene un cociente que representa la amplificación introducida en cada valor puntual de frecuencia. La figura 5.40 ilustra este procedimiento.



**Figura 5.40** Cociente de espectros

La curva de cocientes espectrales permite reconocer la franja de amplificación estructural y luego estimar la frecuencia estructural como la frecuencia asociada con el mayor valor de amplificación.

Bajo vibraciones ambientales, los desplazamientos son tan pequeños que muchos componentes no estructurales contribuyen a la rigidez del edificio y el periodo obtenido usando estas vibraciones, resulta menor al que el edificio tendría en vibraciones elásticas de mayor amplitud, como sucede durante los sismos leves.

### 5.3.5. Espectros de respuesta

#### Seudo aceleración y seudo velocidad

La ecuación de equilibrio dinámico para una estructura con movimiento en su base es:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = -M \ddot{s}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación por la masa obtenemos:

$$\ddot{x} + 2\xi \omega \dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{s}$$

En esta ecuación, han quedado como propiedades de la estructura solo el amortiguamiento y la frecuencia circular. Por tanto, todas las estructuras con igual frecuencia y amortiguamiento sometidas a la misma señal sísmica tendrán la misma ecuación de equilibrio y, en consecuencia, la misma solución. De este modo, todas las estructuras de un grado de libertad con el mismo periodo y amortiguamiento, sometidas a la misma aceleración en su base, tendrán idénticas historias de desplazamiento, velocidad y aceleración ( $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}_{abs}(t)$ ).

La fuerza restitutiva en el tiempo sobre el sistema estructural de rigidez  $K$  es  $F_R(t) = K \cdot x(t)$ . Esta fuerza es propia de cada estructura y no constituye un parámetro del grupo; sin embargo, la fuerza restitutiva por unidad de masa ( $F_R/M$ ) sí es un parámetro del grupo, ya que:

$$\frac{F_R(t)}{M} = \frac{K}{M} \cdot x(t) = \omega^2 x(t)$$

Esta fuerza por unidad de masa se denomina seudo aceleración y se representa por

$$pa(t) = \omega^2 x(t)$$

Para valores pequeños del amortiguamiento, la seudo aceleración es aproximadamente igual a la aceleración absoluta y ambas historias son iguales cuando el amortiguamiento es nulo.

Se define la seudo velocidad como :

$$pv(t) = \omega \cdot x(t)$$

## Valores espectrales

Para muchos propósitos, interesa conocer solo los valores máximos de las historias de respuesta. Así, por ejemplo, para estructuras sometidas a sismos leves, donde el comportamiento es prácticamente elástico, el interés mayor corresponde a los valores máximos de la fuerza restitutiva, el desplazamiento y la aceleración. Estos valores máximos de la respuesta se denominan cantidades espectrales y constituyen, además, los valores máximos para todo un grupo de estructuras de igual periodo y amortiguamiento sometidas a la misma señal de aceleraciones.

Como el interés está en los valores máximos de la respuesta sin importar el signo, las cantidades espectrales son los máximos de la respuesta en valor absoluto. A continuación, se presenta las cantidades espectrales junto a la notación empleada y algunas relaciones directas.

**Desplazamiento espectral,  $S_d$ .** Máximo del desplazamiento relativo

$$S_d = \max \{ |x(t)| \}$$

**Seudo-velocidad espectral,  $S_v$**

$$S_v = \max \{ |pv(t)| \} = \max \{ \omega \cdot |x(t)| \} = \omega \cdot S_d$$

**Seudo aceleración espectral,  $S_a$**

$$S_a = \max \{ |pa(t)| \} = \max \{ \omega^2 \cdot |x(t)| \} = \omega^2 \cdot S_d$$

$$V_e = \max \{ |\dot{x}(t)| \}$$

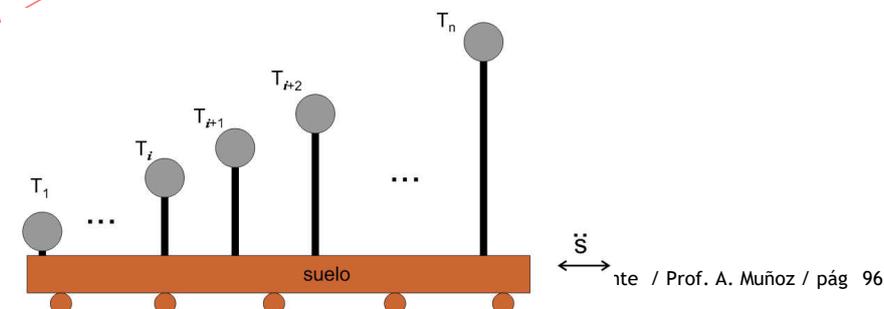
**Velocidad espectral,  $V_e$**  Máximo de la velocidad relativa

**Aceleración espectral,  $A_e$**  Máximo de la aceleración absoluta

$$A_e = \max \{ |\ddot{x}_{abs}(t)| \}$$

## Espectros

La figura 5.41 muestra una serie de estructuras de igual amortiguamiento ( $\xi$ ) y diferente periodo ( $T_1, T_2, \dots, T_n$ ), sometidas al mismo registro de aceleraciones.

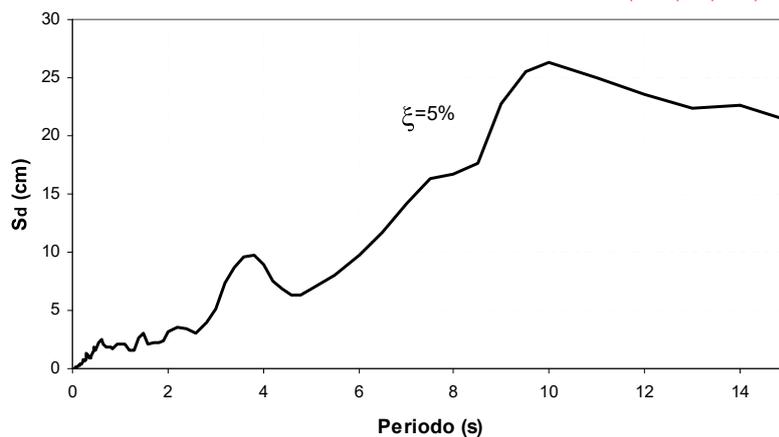


**Figura 5.41**  
**Cálculo de espectros de respuesta elástica**

Para cada estructura, se pueden calcular las historias de respuesta y, así, obtener los valores espectrales  $S_d$ ,  $S_v$ ,  $S_a$ , etc. Con el conjunto de valores obtenido para todas las estructuras, se puede luego definir las relaciones T versus  $S_d$ , T versus  $S_v$ , etc. Estas relaciones se denominan espectros de respuesta y nos permiten apreciar la variación de la máxima respuesta en un rango de periodos representativos de las estructuras.

A continuación, se muestran algunos espectros elásticos correspondientes a una de las señales registradas en el terremoto de Lima de 1966, la misma que tuvo una aceleración pico de  $180 \text{ cm/seg}^2$ . En el cálculo de la respuesta, se empleó 5 % de amortiguamiento.

En el espectro de desplazamientos, mostrado en la figura 5.42, se puede apreciar que, en general, el desplazamiento espectral es creciente con el periodo estructural.



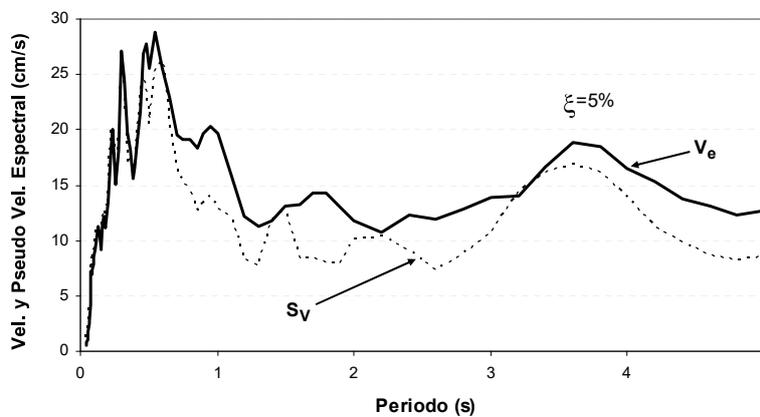
**Figura 5.42** Espectro de desplazamientos, señal Lima 17-X-1966-N82W con  $a_{m\acute{a}x}=180 \text{ cm/s}^2$

Las estructuras de periodo muy pequeño corresponden a sistemas muy rígidos, gracias a lo cual responden con pequeños desplazamientos relativos al suelo. Podemos imaginar una estructura infinitamente rígida ( $T=0$ ) como adherida al suelo durante todo el movimiento y, por tanto, con desplazamiento espectral nulo.

Las estructuras muy flexibles (aquellas con periodos muy largos) se comportan como poco animadas a responder dinámicamente al movimiento del suelo. Podríamos decir que, para periodos muy largos, el sistema permanece casi quieto mientras el suelo se mueve en su base. De este modo, en estructuras muy

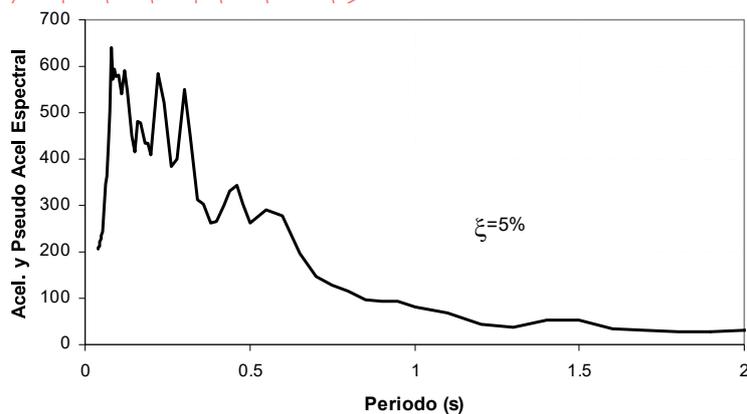
flexibles, el desplazamiento respecto del suelo resulta ser prácticamente igual al desplazamiento mismo del suelo. Por tanto, para periodos muy largos, el desplazamiento espectral tiende al desplazamiento máximo que alcanza el suelo durante el movimiento.

La figura 5.43 muestra el espectro de velocidad en línea continua junto con el espectro de seudo velocidad en línea discontinua. Puede apreciarse la cercanía de valores entre ambos espectros, particularmente en la zona de periodos entre 0.0 y 0.7 seg.



**Figura 5.43** Espectro de velocidad relativa y seudo velocidad, señal Lima, 17-X-1966-N82W, con  $a_{m\acute{a}x} = 180 \text{ cm/s}^2$

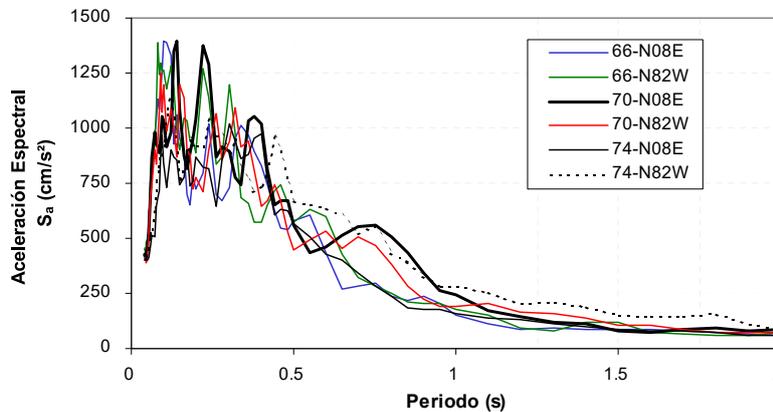
Como se aprecia en la figura 5.44, los espectros de aceleración absoluta y seudo aceleración no muestra diferencia apreciable incluso para el amortiguamiento de 5% empleado. En general, estas dos cantidades espectrales se asumen iguales y se usan indistintamente.



**Figura 5.44 Espectro de aceleración absoluta y pseudo aceleración, señal Lima, 17-X-1966 - N82W, con  $a_{m\acute{a}x} = 180 \text{ cm/s}^2$**

Las estructuras muy rígiditas tienden a moverse como unidas al suelo. Como ya se indicó, podemos imaginar una estructura infinitamente rígidita ( $T=0$ ) como adherida perfectamente al suelo y con la misma historia de aceleración absoluta. Por tanto podemos decir que para  $T=0$ , la aceleración espectral corresponde a la aceleración máxima del suelo. (Para el ejemplo  $a_{m\acute{a}x} = 180 \text{ cm/seg}^2$ ).

La figura 5.45 muestra los espectros de aceleración para 6 registros peruanos escalados a un valor de aceleración máxima de 0.4 g. En los cálculos se empleó 5 % de amortiguamiento.



**Figura 5.45 Espectros de pseudo aceleración para 6 señales peruanas empleadas para obtener el espectro de diseño de la Norma Peruana de 1997; todas las señales se escalaron a 0.4g**

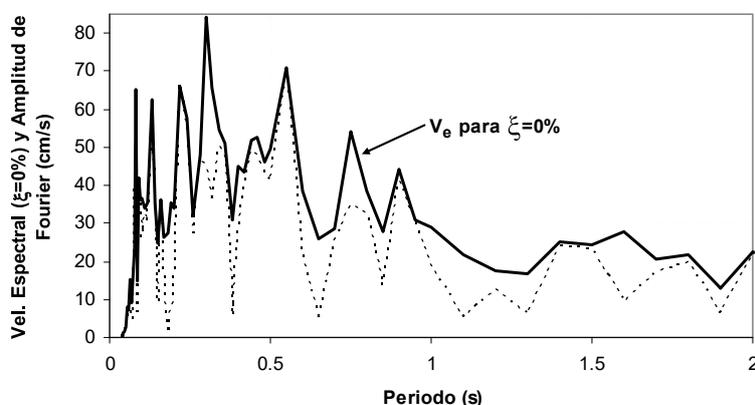
Como se aprecia, todos los espectros tienden a 0.4 g. para periodos pequeños, pues, como se indicó, las señales fueron escaladas a este valor de aceleración pico. Se nota que, en la zona entre 0.1 y 0.5 seg., las estructuras responden con una aceleración mayor a la que reciben en su base; en cambio, las estructuras de más de un segundo de periodo responden con aceleraciones menores a las que reciben.

### Espectro de Fourier

El espectro de Amplitudes de Fourier constituye una manera de conocer el contenido de frecuencias de una señal: a mayor ordenada en el espectro de Fourier, mayor importancia del armónico asociado.

El espectro de Amplitudes de Fourier para el caso de acelerogramas corresponde a la velocidad que alcanzaría una estructura sin amortiguamiento al final del movimiento; en cambio, el espectro de velocidades corresponde al valor máximo de la velocidad durante todo el movimiento. Por consiguiente, la velocidad espectral en estructuras sin amortiguamiento será siempre mayor a la ordenada correspondiente del espectro de amplitudes de Fourier.

La figura 5.46 muestra el espectro de velocidad para  $\xi=0$  en línea continua, junto con el espectro de amplitudes de Fourier en línea discontinua, para la señal del terremoto de Lima del 17 de octubre de 1966.



**Figura 5.46** Espectro de Amplitudes de Fourier y velocidad para  $\xi=0$ , señal Lima , 17-X-1966 - N82W, con  $a_{m\acute{a}x} = 180 \text{ cm/s}^2$

### Formato tripartito de espectros

Los espectros de desplazamientos, seudo aceleración y seudo velocidad se pueden representar en un solo gráfico en escalas logarítmicas con el eje horizontal en periodos o frecuencias: el eje vertical, para la seudo velocidad, y otros dos ejes, a 45 grados de los anteriores, para el desplazamiento y la seudo aceleración.

La figura 5.47 muestra el espectro tripartito para el registro de El Centro de 1940, con eje horizontal en periodos para 5 % de amortiguamiento.

Este formato permite comparar los valores espectrales con los valores pico del movimiento del suelo, los mismos que suelen representarse por trazos rectos que en la figura se indican como  $a_{\text{suelo}}$ ,  $v_{\text{suelo}}$  y  $d_{\text{suelo}}$ . Para el registro empleado, estos valores pico fueron  $a_{\text{suelo}} = 313 \text{ cm/seg}^2$ ,  $v_{\text{suelo}} = 35 \text{ cm/seg}$  y  $d_{\text{suelo}} = 18 \text{ cm}$ .

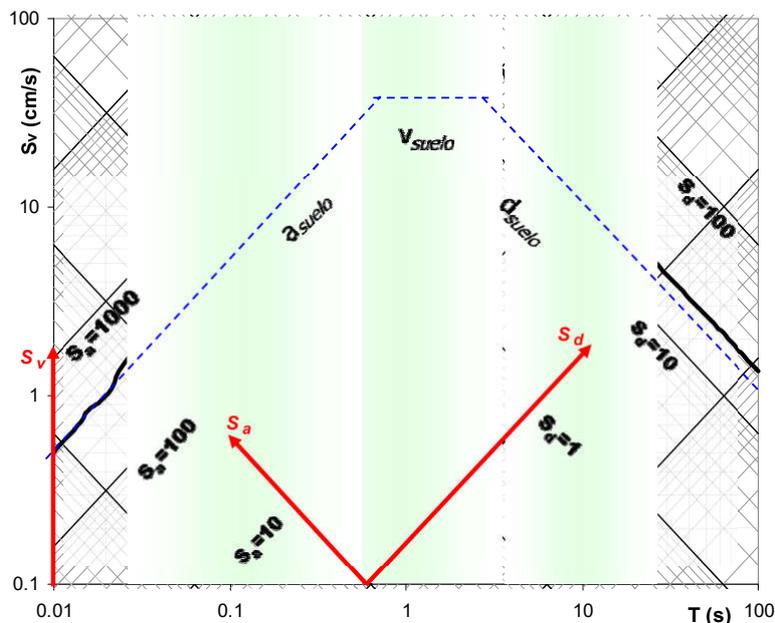


Figura 5.47 Espectro tripartito para la señal de El Centro 1940, EEUU

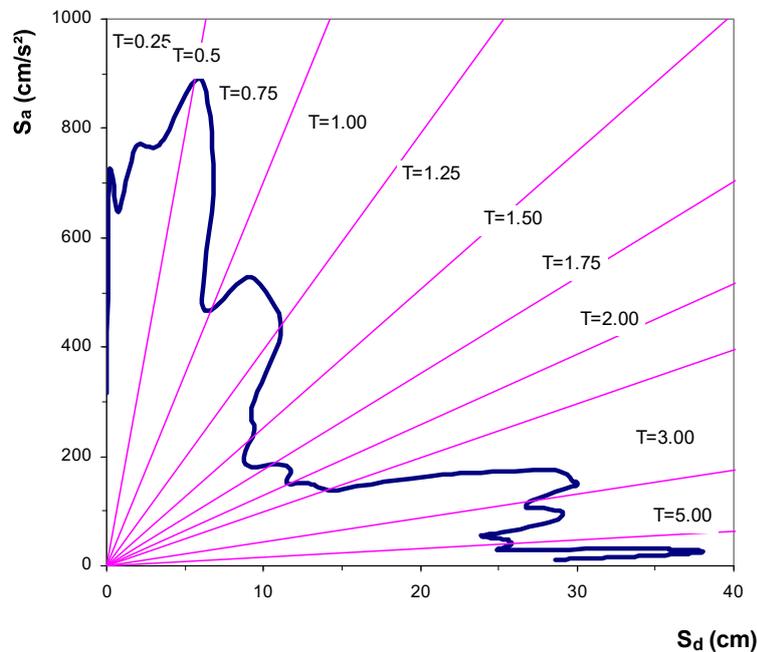
Debido a la tendencia de los espectros de aceleración y desplazamiento, para periodos muy cortos y muy largos, la curva espectral coincide con los trazos rectos inclinados de la aceleración y el desplazamiento pico del suelo. En el espectro de la figura 5.47, esto se produce para periodos menores a 0.03 seg (en la izquierda) y valores mayores a 20 seg (en la derecha).

En la región donde el espectro se separa de los trazos que representan el movimiento del suelo ( 0.03 a 20 seg en la figura 5.47), se identifican tres zonas con valores espectrales de tendencias bien definidas. La zona central, denominada zona de velocidades, se caracteriza por que la velocidad espectral es significativamente mayor a la velocidad pico del suelo. En la zona de aceleraciones (izquierda en la figura), la aceleración espectral supera la aceleración pico del suelo y en la zona de desplazamientos (derecha en la figura),  $S_d$  supera el desplazamiento pico del suelo.

### Formato desplazamiento-aceleración de espectros

El desplazamiento y la pseudo aceleración espectral pueden representarse simultáneamente en un solo espectro, con el eje horizontal para los desplazamientos ( $S_d$ ) y el eje vertical para las pseudo aceleraciones ( $S_a$ ). Los periodos estructurales se representan por rectas inclinadas que pasan por el origen. Este formato se denomina comúnmente espectro de demanda.

La figura 5.48 muestra el espectro de demanda para el acelerograma de El Centro de 1940, correspondiente a un amortiguamiento de 5 %.



**Figura 5.48** Espectro de demanda elástico para el registro de El Centro, 1940

La recta que pasa por el origen y un punto de la curva con coordenadas ( $S_d, S_a$ ) tiene por pendiente  $S_a/S_d = \omega^2 = 4 \pi^2 / T^2$ . Para obtener los valores espectrales correspondientes a un valor determinado de periodo, se determina la pendiente ( $4 \pi^2 / T^2$ ), se traza la recta y se obtiene el intercepto.

### 5.3.6. Respuesta espectral

Como se espera que ante sismos leves las estructuras se comporten dentro del rango elástico, lo más interesante de la respuesta ante estos sismos son los valores máximos del desplazamiento, la aceleración y la fuerza restitutiva.

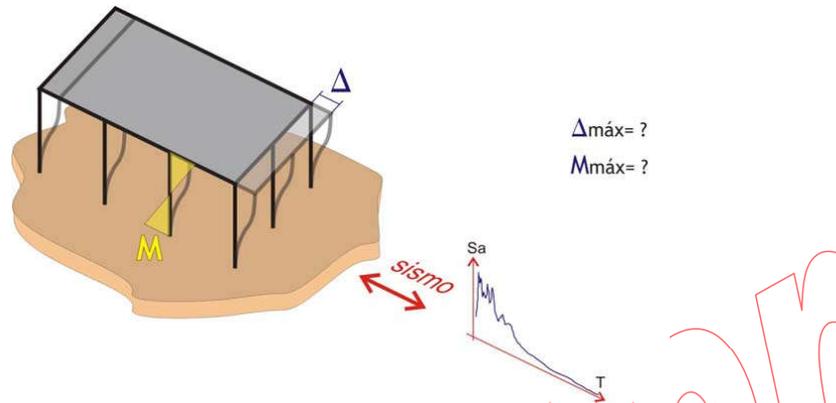


Figura 5.49 Respuesta espectral

Estos valores máximos de la respuesta elástica se pueden obtener de los espectros de respuesta conociendo el periodo y amortiguamiento de la estructura. Con el amortiguamiento estimado y la señal de aceleraciones, se elige el espectro y, con el periodo, se leen  $S_a$ ,  $S_v$  o  $S_d$ . La fuerza restitutiva máxima se puede calcular luego como:

$$F_R = m \cdot S_a \quad \text{ó} \quad F_R = K \cdot S_d$$

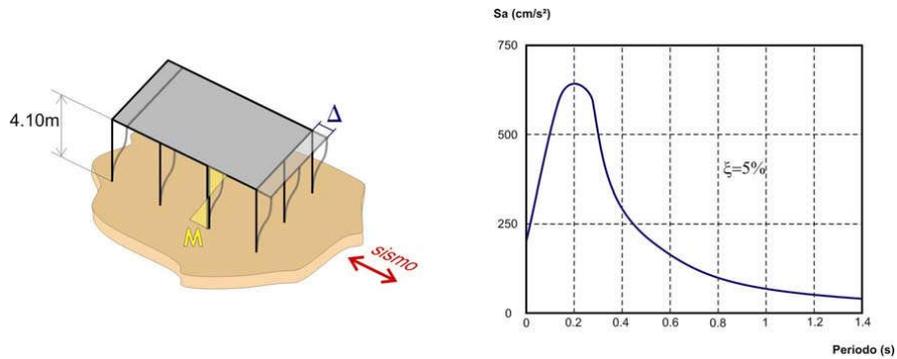
Finalmente, con la fuerza máxima sobre el sistema estructural, se desarrolla el análisis de fuerzas internas.

La figura 5.49 muestra una estructura de concreto armado ( $E=2.2 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$ ) formada por 12 columnas con un total de 400 ton de peso y un amortiguamiento estimado en 5 %, que se somete a un movimiento sísmico representado por el espectro mostrado. Las columnas son cuadradas de 0.4m de lado y 4.10m de altura. Suponiendo que las vigas son indeformables, se desea estimar los valores máximos del desplazamiento de la plataforma y el momento flector en la base de las columnas.

La rigidez lateral de la estructura es  $K = 12 \times 12 \times EI/H^3 = 9.81 \times 10^3 \text{ ton.m}^2$   
y la masa del sistema  $m = 400 / 9.81 = 40.77 \text{ ton.s}^2/\text{m}$

$$\text{Luego } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 0.4 \text{ s}$$

El espectro correspondiente a la señal y el amortiguamiento indicados se muestra en la figura 5.50.



**Figura 5.50 Espectro de seudo aceleración**

Con  $T=0.4$  seg., obtenemos del espectro el valor de la seudo aceleración espectral  $S_a = 260 \text{ cm/seg}^2$

Luego  $S_d = S_a / \omega^2 = 260 / 15.508^2 = 1.08 \text{ cm.}$  y

$$F_R = \text{Masa} \cdot S_a = (\text{Peso/g}) S_a = (400/981) \cdot 260 = 106 \text{ ton}$$

Luego, la fuerza cortante máxima en cada columna será  $V_{\text{col}} = 8.8 \text{ ton}$ , y el momento flector correspondiente  $M_r \text{ col} = 18 \text{ ton-m}$ .

Resuelva este ejercicio considerando vigas deformables de  $30 \times 60 \text{ cm}$ .

BORRADOR

### 5.3.7. Respuesta de sistemas continuos usando modelos de un grado de libertad

La figura 5.51 muestra dos estructuras y un estrato de suelo como ejemplos de sistemas de masa continua.

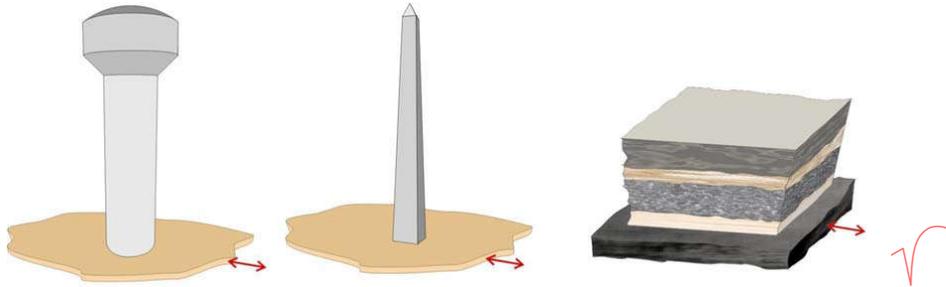


Figura 5.51 Sistemas de masa continua

La respuesta sísmica de estos sistemas se puede estimar usando modelos sencillos de un grado de libertad. En este acápite, se estudia la manera de representar estas estructuras mediante osciladores simples cuya respuesta se puede calcular usando los procedimientos presentados en los acápite anteriores.

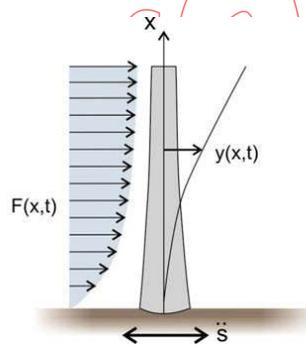


Figura 5.52 Modelo ideal de un sistema de propiedades continuas

La figura 5.52 muestra un instante en la respuesta de una estructura sometida a una aceleración del suelo,  $\ddot{s}$ , y una fuerza distribuida  $F(x,t)$ . Representaremos la masa distribuida por  $m(x)$  y supondremos que, en el caso más general, la estructura se encuentra unida a amortiguadores y resortes distribuidos que se representan por  $c(x)$  y  $k(x)$ , respectivamente.

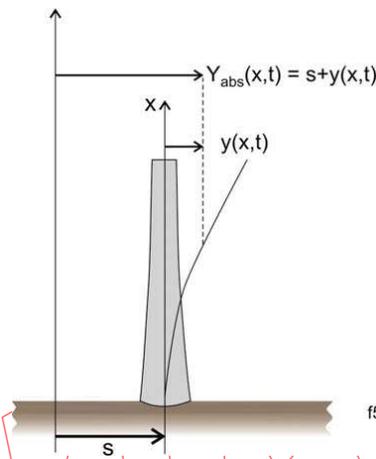
El desplazamiento de la estructura quedará determinado por el desplazamiento relativo al suelo de cada uno de sus puntos como funciones del tiempo:  $Y(x,t)$ .

Para poder tratar esta estructura mediante un modelo sencillo de un grado de libertad, debe suponerse que, durante el movimiento, la estructura tiene una configuración deformada ( $Y(x,t)$ ), que mantiene una forma constante ( $\Psi(x)$ ), la que es “afectada dinámicamente en el tiempo” por una función  $z(t)$ . Es decir, debemos suponer que:

$$Y(x,t) = \Psi(x) Z(t)$$

donde

$\Psi(x)$ : función de forma, que se asume constante en el tiempo  
 $z(t)$ : función que multiplica la forma con el tiempo



**Figura 5.53** Desplazamiento absoluto de la estructura

La figura 5.53 muestra un instante en que el desplazamiento del suelo se representó por  $s$  y el desplazamiento de la estructura respecto del suelo por  $y(x,t)$ . Entonces, el desplazamiento absoluto de cada punto de la estructura será:

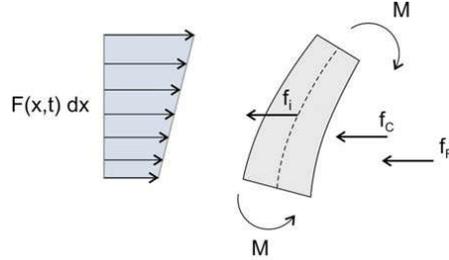
$$Y_{abs}(x,t) = S + \Psi(x) Z(t)$$

por consiguiente, la aceleración absoluta será:

$$\dot{Y}_{abs}(x,t) = \dot{S} + \Psi(x) \dot{Z}(t)$$

Bajo la suposición de que la estructura tiene una forma constante durante el movimiento, el problema se reduce a encontrar la función amplificadora en el tiempo  $z(t)$ .

Para tal efecto, consideremos el elemento diferencial mostrado en la figura 5.54.



**Figura 5.54 Equilibrio en el elemento diferencial de estructura**

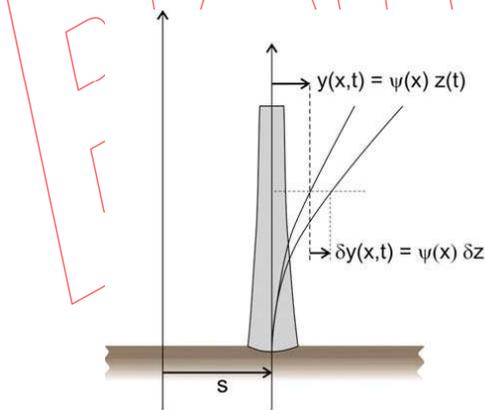
Las fuerzas que actúan sobre este elemento de longitud  $dx$  son los siguientes:

- fuerza externa :  $F(x,t) dx$
- fuerza de inercia :  $f_i = -m(x) dx \cdot \ddot{Y}_{abs}(x,t) = -m(x) (\psi(x)z(t) + s) \ddot{z}$
- fuerza de amortiguamiento :  $f_c = -c(x) \cdot dx \cdot \dot{Y}(x,t) = -c(x) \psi(x) \dot{z}(t) \cdot dx$
- y fuerza restitutiva:  $f_R = -k(x) \cdot dx \cdot Y(x,t) = -k(x) \psi(x) z(t) \cdot dx$
- M : fuerza interna (momento flector, fuerza cortante, etc.)

En cada instante, las primeras variaciones del trabajo y la energía interna son equivalentes (principio de desplazamientos virtuales), es decir:

$$\delta W = \delta U.$$

Para expresar esta equivalencia, consideremos un incremento virtual en la elástica de la estructura. Este incremento debe ser consistente con la suposición hecha respecto de la forma constante de la elástica; es decir, el incremento deberá definirse también como el producto de esta forma constante por un incremento en la coordenada  $z$ :  $\delta y = \psi(x) \delta z$  (Figura 5.55).



**Figura 5.55**

**Desplazamiento virtual compatible con la suposición de forma constante en el tiempo**

Calculemos luego el trabajo y la energía virtual asociados con cada una de las acciones externas y fuerzas internas.

### Trabajo virtual de las fuerzas externas $\delta WP$

$$\delta WP = \int F(x,t) \psi(x) \delta z = \delta z \cdot \int F(x,t) \psi(x) dx$$

En esta expresión, el trabajo de las fuerzas externas queda expresado como el producto del incremento virtual de desplazamiento  $\delta z$  y una fuerza equivalente única dada por la última integral. Esta fuerza se denomina Fuerza Generalizada y si la representamos por  $P^*$ , tendremos:

$$\delta WP = \delta z P^*$$

### Trabajo virtual de las fuerzas de inercia, $\delta WI$

$$\begin{aligned} \delta WI &= \int \ddot{\eta} \cdot \Psi(x) \delta z = \int -m(x)(\Psi(x)\ddot{z}(t) + \ddot{s}) dx \Psi(x) \delta z = \\ &= -\delta z \left( \int m(x)\Psi(x)^2 dx \right) \ddot{z}(t) - \delta z \left( \int m(x)\Psi(x) dx \right) \ddot{s}(t) \end{aligned}$$

La primera integral representa las características inerciales de la estructura, por lo que se denomina Masa Generalizada y se representa por  $M^*$ . En cambio, la segunda integral representa la masa de la estructura asociada con la aceleración del suelo, se denomina Masa Participante y se representa por  $L^*$ . Así, el trabajo virtual de las fuerzas de inercia queda ahora expresado como:

$$\delta WI = -\delta z M^* \ddot{z}(t) - \delta z L^* \ddot{s}$$

### Trabajo virtual de las fuerzas de amortiguamiento, $\delta Wc$

$$\delta Wc = \int f_C \cdot \Psi(x) \delta z = \int -c(x)\Psi(x)\dot{z}(t) dx \Psi(x) \delta z = -\delta z \left( \int c(x)\Psi^2(x) dx \right) \dot{z}$$

Esta integral representa la constante generalizada de amortiguamiento para la estructura, se denomina Amortiguamiento Generalizado y si se representa por  $C^*$  tendremos:

$$\delta Wc = -\delta z C^* \dot{z}(t)$$

### Trabajo virtual de las fuerzas restitutivas externas, $\delta Wk$

$$\delta Wk = \int f_R \cdot \Psi(x) \delta z = \int -k(x)\Psi(x)z(t) dx \Psi(x) \delta z = -\delta z \left( \int k(x)\Psi^2(x) dx \right) z$$

La última integral representa la contribución de las fuerzas restitutivas externas en la rigidez de la estructura. Representando esta integral por  $Ke^*$  tendremos:

$$\delta Wk = -\delta z Ke^* z$$

### Energía virtual interna, $\delta U$

La energía virtual se debe a la presencia de fuerzas internas como el momento flector, la fuerza cortante, la fuerza normal, etc. A manera de ejemplo, se considera a continuación la energía asociada con el momento flector  $M_f$ . Como el desplazamiento virtual de la estructura se ha representado por  $\delta Y(x,t) = \psi(x) \delta z(t)$ , entonces la curvatura virtual será:

$$C = \frac{d^2(\delta Y(x,t))}{dx^2} = \frac{d^2(\psi(x)\delta z(t))}{dx^2} = \psi''(x) \delta z$$

y, por tanto, la energía virtual:

$$\delta U = \int M \psi''(x) \delta z \, dx = \int EI(x) \psi''(x) z(t) \, dx \psi''(x) \delta z = \delta z \left( \int EI(x) \psi''^2(x) \, dx \right) z(t)$$

Esta integral representa la contribución de las propiedades elásticas de la estructura en la rigidez equivalente del sistema. Si se denomina a esta contribución  $K_u^*$  tendremos:

$$\delta U = \delta z \cdot K_u^* z(t)$$

Ahora bien, por el principio de trabajo virtual:

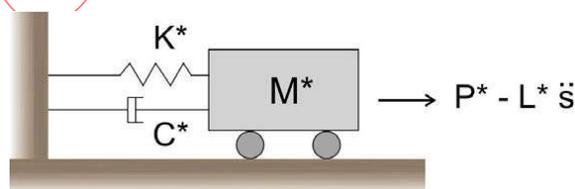
$$\delta W_i + \delta W_c + \delta W_k + \delta W_P = \delta U$$

sustituyendo en esta igualdad las expresiones encontradas para los trabajos y energía virtuales, y luego cancelando  $\delta z$  tendremos:

$$M^* \ddot{z} + C^* \dot{z} + K^* z = P^* - L^* \ddot{S}$$

donde  $K^* = K_e^* + K_u^*$  se denomina Rigidez Generalizada de la estructura.

Esta última ecuación corresponde a la de un oscilador simple cuyas características dinámicas son las propiedades generalizadas de la estructura, y las sollicitaciones externas son la carga generalizada y la aceleración del suelo multiplicada, no por la masa del oscilador equivalente, sino por la masa participante ( $L^*$ ).

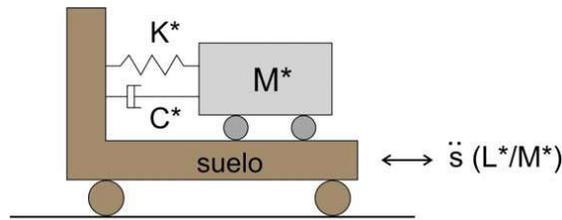


**Figura 5.56 Modelo para el estudio de una estructura de propiedades distribuidas**

Para el caso de respuesta sísmica ( $P^*=0$ ), dividiendo por  $M^*$  tendremos:

$$\ddot{z} + 2\xi \omega \dot{z} + \omega^2 z = -\left(\frac{L^*}{M^*}\right)\ddot{s}$$

En esta expresión el cociente  $(L^*/M^*)$  denominado “Factor de Participación”, afecta directamente la aceleración del suelo en la ecuación del oscilador equivalente y representa el efecto que tiene la distribución de masas en la aceleración basal del oscilador equivalente. Por lo general,  $L^*/M^* \neq 1$ .



**Figura 5.57 Modelo para una estructura con propiedades distribuidas sometida a aceleración en su base**

Para el caso de estructuras con propiedades distribuidas y también concentradas en puntos discretos ( $x_i$ ), las características dinámicas del oscilador equivalente se obtiene por las siguientes expresiones:

Carga Generalizada:  $P^* = \int F(x, t)\psi(x)dx + \sum F_i\psi(x_i)$

Masa Generalizada:  $M^* = \int m(x)\psi^2(x)dx + \sum M_i \cdot \psi^2(x_i)$

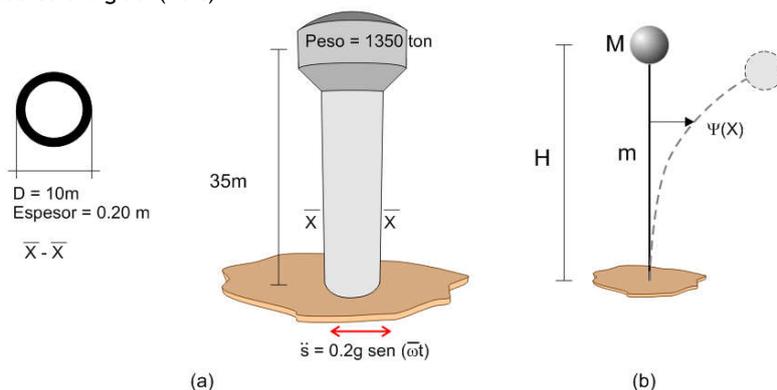
Masa Participante:  $L^* = \int m(x)\Psi(x)dx + \sum M_i \Psi_i(x_i)$

Amortiguamiento Generalizado:  $C^* = \int_0^h C(x)\Psi^2(x)dx + \sum C_i \Psi^2(x_i)$

Rigidez Generalizada:  $K^* = \int EI(\Psi''(x))^2 dx + \int K(x)(\Psi(x))^2 dx + \sum K_i \Psi^2(x_i)$

El ejemplo que sigue muestra cómo estimar la respuesta máxima de una estructura de masa distribuida y sometida a una aceleración armónica en su base.

Se trata de una estructura de concreto armado ( $E=2.2 \times 10^6$  ton /m<sup>2</sup>,  $\gamma=2.4$  ton/m<sup>3</sup>) formada por un soporte cilíndrico hueco que se considera como masa distribuida y por un depósito que junto con su contenido pesan 1350 ton y se considera como masa concentrada. La rigidez del sistema está dada exclusivamente por la rigidez del elemento de soporte y se asume un amortiguamiento del 5 %. La aceleración en la base es  $0.2 g \sin(10 t)$ .



**Figura 5.58 (a) Estructura de almacenamiento con fuste hueco y masa concentrada en la parte superior (b) Modelo**

Se asume la forma  $\psi(x) = 1 - \cos(\pi x / (2 H))$ . Esta forma tiene la ventaja de estar normalizada a la unidad en la parte superior ( $\psi(H) = 1$ ); de este modo, la respuesta máxima del oscilador equivalente constituye directamente el desplazamiento máximo en este nivel de la estructura.

A continuación, se calculan los parámetros generalizados del sistema. La masa puntual se representa por  $M$  y la masa distribuida por  $m$ .

$$L^* = \int_0^H m(x)\psi(x)dx + \sum M_i \psi(x_i) = \int_0^H m \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \right) dx + M\psi(H) =$$

$$= mH \left( \frac{\pi - 2}{\pi} \right) + M(1) = 0.3634 mH + M$$

Esta expresión indica que solo el 36 % de la masa del fuste ( $m H$ ) pasará a constituir la masa participante de oscilador equivalente.

$$M^* = \int_0^H m(x)\psi^2(x)dx + \sum M_i \cdot \psi^2(x_i) = \int_0^H m \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \right)^2 dx + M\psi^2(H) =$$

$$= mH \left( \frac{3\pi - 8}{2\pi} \right) + M(1)^2 = 0.2268 mH + M$$

De igual manera, según la expresión anterior, solo el 22 % de la masa del fuste pasará a constituir la masa generalizada del modelo.

Como ya se indicó, la rigidez generalizada del sistema está dada exclusivamente por la rigidez del fuste. Para este ejemplo, solo se consideran deformaciones por flexión, por lo que la rigidez generalizada se calcula como:

$$K^* = \int EI (\Psi''(x))^2 dx = \int_0^H EI \left( \frac{\pi^2}{4H^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{H^3}$$

Al ser la sollicitación un armónico en la base, la ecuación de equilibrio dinámico quedará expresada como:

$$M^* \ddot{z} + C^* \dot{z} + K^* z = -L^* \ddot{S} = -L^* 0.2g \text{sen}(10 t)$$

Esta ecuación se puede interpretar como la de un oscilador de masa puntual  $M^*$  sometido a una carga armónica de la forma  $P_o \text{sen}(10 t)$ , donde  $P_o = L^* 0.2 g$ . Por tanto, la respuesta del oscilador será:

$$z(t) = \frac{P_o}{K^*} D \text{sen}(\omega t - \Phi) = \frac{L^* (0.2g)}{K^*} D \text{sen}(\omega t - \Phi)$$

Donde  $D$  representa el factor de amplificación de la respuesta dinámica respecto del desplazamiento estático  $\delta_{\text{est}} = P_o/K$

Reemplazando valores en las expresiones encontradas tendremos:

$$L^* = 156.77 \text{ ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m}, \quad M^* = 149.57 \text{ ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m} \quad \text{y} \quad K^* = 11550.93 \text{ ton}/\text{m}$$

Luego,  $\omega = 8.78 \text{ rad/seg}$  y para  $\xi = 0.05$  se obtiene  $D = 3.164$  y  $\phi = 2.773 \text{ rad}$ .

Asimismo,  $P_o = L^* (0.2 \times 9.81) = 307.59 \text{ ton}$  y, por tanto,  $\delta_{\text{est}} = 2.66 \text{ cm}$ .

Finalmente, el desplazamiento de respuesta en la parte superior del modelo ( $x=H$ ) será:

$$z(t) = 8.42 \text{ sen}(10 t - 2.77) \text{ cm}$$

Y el correspondiente a puntos intermedios se podrá estimar como:

$$Y(x,t) = \Psi(x) * z(t)$$

### 5.3.8. Respuesta espectral de estructuras de masa distribuida usando modelos de un grado de libertad

Como se recordará, la ecuación del movimiento para un grupo de estructuras de masa puntual con igual periodo y amortiguamiento, sometidas al movimiento del suelo, es la siguiente:

$$\ddot{v} + 2\xi\omega\dot{v} + \omega^2v = -\ddot{s}$$

Para el caso de estructuras de masa distribuida, la respuesta sísmica se puede estimar mediante modelos de un grado de libertad, asumiendo que la estructura mantiene una forma de vibración constante, la misma que, por comodidad, se normaliza a la unidad en el punto de mayor movimiento. Así, como representación de la estructura de masa distribuida, se obtiene un oscilador de masa puntual que conduce a la siguiente ecuación:

$$\ddot{z} + 2\xi\omega\dot{z} + \omega^2z = -\left(\frac{L^*}{M^*}\right)\ddot{s}$$

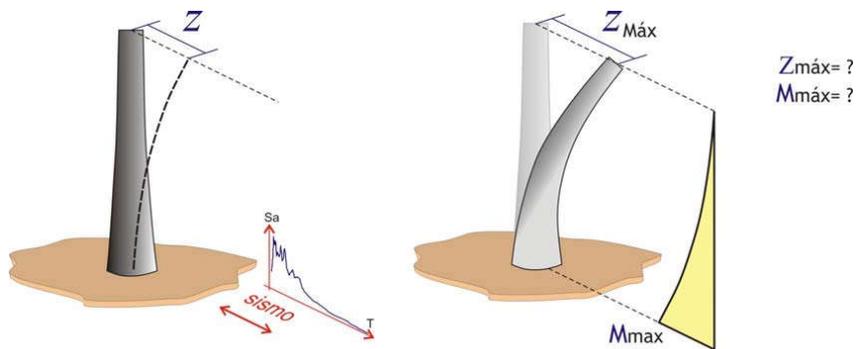
En esta ecuación, la coordenada  $z$  representa el desplazamiento del oscilador de masa puntual y también el desplazamiento de la estructura en el punto donde la forma está normalizada. Se aprecia que la aceleración en la base del oscilador equivalente es igual al producto del factor de participación ( $L^*/M^*$ ) por la aceleración actuante en la base de la estructura de masa distribuida.

Comparando estas dos ecuaciones, podemos ver que la respuesta de una estructura de masa puntual ( $v$ ) y la respuesta de una estructura de igual periodo, pero de propiedades distribuidas, ( $z$ ) se relacionan como:

$$z(t) = (L^*/M^*)v(t)$$

Por tanto, la respuesta máxima de la estructura de propiedades distribuidas se puede estimar como el producto del factor de participación ( $L^*/M^*$ ) y los valores espectrales correspondientes al periodo del oscilador equivalente ( $S_a$ ,  $S_v$ ,  $S_d$ )

$$z_{MÁX} = \left(\frac{L^*}{M^*}\right)S_d$$
$$\dot{z}_{MÁX} = \left(\frac{L^*}{M^*}\right)S_v$$



**Figura 5.59 Estructura de masa distribuida sometida a espectro de aceleraciones**

Consecuentemente, la aceleración máxima en un punto genérico de la estructura será:

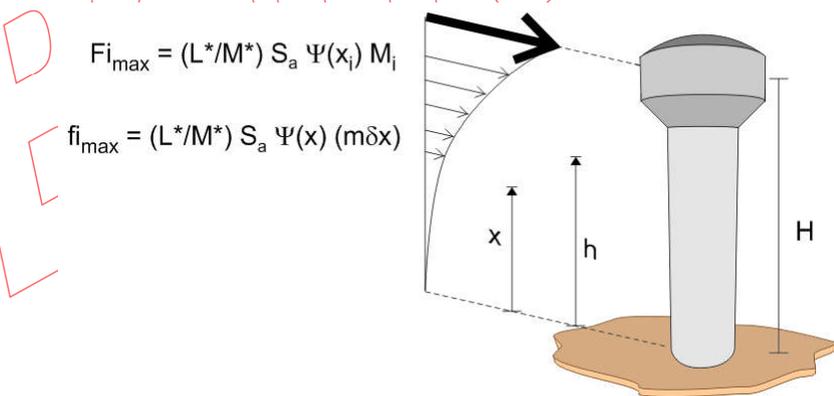
$$\dot{Y}_{MÁX}(x) = \left( L^* / M^* \right) S_a \Psi(x)$$

y, por tanto, las fuerzas de inercia máximas distribuidas ( $f_i$ ) y las fuerzas máximas puntuales (FI) tendrán por expresión:

$$\dot{f}_{iMÁX}(x) = \dot{Y}_{MÁX}(x) m(x) dx = \left( L^* / M^* \right) S_a \Psi(x) m(x) dx$$

$$FI_{MÁX} = \left( L^* / M^* \right) S_a \Psi(x_i) M_i$$

Estas fuerzas se pueden usar luego como fuerzas externas aplicadas a la estructura para desarrollar el análisis de esfuerzos.



**Figura 5.60 Fuerzas de Inercia correspondientes a la respuesta máxima**

Para la estructura mostrada en la figura, la fuerza cortante (V) a una altura “h” se puede estimar por la siguiente expresión:

$$V(h) = \int_h^H \hat{f}_i(x) dx + \sum_{\text{fuerzas sobre la altura } h} FI_i =$$

$$= \left( L^*/M^* \right) S_a \left( \int_h^H \Psi(x) m(x) dx + \sum_{\text{masas sobre la altura } h} \Psi(x_i) M_i \right)$$

Consecuentemente, la fuerza cortante en la base se obtendrá haciendo en esta expresión h=0. Entonces, el último factor, entre paréntesis, se convertirá en la masa participante (L\*) y la fuerza cortante en la base se podrá estimar como:

$$V_{base} = \left( L^*/M^* \right) S_a$$

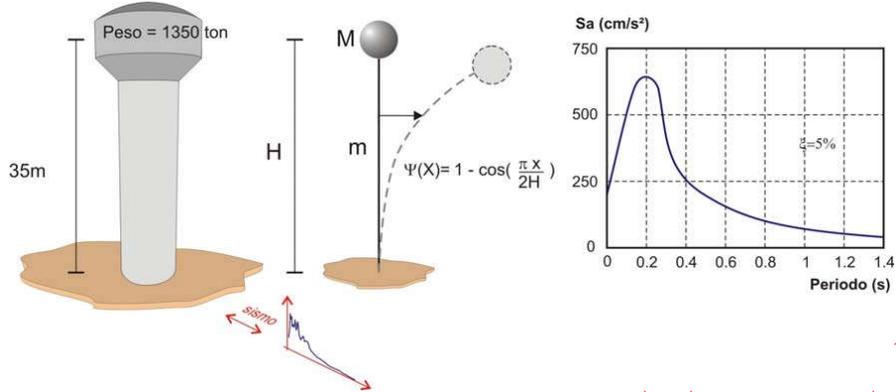
El cociente (L\*/M\*) se denomina **masa efectiva** y se interpreta como la parte de la masa total que reacciona como masa puntual a la aceleración en la base.

De manera similar, el momento volcante en función de la altura se puede estimar como:

$$Mv(h) = \int_h^H \hat{f}_i(x) (x-h) dx + \sum_{\text{fuerzas sobre la altura } h} FI_i (x_i - h) =$$

$$= \left( L^*/M^* \right) S_a \left( \int_h^H \Psi(x) m(x) (x-h) dx + \sum_{\text{masas sobre la altura } h} \Psi(x_i) M_i (x_i - h) \right)$$

A manera de ejemplo, a continuación se estima la respuesta de la estructura de concreto del ejemplo anterior al espectro mostrado.



**Figura 5.61** Respuesta espectral de una estructura de masa distribuida y espectro suavizado

Para la forma de vibración asumida, se obtienen los siguientes parámetros generalizados del oscilador equivalente:

$$K^* = 11550.92 \text{ ton / m}, \quad M^* = 149.57 \text{ ton seg}^2/\text{m} \quad \text{y} \quad L^* = 156.77 \text{ ton seg}^2/\text{m}$$

$$\text{luego } \omega = 8.79 \text{ rad / seg} \quad \text{y por tanto } T = 0.715 \text{ seg.}$$

Con el periodo de la estructura,  $T = 0.715 \text{ seg.}$  obtenemos del espectro:

$$S_a = 125 \text{ cm/seg}^2 \quad \text{y por tanto } S_d = 1.62 \text{ cm.}$$

Luego, los valores máximos de la aceleración y el desplazamiento del oscilador equivalente, y también de la estructura en su parte más elevada serán:

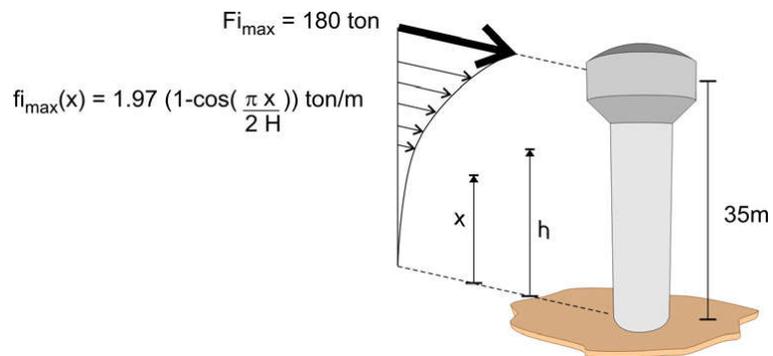
$$\dot{Z}_{MÁX} = (L^* / M^*) S_a = 131 \text{ cm / seg}^2$$

$$Z_{MÁX} = (L^* / M^*) S_d = 1.7 \text{ cm.}$$

Por tanto, la aceleración máxima a lo largo de la estructura será:

$$\dot{Y}_{MÁX} = z_{MÁX} \dot{Z} = 131.02 \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \right)$$

Y las fuerzas máximas de inercia serán las indicadas en la siguiente figura:



**Figura 5.62** Fuerzas de Inercia correspondientes a la respuesta espectral

Consecuentemente, la fuerza cortante en la base será  $V_{\text{base}} = 205 \text{ ton}$ , lo que representa el 11 % del peso total de la estructura. Como ejercicio, establezca una expresión general para la fuerza cortante y el momento volcante a una altura “h” sobre el suelo.

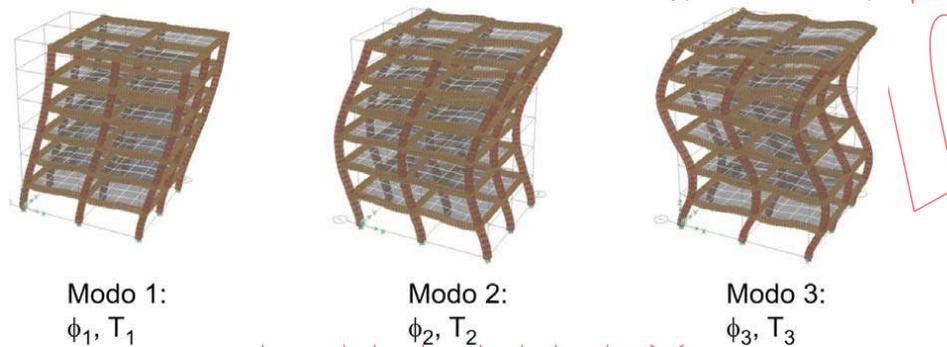
Borrador

### 5.3.9. Modo fundamental de vibración

Como se recordará, el periodo de vibración de una estructura es el tiempo que tarda en completar un ciclo en vibración libre. A pesar de que este parámetro es característico de la respuesta en vibración libre, su valor condiciona en buena medida la respuesta estructural frente a muchas sollicitaciones dinámicas, como es el caso de los sismos.

Una estructura de masa distribuida, o con varias masas puntuales, puede mantenerse en vibración libre adoptando muchas formas, a cada una de las cuales corresponde un periodo de vibración. Una forma y el periodo asociado constituyen en conjunto un modo de vibración.

La figura 5.63 muestra los tres primeros modos de vibración de un edificio simétrico de seis pisos para un análisis traslacional en la dirección de simetría.



**Figura 5.63 Modos de vibración traslacional de un edificio de seis pisos**

Aunque la respuesta elástica de las estructuras se puede interpretar como una superposición en el tiempo del efecto de varios modos de vibración, existe un modo con mayor influencia para cada dirección que se analiza. Este modo se denomina el modo fundamental.

Para el análisis traslacional de un edificio, el periodo fundamental es el de mayor valor y la forma respectiva se caracteriza por ser creciente con la altura, como se aprecia en la figura anterior.

A continuación, se desarrollan algunos procedimientos para estimar el periodo fundamental de vibración de estructuras de masa distribuida. Estos procedimientos se basan en el método de Rayleigh para el análisis de estructuras sin amortiguamiento y en vibración libre.

### El método de Rayleigh para una estructura de masa concentrada

Como introducción a los métodos propios de estructuras con propiedades distribuidas, se trata a continuación el caso de una estructura de masa concentrada en vibración libre.

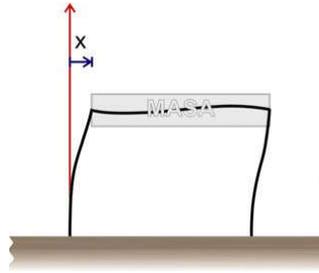


Figura 5.64 Estructura de masa concentrada en vibración libre

En cualquier instante, la suma de las energías potencial ( $E_p$ ) y cinética ( $E_c$ ) es una constante, es decir:

$$E_p + E_c = E = \text{Constante}$$

Como  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$  y  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

La condición de conservación de energía quedará expresada como:

$$\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E$$

Como la estructura está en vibración libre sin amortiguamiento, el desplazamiento y la velocidad se determinan por las siguientes expresiones:

$$x = x_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad \dot{x} = \omega x_0 \text{ cos } \omega t$$

Por tanto,  $E_p = \frac{1}{2} k x_0^2 \text{ sen}^2(\omega t)$  y  $E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \text{ cos}^2(\omega t)$

La energía potencial es máxima cuando  $x$  alcanza su mayor valor. Según las expresiones anteriores, cuando  $x$  toma su valor máximo, la velocidad es nula ( $\dot{x}=0$ ) y, consecuentemente, también la energía cinética se hace nula en ese instante. Por tanto, en el instante de máximo desplazamiento tendremos que:

$$E_{P \text{ MAX}} = \frac{1}{2} k x_0^2 + 0 = E$$

Es decir, en el instante de máximo desplazamiento, la energía potencial es máxima e igual a la energía total almacenada en el sistema.

De igual manera, la energía cinética es máxima cuando la velocidad alcanza su mayor valor. En ese instante, el desplazamiento es nulo y también la energía potencial; entonces:

$$E_{C \text{ MAX}} = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 + 0 = E$$

Como los máximos de ambas energías son iguales a la energía total del sistema, igualando las dos expresiones anteriores tendremos:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

de donde, finalmente, tendremos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siguiendo este principio de igualdad de energías máximas, a continuación se desarrollan procedimientos para el caso de estructuras de masa y rigidez distribuidas.

### Método de Rayleigh para sistemas de masa y rigidez distribuidos

Para estimar el periodo fundamental de una estructura de propiedades continuas asumimos que, cuando el sistema está en vibración libre, mantiene una forma constante ( $\psi(x)$ ) cuya amplitud se modifica en el tiempo por la función armónica  $z(t)$ .

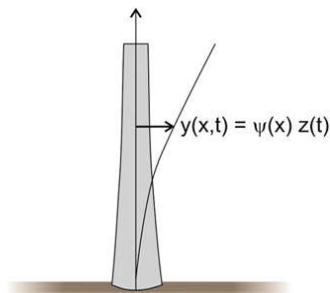


Figura 5.65 Estructura de masa distribuida en vibración libre

Como se muestra en la figura, el desplazamiento queda expresado por  $y(x,t) = \Psi(x) z(t)$  y, por lo tanto, la velocidad será  $\dot{y}(x,t) = \Psi(x) \dot{z}(t)$

La energía cinética asociada con un diferencial de estructura como el mostrado en la figura será:

$$dE_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 dx$$

Luego, sustituyendo la expresión para la velocidad e integrando tendremos:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{z}^2(t) \int m(x) \Psi^2(x) dx$$

La energía potencial corresponde, por un lado, al trabajo de los resortes distribuidos que podría tener el sistema ( $k(x)$ ) y, por otro, a la energía de deformación interna de la propia estructura. A manera de ejemplo, a continuación se considera solo la contribución de la energía de deformación por flexión.

En este caso, el diferencial de energía potencial será:

$$dE_p = \frac{1}{2} k(x) y^2(x,t) dx + \frac{1}{2} EI y''^2 dx$$

Como se ha supuesto que el desplazamiento viene dado por:

$$y(x,t) = \Psi(x) z(t)$$

entonces, la curvatura correspondiente será:

$$y''(x,t) = \Psi''(x) z(t)$$

por tanto, sustituyendo estas expresiones e integrando tendremos:

$$\begin{aligned}
 Ep &= \frac{1}{2} \int k(x) z^2(t) \Psi^2(x) dx + \frac{1}{2} \int EI z^2(t) \Psi''^2(x) dx = \\
 &= \frac{z^2(t)}{2} \int k(x) \Psi^2(x) dx + \frac{z^2(t)}{2} \int EI \Psi''^2(x) dx = \\
 &= \frac{z^2(t)}{2} \left\{ \int k(x) \Psi^2(x) dx + \int EI \Psi''^2(x) dx \right\}
 \end{aligned}$$

Como la estructura está en vibración libre entonces:

$$z(t) = z_0 \sin \omega t \quad \text{y} \quad \dot{z}(t) = z_0 \omega \cos \omega t$$

Por tanto, las energías cinética y potencial en cada instante serán:

$$\begin{aligned}
 Ec &= \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \int m(x) \Psi^2(x) dx \\
 Ep &= \frac{1}{2} z_0^2 \sin^2(\omega t) \left\{ \int k(x) \Psi^2(x) dx + \int EI (\Psi''(x))^2 dx \right\}
 \end{aligned}$$

y los correspondientes máximos:

$$\begin{aligned}
 Ec_{MAX} &= \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int m(x) \Psi^2(x) dx \\
 Ep_{MAX} &= \frac{1}{2} z_0^2 \left\{ \int k(x) \Psi^2(x) dx + \int EI (\Psi''(x))^2 dx \right\}
 \end{aligned}$$

Igualando luego los máximos respectivos tendremos:

$$\omega^2 = \frac{\left\{ \int k(x) \Psi^2(x) dx + \int EI [\Psi''(x)]^2 dx \right\}}{\int m(x) [\Psi(x)]^2 dx}$$

En la expresión anterior, el dividendo y el divisor corresponden a la rigidez generalizada y a la masa generalizada de la estructura:

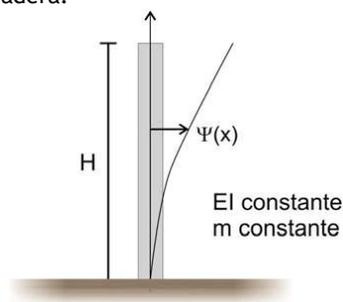
$$K^* = \int k(x) \Psi^2(x) dx + \int EI [\Psi''(x)]^2 dx \quad M^* = \int m(x) [\Psi(x)]^2 dx$$

Finalmente :

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$$

### Elección de la forma de vibración

La figura muestra el esquema de una chimenea de sección constante junto con una forma genérica asumida para calcular el periodo fundamental de vibración. Para cada forma que se asuma ( $\psi(x)$ ), se obtendrá un valor estimado del periodo fundamental. En este acápite, se estudia el efecto de la forma asumida en el valor del periodo de vibración que se obtiene y se indica, además, cómo reconocer una forma de vibración verdadera.



**Figura 5.66 Chimenea de sección constante y forma de vibración genérica**

Por tratarse de una estructura de sección constante, la masa por unidad de longitud será constante ( $m$ ). La rigidez generalizada estará dada por la rigidez a flexión de la sección transversal ( $EI$ ).

Asumiendo, por ejemplo, una forma de vibración parabólica  $y(x) = (x/H)^2$ , obtenemos como parámetros generalizados:

$$M^* = \int_0^H m [\Psi(x)]^2 dx = \int_0^H m \left(\frac{x}{H}\right)^2 dx = \frac{mH}{5}$$

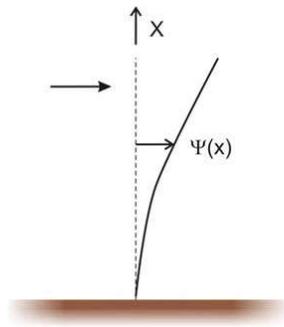
$$K^* = \int_0^H EI [\Psi''(x)]^2 dx = \int_0^H EI \left(2/H^2\right)^2 dx = \frac{4EI}{H^3}$$

Luego,

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{(4EI/H^3)}{(mH/5)}} = \sqrt{20} \sqrt{EI/mH^4} = 4.472 \sqrt{EI/mH^4}$$

$$\text{entonces } T = 1.405 \sqrt{mH^4/EI}$$

Podríamos pensar ahora en emplear como forma asumida, la elástica de la chimenea producida por una carga puntual aplicada en el extremo superior. La figura 5.67 muestra esta elástica normalizada a uno en la parte superior, junto con el valor del periodo encontrado.



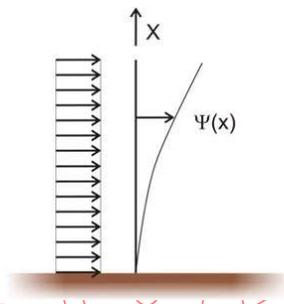
$$\psi(x) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{H}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{H}\right)^3$$

$$\Rightarrow T = 1.761\sqrt{mH^4/EI}$$

**Figura 5.67** Periodo obtenido usando la forma correspondiente a una carga puntual en el extremo superior

Como se aprecia, usando la elástica de carga puntual se obtiene una frecuencia menor que la correspondiente a la forma parabólica.

Veamos, ahora, qué valor encontramos asumiendo como forma la elástica correspondiente a una carga uniformemente distribuida normalizada también a la unidad en la parte superior.

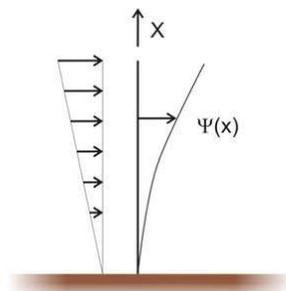


$$\psi(x) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{H}\right)^2 \left[ 6 - 4\left(\frac{x}{H}\right) + \left(\frac{x}{H}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow T = 1.7799\sqrt{mH^4/EI}$$

**Figura 5.68** Periodo obtenido usando la forma correspondiente a carga uniformemente distribuida en la altura

Finalmente, veamos los resultados de emplear la elástica normalizada correspondiente a una carga triangular como se muestra en la figura 5.69.



$$\psi(x) = (1/11) \left( \frac{x}{H} \right)^2 \left[ 20 - 10 \left( \frac{x}{H} \right) + \left( \frac{x}{H} \right)^3 \right]$$

$$\Rightarrow T = 1.786 \sqrt{mH^4 / EI}$$

**Figura 5.69** Periodo obtenido usando la forma correspondiente a una carga triangular

Vemos que el valor de la frecuencia obtenido empleando la forma triangular es menor aún que el valor correspondiente a la forma de carga uniforme. Deseamos ahora conocer cuál de estos valores se aproxima mejor al período fundamental que se desea determinar.

Si pensamos en el movimiento de esta estructura en vibración libre, resulta natural imaginar que las mayores amplitudes de oscilación se producirán en la parte superior y, por tanto, las fuerzas de inercia serán crecientes con la altura. Si conociéramos estas fuerzas de inercia como función de la altura ( $f_i(x)$ ), éstas se podrían aplicar a la estructura para deducir la elástica correspondiente y, así, obtener la real forma de vibración ( $\psi_{real}(x)$ ). Sin embargo, estas fuerzas de inercia ( $f_i$ ) son a su vez dependientes de la elástica, ya que  $f_{i,real}(x) = m(\psi_{real}(x) \omega^2 z)$ . Se trata, pues, de un problema de ecuaciones diferenciales cuya solución conduce a una "forma real" de vibración.

Se puede reconocer que una elástica constituye una forma real de vibración cuando se ha obtenido de aplicar un sistema de fuerzas de inercia que, a su vez, se calculó multiplicando la forma misma por las masas del sistema.

Para el ejemplo de la chimenea, la forma real y la frecuencia circular son

$$\psi_{real}(x) = \cosh(\beta x) - \cos(\beta x) - \frac{\cosh(\beta H) - \cos(\beta H)}{\sinh(\beta H) - \sin(\beta H)} (\sinh(\beta x) - \sin(\beta x))$$

$$\text{donde } \beta H = 1.8751$$

$$\omega_{real} = 1.875^2 \sqrt{EI / mH^4} = 3.516 \sqrt{EI / mH^4}$$

$$T_{real} = 1.787 \sqrt{mH^4 / EI}$$

La tabla 5.3 muestra las discrepancias entre el periodo real y los valores obtenidos con las cuatro formas aproximadas.

**Tabla 5.3 Forma de vibración asumida y Periodo**

Forma asumida	Error = $(T-T_{real})/T_{real} \times 100$
Parabólica	-21.38
Correspondiente a carga puntual en el extremo	- 1.5
Correspondiente a carga uniformemente distribuida en altura	- 0.4
Correspondiente a carga triangular con vértice en el suelo	- 0.1

Los resultados muestran que para cualquier forma asumida se obtiene un valor del periodo menor que el real. Esto se debe a que, al forzar la estructura a adoptar la forma asumida, se están aplicando fuerzas adicionales que la hacen artificialmente más rígida y, por consiguiente, con un periodo de vibración menor.

De todas las elásticas aproximadas que se emplearon, la mejor estimación del periodo se obtuvo con la elástica correspondiente a la carga triangular. Esto se debe a que las fuerzas de inercia reales tienen una forma similar a esta distribución de cargas.

La mayor discrepancia en el periodo corresponde a la forma parabólica, ya que ésta proviene de la aplicación de un momento flector en el extremo superior, lo cual no guarda ningún parecido con el sistema de fuerzas de inercia.

La elástica proveniente de una carga puntual proporciona un valor muy cercano al real (1.5% de discrepancia). Esto, a pesar de provenir de un sistema de cargas no muy parecido al de las "fuerzas reales de inercia". Las elásticas correspondientes a carga uniforme y carga triangular dan excelentes resultados. Para fines prácticos, cualquiera de los tres últimos resultados es adecuado.

Como ejercicio, estime el periodo de vibración de la estructura del ejemplo anterior, usando la forma  $\psi(x) = 1 - \cos(\pi x / 2 H)$  y comente.

### Periodo fundamental de vibración para estructuras de masas discretas

Para determinar el periodo fundamental de una estructura de masas puntuales, es necesario asumir una forma de vibración que permanece constante en el tiempo. Esta forma se expresa mediante un vector ( $\phi$ ) en el que cada uno de sus términos representa el desplazamiento de cada masa puntual.

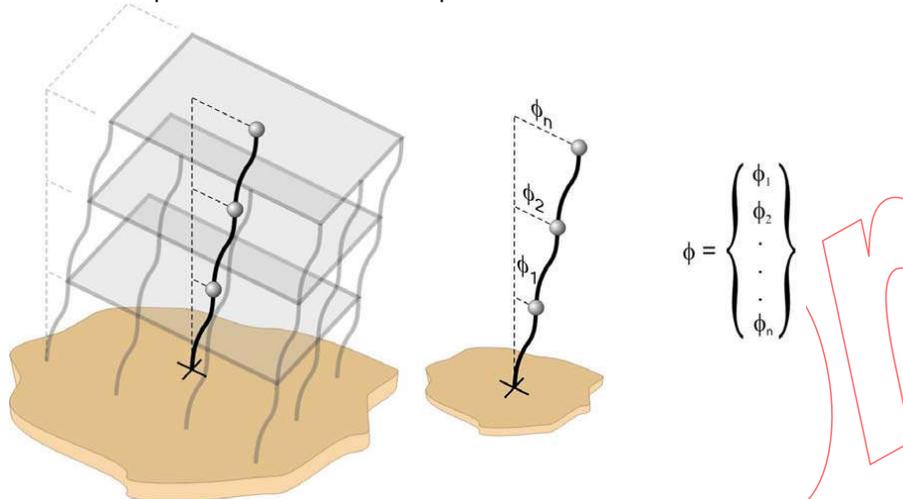


Figura 5.70 Estructura de masas concentradas y forma asumida

De este modo, el desplazamiento de la estructura en vibración libre se representará por un vector,  $Y$ , que es igual al producto de una función armónica en el tiempo  $Z(t)$  y la forma constante, es decir

$$Y(t) = z_0 \text{sen}(\omega t) \cdot \phi(x)$$

Por tanto, la velocidad de la estructura será:

$$\dot{Y}(t) = z_0 \omega \cos(\omega t) \cdot \phi(x)$$

En cada instante del movimiento, la energía cinética de las masas puntuales se evalúa como:

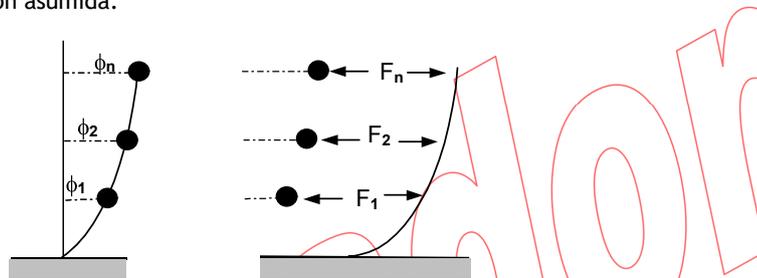
$$Ec = \sum \frac{1}{2} M_i \dot{Y}_i^2 = \sum \frac{1}{2} M_i \phi_i^2 \dot{z}(t)^2 = z_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sum \frac{1}{2} M_i \phi_i^2$$

y el valor máximo de esta energía será:  $E_{c_{MAX}} = z_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \left( \sum M_i \phi_i^2 \right)$

En todo instante del movimiento, la estructura está deformada por las fuerzas de inercia que recibe. Estas fuerzas se aplican exclusivamente en las posiciones de las masas puntuales y, por tanto, para evaluar la energía de deformación interna, puede emplearse las fuerzas actuantes y los respectivos desplazamientos.

En cada instante del movimiento, si se conocen los desplazamientos (vector  $Y$ ) es posible determinar las fuerzas ( $Q$ ) que lo producen (simbólicamente  $Q = K Y$ ).

La figura 5.71 muestra la estructura con una configuración deformada igual a la forma de vibración asumida.



**Figura 5.71 Forma asumida y fuerzas elásticas correspondientes**

Si representamos por  $F_1, F_2, F_n$  a las fuerzas que producen un estado deformado igual a la forma de vibración asumida, entonces las fuerzas correspondientes al instante de máximo desplazamiento serán:

$$Q_1 = z_0 F_1, \dots Q_2 = z_0 F_2, \dots Q_n = z_0 F_n,$$

Por tanto, la energía potencial máxima será:

$$E_{P_{MAX}} = \sum \frac{1}{2} Q_i Y_i = \sum \frac{1}{2} z_0 F_i z_0 \phi_i = z_0^2 \frac{1}{2} \sum F_i \phi_i$$

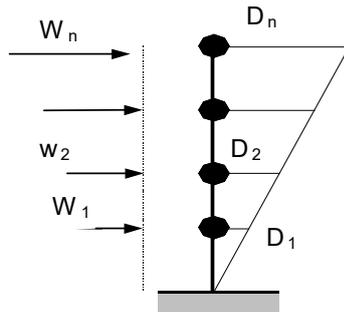
Finalmente, igualando los máximos de ambas energías obtenemos las siguientes expresiones para la frecuencia circular y el periodo de vibración:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum F_i \phi_i}{\sum M_i \phi_i^2}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum M_i \phi_i^2}{\sum F_i \phi_i}}$$

Como se señaló,  $F_1, F_2, \dots F_n$  son las fuerzas que aplicadas simultáneamente producen los desplazamientos  $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n$ .

**Método de deflexión estática**

Es frecuente trabajar con formas de vibración que se obtienen al aplicar a la estructura un determinado sistema de fuerzas. Por ejemplo, se podría usar como sistema de fuerzas los pesos de las masas concentradas  $W_1, W_2, \dots W_n$ .



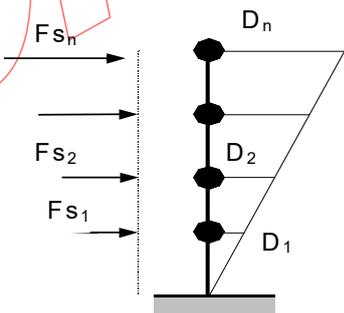
**Figura 5.72 Forma de vibración derivada del peso propio**

Si denotamos los desplazamientos por  $D_1, D_2, \dots D_n$ , y ya que  $W_i = g M_i$  reemplazando en las ecuaciones anteriores:

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum W_i D_i}{\sum W_i D_i^2}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum W_i D_i^2}{g \sum W_i D_i}}$$

**Forma de vibración correspondiente a un sistema de fuerzas sísmicas**

Los códigos de diseño sismorresistente prescriben un conjunto de fuerzas para analizar edificios sencillos y regulares. Este juego de fuerzas puede emplearse también para establecer una forma fundamental de vibración y estimar el periodo correspondiente, como se indica a continuación.



**Figura 5.73 Forma de Vibración derivada de un juego de fuerzas sísmicas**

Aplicando al edificio las fuerzas sísmicas  $F_{s1}$ ,  $F_{s2}$ ,  $F_{sn}$  obtenemos un juego de desplazamientos  $D_1$ ,  $D_2$ ... $D_n$  que se puede emplear como una forma de vibración. Sustituyendo estas fuerzas y desplazamientos en la expresión general para la frecuencia circular, y ya que  $W_i = g M_i$ , tendremos:

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum F_{s_i} D_i}{\sum W_i D_i^2}}$$

y para el periodo de vibración:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum W_i D_i^2}{g \sum F_{s_i} D_i}}$$

### Método de Rayleigh iterativo para sistemas discretos

El método de Rayleigh iterativo consiste en asumir inicialmente una forma de vibración e ir mejorándola mediante sucesivos ciclos de iteración hasta lograr la precisión que se desee. Luego de cada ciclo, se puede estimar el periodo de vibración y, por comparación con los valores de ciclos anteriores, se puede decidir el fin del proceso.

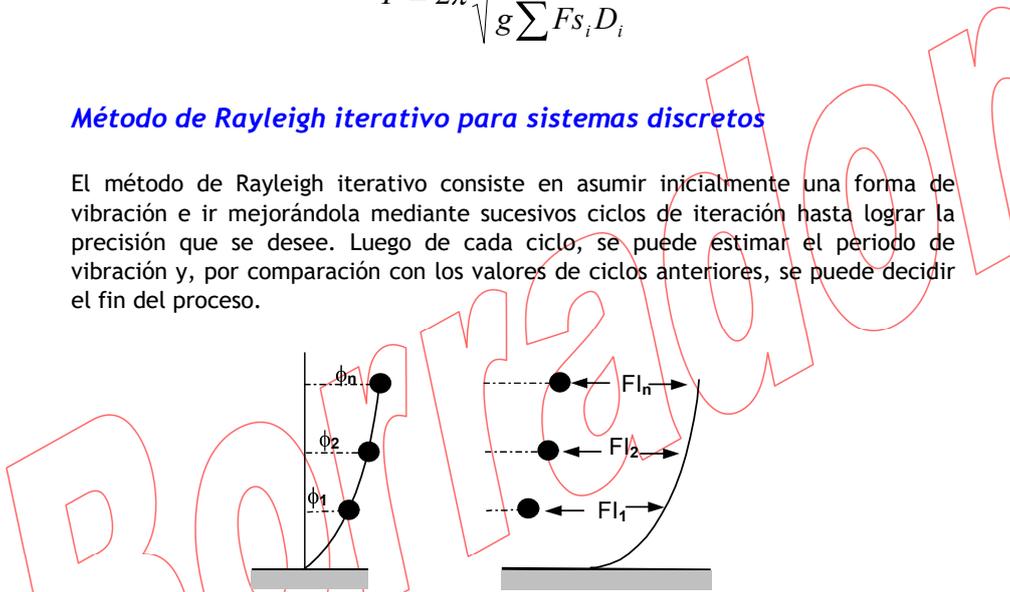


Figura 5.74 Forma de vibración y fuerzas de inercia asociadas

Al inicio del proceso, resulta adecuado asumir una forma cuyo mayor valor sea la unidad.

$$\phi^{(0)} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

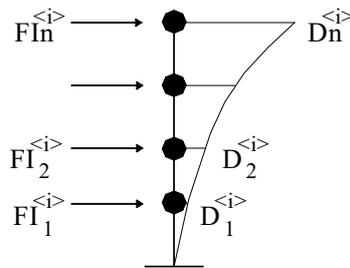
El superíndice <0> hace referencia al ciclo inicial de iteración.

En cada ciclo del proceso, la forma  $\phi^{<i>$  se emplea para calcular las fuerzas de inercia máximas como:

$$F_I^{<i>} = \begin{Bmatrix} M_1 \phi_1^{<i>} \\ \vdots \\ M_n \phi_n^{<i>} \end{Bmatrix}$$

el término  $\omega^2 z_0$  se ha omitido, ya que siempre se podrá elegir un valor de  $Z_0$  tal que  $\omega^2 z_0 = 1$

Con las fuerzas de inercia se hallan los desplazamientos:  $D^{<i>} = \begin{Bmatrix} D_1^{<i>} \\ \vdots \\ D_n^{<i>} \end{Bmatrix}$



**Figura 5.75 Fuerzas de inercia aplicadas y desplazamientos producidos**

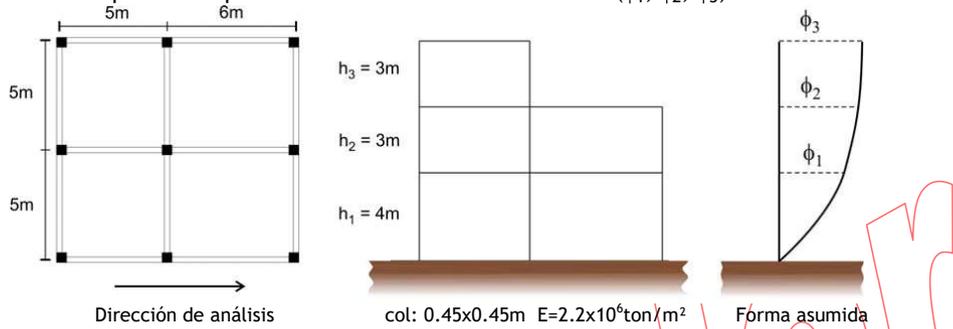
Luego, el vector de desplazamientos,  $D^{<i>}$ , se normaliza para obtener la forma del siguiente ciclo:  $\phi^{<i+1>}$

$$\phi^{<i+1>} = \frac{D^{<i>}}{\max(D^{<i>})}$$

Finalmente, la frecuencia circular se estima empleando las fuerzas de inercia y los desplazamientos ( $F_i$  y  $D_i$ ) del último ciclo como:

$$\omega^2 = \frac{\sum F_i D_i}{\sum M_i D_i^2} = \frac{g \sum F_i D_i}{\sum W_i D_i^2}$$

El ejemplo que sigue permite comparar los resultados que se obtienen con los diferentes procedimientos para estimar el periodo fundamental de vibración en estructuras de masa puntual. Se trata de un edificio de tres pisos simétrico en la dirección en que se analiza. El peso de los niveles 1 y 2 es 110 ton y el peso del nivel 3 es 60 ton. La figura muestra la planta y la elevación lateral del edificio junto con una forma de vibración genérica asumida. Como ya se indicó, esta forma se define por los desplazamientos laterales de cada nivel ( $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ).



**Figura 5.76 Edificio de tres plantas**

Las masas de los pisos 1 y 2 serán:

$$M_1 = M_2 = 110 / 9.81 = 11.213 \text{ ton seg}^2 / \text{m} = 0.11213 \text{ ton seg}^2 / \text{cm}$$

y para el tercer nivel

$$M_3 = 60 / 9.81 = 6.116 \text{ ton seg}^2 / \text{m} = 0.06116 \text{ ton seg}^2 / \text{cm}$$

Para simplificar el cálculo de desplazamientos laterales, se emplea un modelo de corte; sin embargo, debe recordarse que esto constituye una gran simplificación del modelo. A continuación, se indica la rigidez de cada entrepiso y la matriz de rigidez lateral:

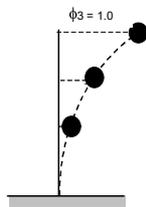
$$K_1 = 9 \times 12 EI / h_1^3 = 12686 \text{ ton / m} = 126.86 \text{ ton / cm}$$

$$K_2 = 9 \times 12 EI / h_2^3 = 30071 \text{ ton / m} = 300.71 \text{ ton / cm}$$

$$K_3 = 6 \times 12 EI / h_3^3 = 20047 \text{ ton / m} = 200.47 \text{ ton / cm}$$

$$K = \begin{pmatrix} 42758 & -30071 & 0 \\ -30071 & 50119 & -20047 \\ 0 & -20047 & 20047 \end{pmatrix} \text{ ton/m}$$

Si se asume una deformada cuadrática  $y = x^2$ , los desplazamientos que se obtienen en los pisos 1, 2 y 3 serán  $4^2$ ,  $7^2$  y  $10^2$ ; empleando estos valores, se obtiene la forma normalizada siguiente:



$$\phi = \begin{Bmatrix} 0.16 \\ 0.49 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**Figura 5.77 Forma cuadrática y periodo obtenido**

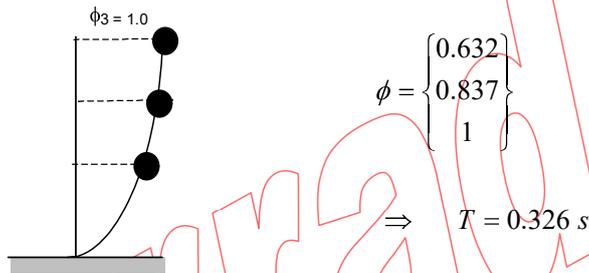
Con los desplazamientos correspondientes a la forma normalizada ( $\phi$ ), se determinan las fuerzas laterales como  $F = K * \phi$  y se obtiene:

$$F = \begin{Bmatrix} -7894 \\ -301 \\ 10224 \end{Bmatrix}$$

Finalmente, con los desplazamientos ( $\phi$ ) y las fuerzas ( $F$ ) correspondientes, se determina el periodo como:

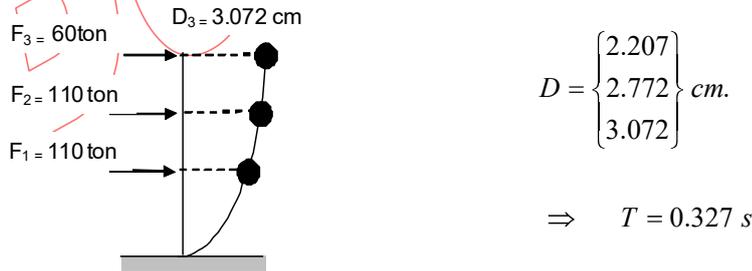
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum W_i D_i^2}{g \sum F S_i D_i}} = 0.202 \text{ s}$$

Veamos, ahora, qué valor encontramos para el periodo natural, asumiendo la forma normalizada correspondiente a la curva  $y = x^{1/2}$ . Los resultados se muestran en la



**Figura 5.78** Periodo obtenido usando la forma raiz cuadrada  $x^{1/2}$

Ahora, empleemos la forma que la estructura adoptaría si se aplican sus pesos horizontalmente. La figura 5.79 muestra estas fuerzas junto con los desplazamientos horizontales que se ha obtenido como  $D=K^{-1}F$  y el periodo que se obtiene.



**Figura 5.79** Periodo obtenido con el método de deflexión estática

Vemos que el valor del periodo obtenido por deflexión estática y el correspondiente a la forma raíz cuadrada dan valores prácticamente iguales.

Empleando el método de Rayleigh iterativo obtenemos como forma y periodo lo siguiente:

$$\phi = \begin{Bmatrix} 0.691 \\ 0.888 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad T = 0.327 \text{ s}$$

La tabla 5.4 resume los valores del periodo obtenidos con las formas asumidas y también el valor correspondiente a una forma lineal que se incluye con fines de comparación.

**Tabla 5.4 Forma de vibración asumida y periodo y discrepancia**

Forma	Periodo (seg)	Error (%)= $(T-T_{\text{real}}) / T_{\text{real}} \times 100$
Cuadrática $x^2$	0.202	-38.32
Lineal $x$	0.284	-13.28
Raíz cuadrada $x^{1/2}$	0.326	-0.46
Deflexión estática	0.327	-0.09
Rayleigh Iterativo ("Real")	0.328	

Las formas cuadrática y lineal conducen a periodos con mayor diferencia respecto del periodo real. En cambio, el valor obtenido con la forma raíz cuadrada es prácticamente el mismo que el valor "exacto". Esto se debe a que el modelo tipo viga de corte tiene desplazamientos de entrepiso que decrecen con la altura y, por tanto, la forma de vibración fundamental se asemeja más a una función raíz cuadrada que a una forma parabólica o lineal.

El método de deflexión estática proporcionó un valor de periodo prácticamente igual al obtenido con el método iterativo. Debe recordarse que toda forma que no es la real rigidiza artificialmente la estructura y, por tanto, conduce a valores más pequeños del periodo fundamental.

Los valores anteriores se han obtenido considerando un modelo de corte para el edificio. Como ejercicio, recalculé el periodo fundamental empleando los métodos de deflexión estática y Rayleigh iterativo considerando vigas de concreto de 0.30x0.60; calcule los desplazamientos empleando un programa de computación.

### 5.3.10. Respuesta espectral de estructuras con masas concentradas usando modelos de un grado de libertad

Una estructura con varias masas concentradas es en realidad un sistema de varios grados de libertad y en su respuesta dinámica influyen sus diferentes modos de vibración. Sin embargo es posible estimar la respuesta máxima considerando sólo los efectos asociados al modo fundamental.

El procedimiento para estimar la respuesta espectral, consiste en determinar en primer lugar el modo fundamental de vibración. Con la forma fundamental de vibración se construye luego el oscilador equivalente de un grado de libertad (valores de  $M^*$ ,  $L^*$ ,  $\omega$ ) y se calcula su respuesta espectral. Finalmente, con la respuesta del oscilador equivalente se determina la respuesta espectral de la estructura. El ejemplo que sigue presenta los detalles.

La figura muestra un edificio de tres pisos con un peso estimado de 175 ton en los pisos 1 y 2 y de 155 ton en el piso 3. Las columnas son de concreto armado ( $E=2.2 \times 10^6$  ton/m<sup>2</sup>) 0.40x0.40 m y el amortiguamiento estructural se estima en 5%. Usando un modelo sencillo de un grado de libertad con masas concentradas y asumiendo vigas infinitamente rígidas en todos los niveles, determine el modo fundamental y la respuesta al espectro mostrado.

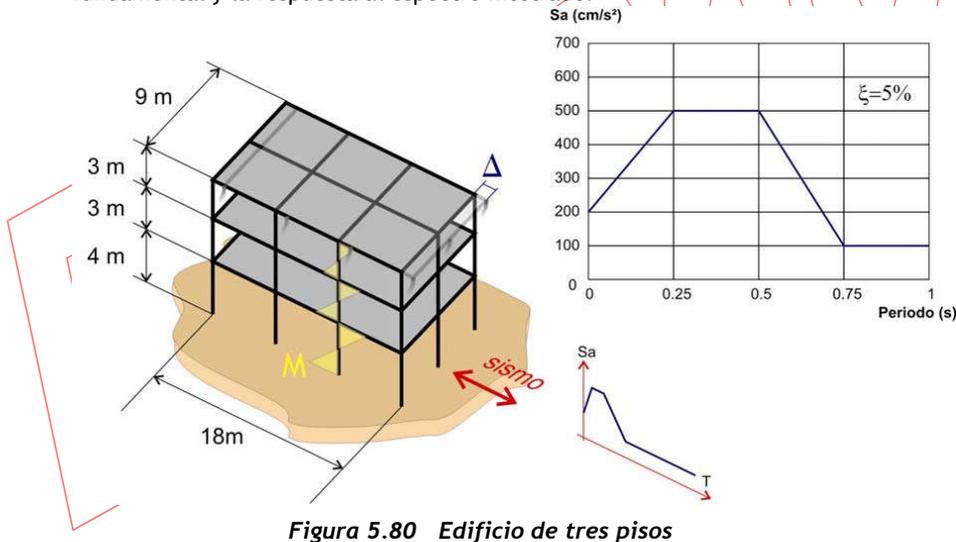


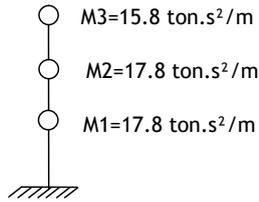
Figura 5.80 Edificio de tres pisos

Para determinar el modo fundamental, use iteraciones de Rayleigh partiendo de un sistema inicial de cargas de 10, 20 y 30 ton en los niveles 1, 2 y 3, respectivamente.

Como respuesta espectral, determine los desplazamientos del edificio, y presente los diagramas de fuerza cortante y momento volcante sobre todo el edificio junto con los diagramas de cortante y momento flector en una columna.

**Modelo.**

Las masas se concentran a nivel de los diafragmas con los siguientes valores:



Como se asume vigas indeformables, la deformada del edificio es del tipo corte y los desplazamientos laterales se pueden estimar por medio de las rigideces de entrepiso,  $k_{ent}$ , donde :

$$k_{ent} = \sum \frac{12EI_{col}}{h^3_{entrepiso}}$$

$EI_{col} = 469303 \text{ ton.m}^2$ , luego:

$$k_1 = 12 (12 EI / h_1^3) = 10560 \text{ ton/m}$$

$$k_2 = 12 (12 EI / h_2^3) = 25031 \text{ ton/m}$$

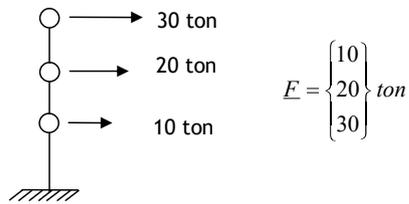
$$k_3 = 12 (12 EI / h_3^3) = 25031 \text{ ton/m}$$

Para el cálculo repetitivo de los desplazamientos laterales, se usa la matriz de rigidez lateral que para el modelo de corte será:

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35590 & -25030 & 0 \\ -25030 & 50060 & -25030 \\ 0 & -25030 & 25030 \end{bmatrix} \text{ ton / m}$$

**Modo fundamental de vibración:**

El sistema de cargas inicial sugerido se representa en su forma vectorial como:



Luego, los desplazamientos laterales  $\underline{D}$  se obtiene resolviendo  $\underline{K} \cdot \underline{D} = \underline{F}$

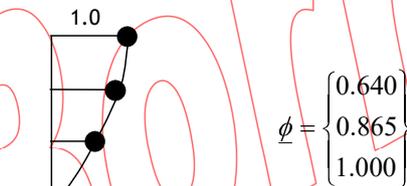
$$\begin{bmatrix} 35590 & -25030 & 0 \\ -25030 & 50060 & -25030 \\ 0 & -25030 & 25030 \end{bmatrix} \cdot \underline{D} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

De donde:  $\underline{D} = 10^{-3} \begin{Bmatrix} 5.68 \\ 7.68 \\ 8.88 \end{Bmatrix} m$

Con  $\underline{F}$  y  $\underline{D}$  el periodo (T) se estima como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum M_i D_i^2}{\sum F_i D_i}} = 0.4868 s$$

Normalizando  $\underline{D}$  a 1 en su valor máximo:



$$\underline{\phi} = \begin{Bmatrix} 0.640 \\ 0.865 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

**1er ciclo Rayleigh**

El nuevo sistema de fuerzas se puede estimar como:

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} 0.640 \cdot M1 \cdot g \\ 0.865 \cdot M2 \cdot g \\ 1.000 \cdot M3 \cdot g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.640 \cdot P1 \\ 0.865 \cdot P2 \\ 1.000 \cdot P3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 112 \\ 151.4 \\ 155 \end{Bmatrix} ton$$

Luego, los desplazamientos correspondientes son:

$$D = \begin{Bmatrix} 0.040 \\ 0.052 \\ 0.058 \end{Bmatrix} m$$

y entonces, el periodo y la forma fundamental aproximados son:

$$T=0.4896 \text{ s} \quad , \quad \phi = \begin{Bmatrix} 0.682 \\ 0.893 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Del mismo modo:

**2do ciclo Rayleigh**

$$F = \begin{Bmatrix} 119.43 \\ 156.33 \\ 155 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad , \quad D = \begin{Bmatrix} 0.041 \\ 0.053 \\ 0.059 \end{Bmatrix} m \quad , \quad T=0.4886 \text{ s} \quad , \quad \phi = \begin{Bmatrix} 0.686 \\ 0.896 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**3er ciclo Rayleigh**

$$F = \begin{Bmatrix} 120.13 \\ 156.76 \\ 155 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad , \quad D = \begin{Bmatrix} 0.041 \\ 0.053 \\ 0.060 \end{Bmatrix} m$$

de donde:

$$T=0.49 \text{ s} \quad , \quad \phi = \begin{Bmatrix} 0.687 \\ 0.896 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**Respuesta espectral:**

Con el modo fundamental se construye el oscilador equivalente con las siguientes propiedades generalizadas:

$$M^* = \sum M_i \cdot \phi_i^2 = 38.538 \text{ ton} \cdot \text{s}^2 / \text{m}$$

$$K^* = \omega^2 M^* = 6347.54 \text{ ton} / \text{m}$$

$$\omega = 12.83 \text{ rad} / \text{seg} \quad T = 0.49 \text{ seg.}$$

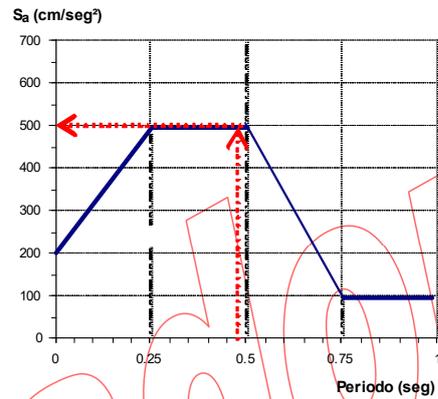
$$L^* = \sum M_i \cdot \phi_i = 44.037 \text{ ton} \cdot \text{s}^2 / \text{m}$$

$$L^* / M^* = 1.143$$

La aceleración y desplazamiento espectral correspondientes al periodo fundamental del edificio son:

$$S_a = 5 \text{ m} / \text{s}^2 = 500 \text{ cm} / \text{s}^2$$

$$S_d = 0.030 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$



Por tanto, los valores espectrales del desplazamiento, la aceleración y la fuerza cortante máximas en el edificio serán:

$$\underline{X} = \frac{L^*}{M^*} S_d \cdot \phi = \begin{Bmatrix} 2.4 \\ 3.1 \\ 3.5 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Azotea = 3.5 cm

$$\ddot{X}_{abs} = \frac{L^*}{M^*} S_a \cdot \phi = \begin{Bmatrix} 3.9 \\ 5.1 \\ 5.7 \end{Bmatrix} \text{ m} / \text{s}^2$$

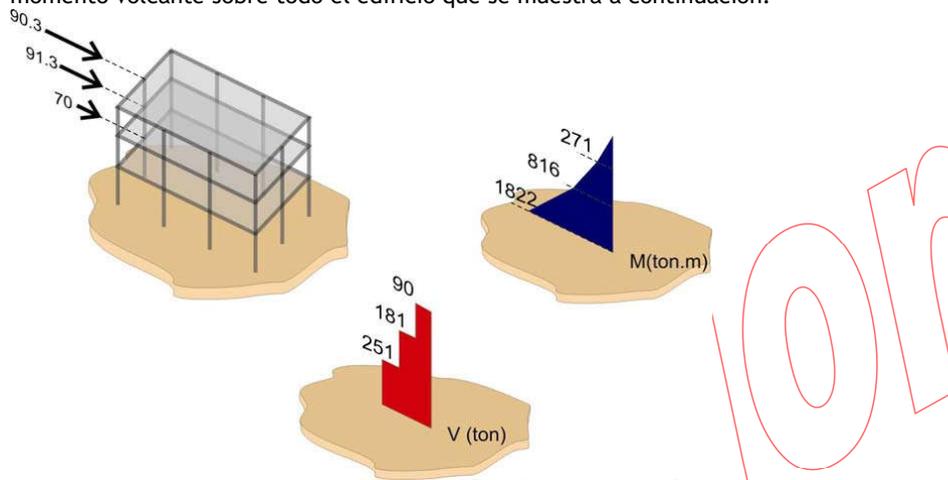
Azotea = 5.7  $\text{m}/\text{s}^2$

$$V = \frac{L^{*2}}{M^*} S_a = 251.6 \text{ ton}$$

Multiplicando las aceleraciones de cada nivel por las masas correspondientes, se obtiene el siguiente juego de fuerzas de inercia:

$$\underline{F}_I = \begin{Bmatrix} \dots \\ \ddots \\ x_{abs1} \cdot M_1 \\ \dots \\ x_{abs2} \cdot M_2 \\ \dots \\ x_{abs3} \cdot M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 70 \\ 91.3 \\ 90.3 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

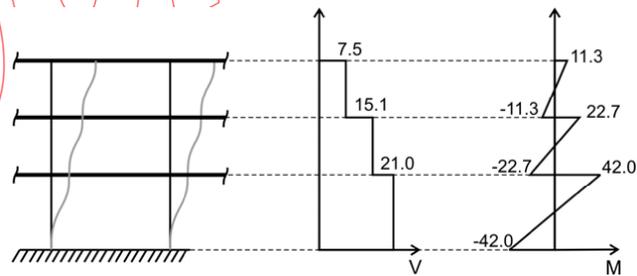
Para este sistema de fuerzas, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento volcante sobre todo el edificio que se muestra a continuación:



**Figura 5.81 Fuerzas, momento volcante y fuerza cortante sobre el edificio**

La fuerza cortante obtenida con la suma de fuerzas de inercia coincide con el resultado de la expresión  $V = \frac{L^{*2}}{M^{*}} S_a$

Desarrollando el análisis de fuerzas internas se obtiene para una columna los siguientes diagramas:



**Figura 5.82 Fuerza cortante y momento flector en columnas**

Como ejercicio, resuelva el edificio considerando vigas de 0.24x0.45m.

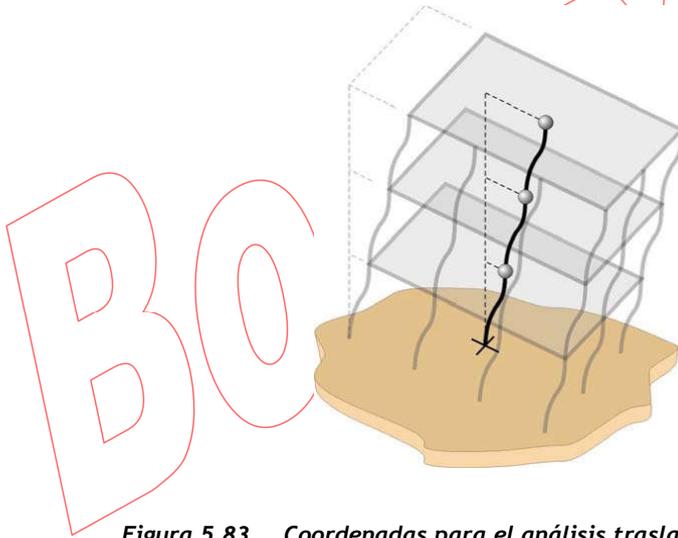
## 5.4. Respuesta de estructuras de varios grados de libertad

### 5.4.1. Sistema de coordenadas y ecuación de equilibrio dinámico

Como ya se explicó en acápites anteriores, la descripción global del comportamiento de una estructura durante un sismo se logra mediante un conjunto de mediciones de aceleración, velocidad y desplazamiento asociados con fuerzas de inercia importantes. Este conjunto de mediciones se denomina **sistema de coordenadas** y se suele representar por un vector que reúne los desplazamientos que se observan.

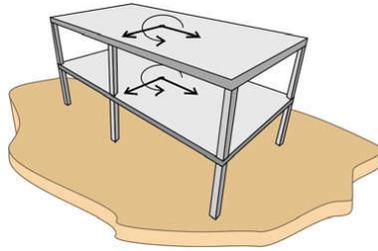
Las losas macizas o las losas aligeradas que sirven como sistemas de piso en muchos edificios tienen la rigidez suficiente para poder considerarlas indeformables por fuerzas en su propio plano. Si suponemos, además, que las masas de los entrepisos se pueden concentrar en los diafragmas, el movimiento de cada piso se puede estudiar como el de un cuerpo rígido con movimiento en el plano horizontal.

Así, por ejemplo, en un edificio de diafragmas rígidos y con movimiento horizontal en una sola dirección, gracias a su simetría, las fuerzas de inercia importantes son las producidas por la aceleración traslacional de los diafragmas que llevan las masas concentradas. En este caso, el sistema de coordenadas se compone de tantas mediciones como pisos tenga la edificación. La figura 5.83 muestra el sistema de coordenadas para el análisis traslacional de un edificio de tres pisos.



**Figura 5.83** Coordenadas para el análisis traslacional de un edificio

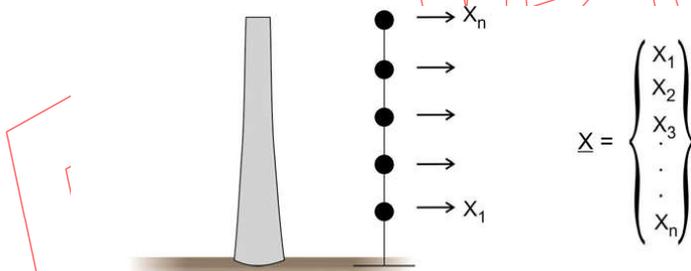
Para edificios con diafragmas rígidos en los que se espera en cada piso dos traslaciones y un giro, el sistema de coordenadas deberá incluir tres coordenadas dinámicas por nivel. La figura 5.84 muestra el sistema de coordenadas necesario para el estudio de un edificio de dos plantas.



**Figura 5.84** Sistema de coordenadas para el análisis de edificios con tres coordenadas por nivel

Generalmente, de todos los grados de libertad que puede tener una estructura, solamente algunos tienen fuerzas de inercia importantes. Por tanto, el número de grados de libertad suele ser mucho mayor que el número de coordenadas dinámicas.

En estructuras de masa continua, durante el movimiento sísmico, se presentan fuerzas de inercia distribuidas; sin embargo, es posible obtener resultados satisfactorios empleando un número determinado de coordenadas correspondientes a los desplazamientos de ciertos puntos de la estructura.



**Figura 5.85** Estructura de masa continua representada con masas puntuales

### Ecuación de equilibrio dinámico

En el caso más general, en cada coordenada existen fuerzas de inercia, fuerzas restitutivas, fuerzas de amortiguamiento y fuerzas externas  $P_i$ .

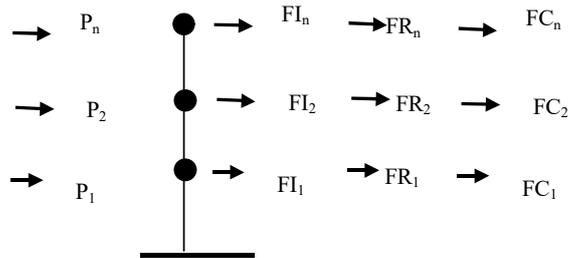


Figura 5.86 Fuerzas en cada coordenada

En cada instante del movimiento, las fuerzas en cada grado de libertad deben estar en equilibrio, es decir:

$$\begin{aligned}
 F_{I1} + F_{C1} + F_{R1} + P_1 &= 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 F_{In} + F_{Cn} + F_{Rn} + P_n &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} F_{I1} \\ F_{I2} \\ F_{I3} \\ \vdots \\ F_{In} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{C1} \\ F_{C2} \\ F_{C3} \\ \vdots \\ F_{Cn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{R1} \\ F_{R2} \\ F_{R3} \\ \vdots \\ F_{Rn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

o en forma concisa:

$$E_I + E_C + E_R + P = 0$$

donde:

- $\underline{E}_I$  = Vector de fuerzas de inercia
- $\underline{E}_C$  = Vector de fuerzas de amortiguamiento
- $\underline{E}_R$  = Vector de fuerzas restitutivas
- $\underline{P}$  = Vector de fuerzas externas

Como se ve a continuación, las fuerzas restitutivas, las fuerzas de amortiguamiento y las fuerzas de inercia varían en el tiempo, y dependen directamente de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones de la estructura.

### Fuerzas restitutivas y desplazamientos relativos al suelo

En todo instante del movimiento, existen fuerzas actuantes sobre la estructura que logran deformarla; consecuentemente, por el principio de acción y reacción, la estructura actúa con fuerzas de sentido contrario sobre las masas del sistema. Si representamos con  $F_{k_i}$  a la fuerza que recibe la estructura en la coordenada "i" y con  $F_{R_i}$  a la fuerza con que la estructura actúa sobre la masa respectiva, tendremos que  $F_{R_i} = -F_{k_i}$ . La figura 5.87 ilustra esta relación.

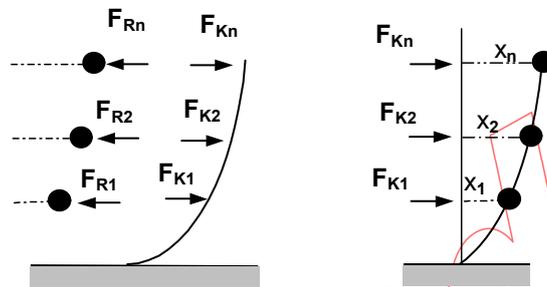


Figura 5.87 Fuerzas restitutivas función de los desplazamientos relativos

Agrupando las fuerzas actuantes sobre la estructura en el vector  $\underline{F}_k$  y haciendo lo propio con las fuerzas sobre las masas en el vector  $\underline{F}_R$ , tendremos que  $\underline{F}_R = -\underline{F}_k$

El vector de fuerzas sobre la estructura,  $\underline{F}_k$ , es función del vector de desplazamientos relativos de la estructura respecto al suelo  $\underline{X}$ . Para el caso de estructuras linealmente elásticas, la relación entre estos vectores es también lineal y se expresa como:

$$\underline{F}_k = \underline{K} \underline{X}$$

donde  $\underline{K}$  es la matriz de rigidez de la estructura correspondiente a los grados de libertad dinámicos elegidos.

Como las fuerzas que la estructura ejerce sobre las masas de la estructura ( $\underline{F}_R$ ) son de sentido contrario al de las fuerzas que recibe la estructura, tendremos:

$$\underline{F}_R = -\underline{K} \underline{X}$$

Debe recordarse que, de todos los grados de libertad de una estructura, solo aquellos en que se producen fuerzas de inercia importantes son los que se emplean en el problema dinámico; por tanto, la matriz de rigidez dinámica es generalmente de tamaño considerablemente menor que la matriz de rigidez correspondiente a todos los grados de libertad de la estructura.

Para calcular la matriz de rigidez dinámica de edificios con diafragmas rígidos, los programas de computación necesitan como información la ubicación y características mecánicas de todos los elementos, así como la indicación de los nudos en los cuales se producirán fuerzas de inercia.

### Fuerzas de inercia y aceleraciones absolutas

Durante el movimiento de una estructura, aparecen fuerzas de inercia en las coordenadas dinámicas, debido a la aceleración que presentan las masas del sistema. Agrupando las aceleraciones absolutas en el vector  $\underline{\ddot{X}}_{abs}$ , la relación entre este vector y el de fuerzas de inercia se establece por medio de una matriz, denominada matriz de masas ( $\underline{M}$ ), como:

$$\underline{F}_I = -\underline{M} \cdot \underline{\ddot{X}}_{abs}$$

Por ejemplo, para el análisis traslacional de edificios con diafragmas rígidos, cada fuerza de inercia será el producto de la masa del nivel por su aceleración absoluta, como se muestra en la figura 5.88.

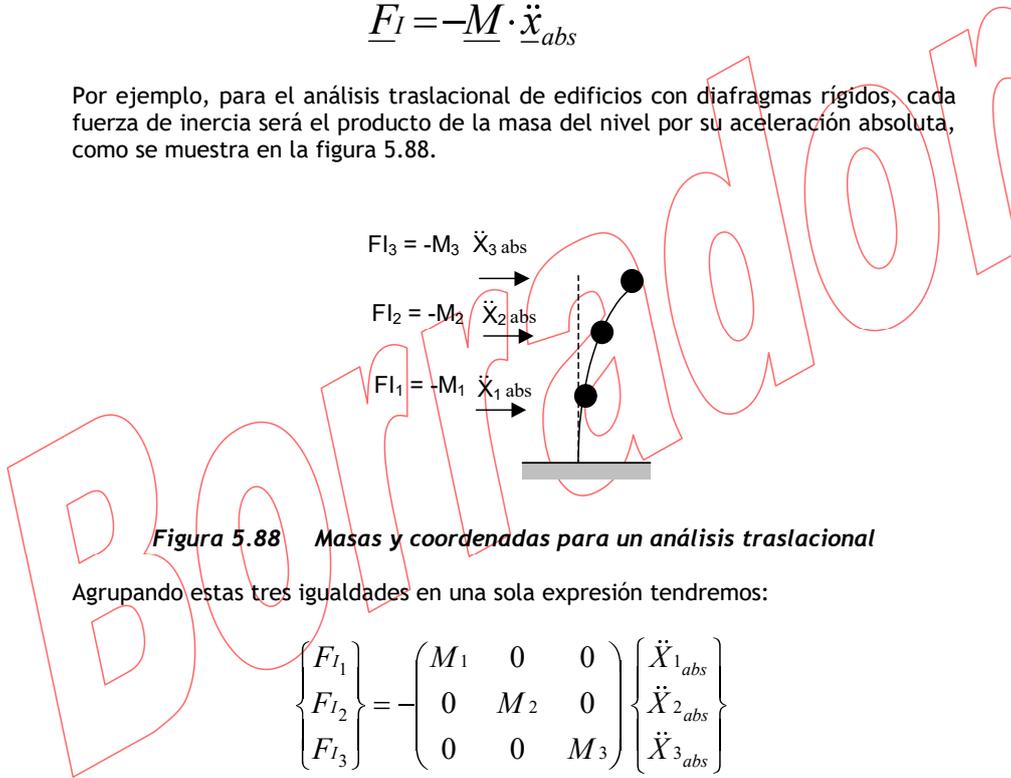


Figura 5.88 Masas y coordenadas para un análisis traslacional

Agrupando estas tres igualdades en una sola expresión tendremos:

$$\begin{Bmatrix} F_{I_1} \\ F_{I_2} \\ F_{I_3} \end{Bmatrix} = - \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_{1 abs} \\ \ddot{X}_{2 abs} \\ \ddot{X}_{3 abs} \end{Bmatrix}$$

Para el análisis sísmico de edificios con diafragmas rígidos, los programas de computación requieren como información para cada piso la localización del centro de masas y los valores de la inercia traslacional (masa total del nivel) y la inercia rotacional (momento polar de inercia de la masa respecto del centro de gravedad del piso).

Aunque es muy difícil cuantificar y representar el amortiguamiento estructural, por simplicidad se asume que las fuerzas de amortiguamiento se relacionan directamente con las velocidades relativas por medio de una matriz  $\underline{C}$ :

$$F_c = -C \cdot \dot{X}$$

Para una estructura sometida exclusivamente a movimiento en su base, el vector de fuerzas externas es nulo:  $\underline{P} = \underline{0}$ . Sustituyendo esta expresión junto con las encontradas para los vectores de fuerzas de tendremos:

$$\underline{M} \ddot{x}_{abs} + \underline{C} \dot{x} + \underline{K} x = \underline{0}$$

Esta expresión constituye la ecuación de equilibrio dinámico para una estructura de varios grados de libertad con comportamiento elástico lineal y es, en cierta forma, similar a la ecuación obtenida para una estructura de un grado de libertad.

Mientras que las propiedades dinámicas y la respuesta de una estructura de un grado de libertad se expresan con cantidades escalares, para el caso de una estructura de varios grados de libertad, las propiedades dinámicas se representan con matrices ( $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$ ) y la respuesta por vector ( $\underline{X}$ ).

De estas tres matrices, la matriz de masas es la que puede determinarse con mejor precisión y es, además, la matriz que permanece constante durante el movimiento. En cambio, la matriz de rigidez solo sirve para relacionar los desplazamientos y las fuerzas restitutivas mientras estos desplazamientos sean pequeños y la estructura se mueva dentro del rango elástico lineal.

Por otro lado, resulta más sencillo incluir el amortiguamiento en estructuras de varios grados de libertad empleando fracciones de amortiguamiento similares a las de sistemas de un grado de libertad, en lugar de hacerlo explícitamente por medio de matrices de amortiguamiento.

### 5.4.2. Modos naturales de vibración

Imaginemos una estructura permanentemente en vibración libre gracias a su amortiguamiento nulo. Esta estructura tendrá la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$\underline{M} \ddot{x} + \underline{K} x = 0$$

Es posible demostrar (ver anexo 2) que una estructura de “n” grados de libertad dinámicos puede mantenerse teóricamente en vibración libre adoptando “n” formas a cada una de las cuales corresponde un periodo de vibración.

También es posible demostrar que, si se fuerza a que una estructura adopte estáticamente una posición inicial deformada igual a la de una forma natural, luego al dejarla en libertad, la estructura se mantendrá en vibración libre conservando la forma del instante inicial.

Aunque los procedimientos numéricos para encontrar los modos naturales son algo complicados, resulta sencillo estudiar la influencia de las formas modales en la respuesta sísmica de estructuras elásticas. Por otro lado, uno de los procedimientos más difundidos para el cálculo de desplazamientos en estructuras de varios grados de libertad está sustentado en la respuesta asociada con cada forma de vibración como se ve más adelante.

La figura 5.89 muestra la planta y elevación de un edificio de tres pisos con columnas de 0.45x0.45m y pesos de 110ton en los niveles 1 y 2 y 60ton en el nivel 3.

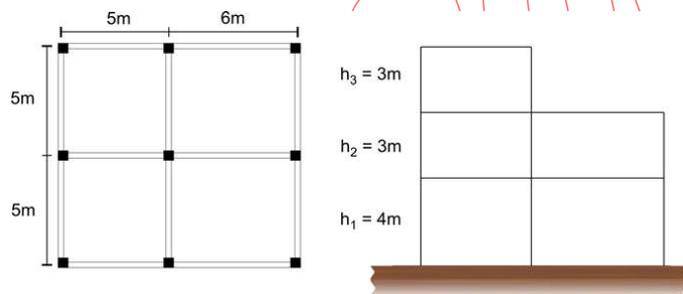
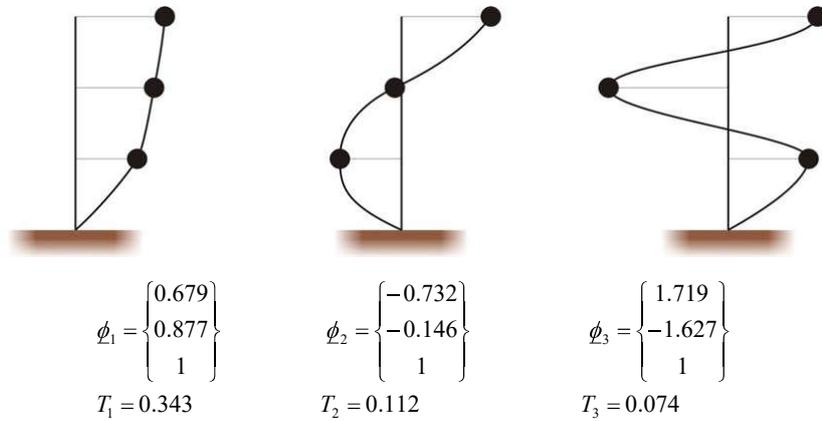


Figura 5.89 Edificio de tres pisos con un eje de simetría

Empleando un modelo de corte, se encontraron las formas y periodos naturales presentados en la figura 5.90:



**Figura 5.90** Modos naturales de traslación pura en edificio de tres pisos

Tal como se presentan en la figura, por comodidad los modos se ordenan en forma decreciente atendiendo al periodo de vibración.

En modelos traslacionales, la primera forma natural consiste en desplazamientos en la misma dirección; la segunda forma presenta un cambio de signo (del segundo al tercer piso) y la tercera forma incluye dos cambios de signo.

Estos modos se obtuvieron usando un modelo de corte para el edificio. Ejercicio: obtenga los nuevos valores considerando ahora vigas de 0.30 x 0.60. Emplee dos programas de computación, el primero para calcular la matriz de rigidez lateral del edificio y el segundo para hacer el análisis de modos y frecuencias.

### 5.4.3. Respuesta en el tiempo

La figura 5.91 muestra dos estructuras de varios grados de libertad sometidas al movimiento unidireccional de su base, representado por la historia de aceleraciones del suelo  $\ddot{s}$

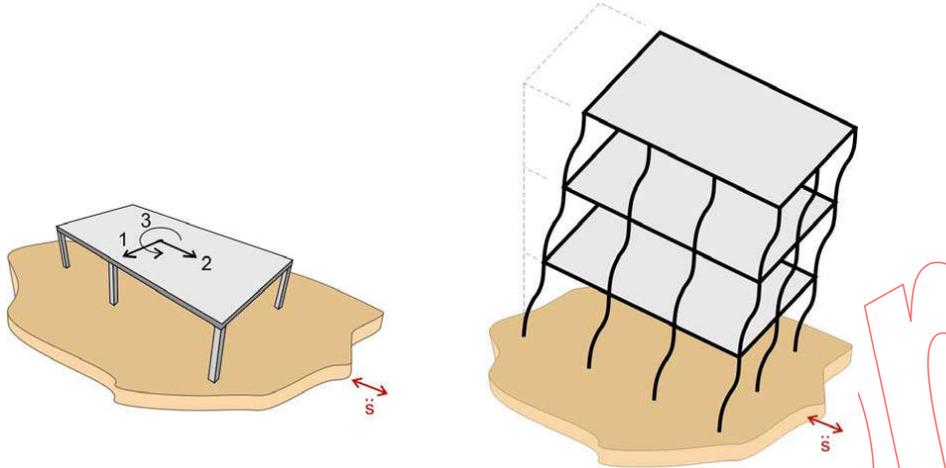


Figura 5.91 Estructuras de varios g.d.l. sometidas a movimiento en su base

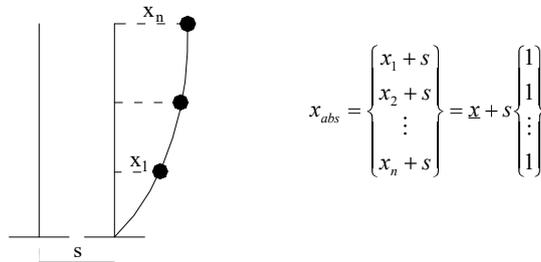
Si representamos con  $\underline{X}_{abs}$  al vector de desplazamientos absolutos y con  $\underline{X}$  al vector de desplazamientos relativos al suelo, la ecuación de equilibrio dinámico para estas estructuras será:

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}}_{abs} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{0}$$

#### Desplazamientos relativos y absolutos

Siempre será posible establecer una relación directa entre los desplazamientos absolutos ( $\underline{X}_{abs}$ ) y los desplazamientos relativos ( $\underline{X}$ ) en función del desplazamiento del suelo " $s$ ".

Por ejemplo, en un edificio con movimiento exclusivamente de traslación, el desplazamiento absoluto de cada niveles igual al desplazamiento del nivel respecto del suelo más el desplazamiento mismo del suelo, tal como se muestra en figura 5.92.



**Figura 5.92** Desplazamientos de un edificio en movimiento traslacional

Esta relación se puede expresar de manera sucinta como:  $\underline{x}_{abs} = \underline{x} + s \underline{h}$

donde

$$\underline{h} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

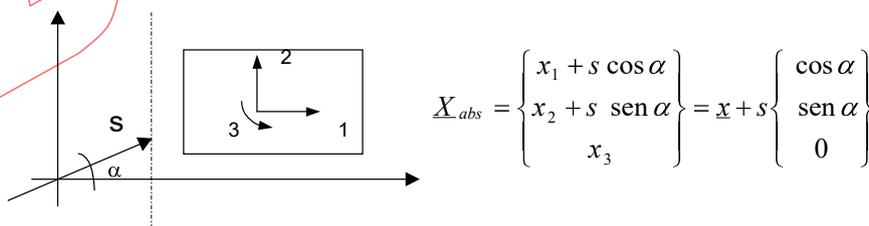
es un vector constante, denominado vector de transformación de desplazamientos del suelo.

Derivando la anterior relación entre desplazamientos, se deduce la siguiente relación entre aceleraciones:

$$\underline{\ddot{x}}_{abs} = \underline{\ddot{x}} + s \ddot{h}$$

Ahora, veamos el caso de la segunda estructura cuyas tres coordenadas corresponden al movimiento plano del diafragma rígido y el movimiento del suelo forma un ángulo  $\alpha$  con la primera coordenada.

Al desplazarse el suelo una unidad en la dirección definida por  $\alpha$ , las coordenadas 1 y 2 se habrán movido  $\cos(\alpha)$  y  $\text{seno}(\alpha)$ , respectivamente, y la tercera coordenada no habrá alterado su valor. A estos desplazamientos del diafragma por efecto del movimiento del suelo, debe añadirse el movimiento propio del diafragma respecto del suelo, tal como se muestra en la figura 5.93.



**Figura 5.93** Movimiento del suelo y desplazamientos de un diafragma rígido

Por tanto, el vector de transformación de desplazamientos para este caso será:

$$\underline{h} = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En general,  $\underline{h}$  es un vector constante que depende exclusivamente del sistema de coordenadas y de la dirección del movimiento del suelo. Dependiendo de la dirección del movimiento del suelo, influirán unos u otros modos en la respuesta. Los programas de computación reciben como dato el ángulo de inclinación del movimiento del suelo respecto de un sistema de coordenadas.

Como las aceleraciones absolutas se pueden expresar como  $\underline{\ddot{x}}_{abs} = \underline{\ddot{x}} + \ddot{s}\underline{h}$ , la ecuación de equilibrio dinámico puede reescribirse como:

$$\underline{M}(\underline{\ddot{x}} + \underline{h}\ddot{s}) + \underline{C}\underline{\dot{x}} + \underline{K}\underline{x} = 0$$

y, finalmente, reacomodando términos, tendremos:

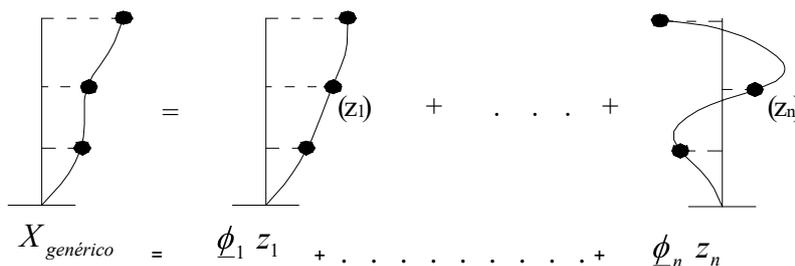
$$\underline{M}\underline{\ddot{x}} + \underline{C}\underline{\dot{x}} + \underline{K}\underline{x} = -\ddot{s}\underline{M}\underline{h}$$

Esta ecuación se puede interpretar como el de una estructura sin movimiento en su base, pero sometida a un sistema de fuerzas igual al segundo miembro de esta expresión.

Existen dos procedimientos para resolver esta ecuación: el primero denominado de integración directa y el segundo, de descomposición modal. Se presenta a continuación, esquemáticamente, el segundo procedimiento como una introducción a los métodos de superposición espectral.

**Respuesta por superposición modal**

Puede demostrarse que la respuesta elástica de una estructura sometida a una aceleración en su base se puede calcular como la superposición en el tiempo de las formas modales ( $\phi_i$ ) afectadas por funciones en el tiempo ( $z_i$ ), como se indica en figura 5.94:



**Figura 5.94** Vector desplazamientos expresado como una combinación lineal en el tiempo de las formas modales

Según esto, el vector de desplazamientos relativos al suelo se puede obtener en todo instante como:

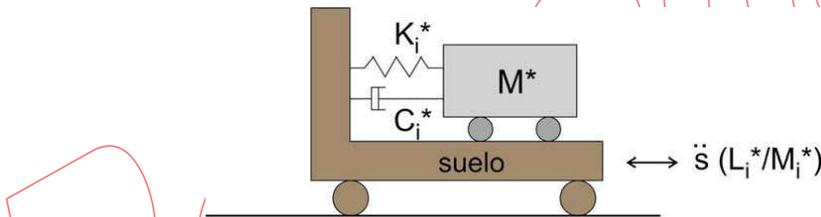
$$\underline{x} = \underline{\phi}_1 z_1(t) + \underline{\phi}_2 z_2(t) + \dots + \underline{\phi}_n z_n(t)$$

En esta combinación, los escalares que afectan a cada forma modal ( $z_1, z_2, \dots, z_n$ ) se denominan coordenadas modales y representan el peso que cada modo tiene en el desplazamiento de toda la estructura a lo largo del tiempo.

Cada coordenada normal  $z_i(t)$  se obtiene construyendo, con el modo respectivo, un oscilador equivalente, tal como se hizo para el estudio de sistemas de propiedades distribuidas. La diferencia está en que, en este caso ya no se asume una forma, sino más bien se emplea la forma real del modo respectivo  $\underline{\phi}_i$  y las propiedades generalizadas se calculan como :

$$\begin{aligned} L_i^* &= \underline{h}^T \underline{M} \underline{\phi}_i \\ M_i^* &= \underline{\phi}_i^T \underline{M} \underline{\phi}_i \\ K_i^* &= \underline{\phi}_i^T \underline{K} \underline{\phi}_i \end{aligned}$$

La figura 5.95 muestra el oscilador equivalente que debe construirse para cada modo de vibración.



**Figura 5.95** Oscilador equivalente correspondiente al modo de vibración "i"

Como se recuerda, la aceleración en la base de este oscilador equivalente es igual al producto de la aceleración del suelo por el factor de participación del modo ( $L_i^*/M_i^*$ ) y la ecuación de equilibrio dinámico para cada oscilador equivalente es:

$$z_i + 2\xi_i \omega_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = -\left(L_i^*/M_i^*\right) \ddot{s}$$

Si se representa con  $v_i$  la respuesta de un oscilador de masa puntual con igual periodo que el modo "i", sometido a la aceleración original del suelo, la relación entre  $v_i$  y  $z_i$  será:

$$z_i(t) = \left(L_i^*/M_i^*\right) v_i(t)$$

Y, por tanto, la respuesta en el tiempo para toda la estructura se puede reescribir como:

$$\underline{X} = \frac{L_1^*}{M_1^*} v_1(t) \underline{\phi}_1 + \frac{L_2^*}{M_2^*} v_2(t) \underline{\phi}_2 + \dots + \frac{L_n^*}{M_n^*} v_n(t) \underline{\phi}_n$$

Podemos ver, ahora, que la respuesta en el tiempo resulta ser una combinación lineal de las formas naturales de vibración, donde el peso de cada modo está dado por dos factores. Como se ve a continuación, el primer factor se asocia con la forma misma del modo y el segundo con el periodo de vibración.

El primer factor que afecta la respuesta de un modo es el factor de participación ( $L_i^* / M_i^*$ ). Este factor es una constante para cada modo y en cierta forma es un indicador de la importancia absoluta del modo. Para el edificio del ejemplo anterior, los factores de participación correspondientes a los modos traslacionales son:

Modo	$L_i^* / M_i^*$
1	1.1729
2	- 0.2158
3	0.0428

Podemos ver que este factor de importancia es notoriamente mayor para el primer modo. Generalmente, cuando se trata de un análisis traslacional, el factor de participación decrece con el modo y la respuesta se calcula empleando solo algunos de los primeros modos sin pérdida importante de precisión.

En general, el cálculo de la respuesta puede hacerse empleando solo los “m” primeros modos ( $m < n$ ), como lo indica la siguiente ecuación:

$$\underline{X} = \frac{L_1^*}{M_1^*} v_1(t) \underline{\phi}_1 + \frac{L_2^*}{M_2^*} v_2(t) \underline{\phi}_2 + \dots + \frac{L_m^*}{M_m^*} v_m(t) \underline{\phi}_m$$

El segundo factor que afecta la importancia de cada modo es una función del tiempo ( $v_i(t)$ ). La influencia de este segundo factor en la respuesta total depende fundamentalmente de la relación entre el periodo del modo y el contenido de frecuencias de la señal de aceleraciones del suelo, tal como se verá en el acápite de respuesta espectral.

La historia de desplazamientos de una estructura sometida a un registro de aceleración en su base no puede expresarse por medio de funciones literales, sino mediante un grupo de vectores constantes que representan la configuración deformada instantánea de la estructura en instantes definidos de tiempo.

Por lo general, estos vectores corresponden a instantes regularmente espaciados en el tiempo. Por ejemplo, si se emplea un registro de aceleraciones de 30 seg. de duración con el edificio de tres pisos mostrado en este acápite y se desea expresar la respuesta cada 0.01 seg., serán necesarios  $30/0.01 = 3000$  vectores constantes (cada uno de tres componentes) para describir la historia de desplazamientos del edificio en traslación.

Para cada instantánea de desplazamientos,  $\underline{X}$ , se podrá calcular el sistema de fuerzas que lo produce como

$$\underline{F}_k = \underline{K} \underline{X}$$

Luego, con cada vector instantáneo de fuerzas sobre la estructura,  $\underline{F}_k$ , se podrá efectuar el análisis de fuerzas internas y obtener, así, por ejemplo, la fuerza cortante o el momento flector en cada elemento en el instante respectivo.

Finalmente, resolviendo la estructura con todos los sistemas de fuerzas correspondientes a los instantes de cálculo, se podrán obtener las historias de fuerzas internas en los elementos de la estructura.

Para el edificio del ejemplo referido, como los 3000 vectores constantes que representan la historia de desplazamientos, se podrán calcular igual número de sistemas de fuerzas y, por consiguiente, se tendrá que realizar también 3000 veces el análisis de fuerzas internas. Con los resultados de estos 3000 análisis de fuerzas internas, se obtendrán 3000 valores para el momento flector o la fuerza cortante en los elementos de la estructura, los mismos que constituirán la historia de la fuerza interna en el punto en estudio.

Borrador

#### 5.4.4. Respuesta espectral de estructuras de varios grados de libertad

Existen diversos programas de computación para calcular la respuesta en el tiempo de estructuras con movimiento en su base. Aun cuando se pueden obtener historias de desplazamientos y fuerzas internas con relativa facilidad, cuando se trata de estructuras en el rango elástico, casi siempre es suficiente con los valores máximos de la respuesta.

En este acápite, se presentan los procedimientos para estimar la respuesta máxima de una estructura, en función de los valores máximos de la respuesta asociada con cada modo de vibración.

Como se explicó en el acápite anterior, la historia de desplazamientos de una estructura se puede expresar como una combinación en el tiempo de las formas modales, como lo indica la siguiente expresión:

$$X = \frac{L_1^*}{M_1^*} v_1(t) \phi_1 + \frac{L_2^*}{M_2^*} v_2(t) \phi_2 + \dots + \frac{L_n^*}{M_n^*} v_n(t) \phi_n$$

En esta ecuación, cada sumando representa la contribución de un modo en la respuesta total. Como se recordará, el peso de la contribución de cada modo está dado por el producto de dos factores. El primer factor es una constante, denominada factor de participación, y el segundo factor es una función  $v_i(t)$ , que constituye la respuesta de un oscilador de masa puntual e igual periodo que el modo sometido a la señal original de aceleraciones.

Consecuentemente, la máxima contribución del modo "i" en el desplazamiento de la estructura,  $X_i$ , se calculará como:

$$X_i = \max \left\{ \frac{L_i^*}{M_i^*} v_i(t) \phi_i \right\} = \frac{L_i^*}{M_i^*} \phi_i \max \{ v_i(t) \} = \frac{L_i^*}{M_i^*} \phi_i S_{di}$$

donde  $S_{di}$  representa el desplazamiento espectral asociado al periodo del modo "i".

El sistema de fuerzas elásticas correspondiente a este desplazamiento máximo será:

$$E_{ki} = K X_i = K \frac{L_i^*}{M_i^*} \phi_i S_{di} = \frac{L_i^*}{M_i^*} S_{di} K \phi_i$$

Puede demostrarse que este sistema de fuerzas se puede obtener también usando las propiedades inerciales del modo, como:

$$E_{ki} = \frac{L_i^*}{M_i^*} S_{ai} M \phi_i$$

donde  $S_{ai}$  representa la aceleración espectral asociada al periodo del modo "i".

Conociendo el sistema de fuerzas correspondiente a la respuesta máxima de cada modo, se efectúa luego el análisis de fuerzas internas.

Un parámetro importante en la respuesta modal es la fuerza cortante máxima en la base de la estructura que, como se recuerda, se calcula como:

$$V_i = \frac{L_i *^2}{M_i *^*} S_{ai}$$

La respuesta máxima de desplazamientos y las fuerzas internas constituyen, en conjunto, la respuesta espectral del modo.

### Combinación espectral

Las respuestas espectrales correspondientes de los diferentes modos de vibración son valores máximos que se producen en instantes diferentes y, por tanto, resulta improbable que todas las respuestas máximas coincidan en el tiempo. Por esta razón, se han propuesto algunos criterios para combinar las respuestas modales máximas, con el fin de estimar la respuesta máxima de la estructura.

Si representamos con  $r_i$  a cualquier parámetro de la respuesta espectral del modo "i", (desplazamientos, deformaciones, fuerzas internas, etc.) la respuesta máxima puede estimarse empleando solamente la respuesta espectral de "m" modos importantes ( $m < n$ ) junto con alguno de los siguientes criterios de combinación.

*Suma de valores absolutos*

$$r_{MAX} = |r_1| + |r_2| + \dots + |r_m|$$

*Media cuadrática*

$$r_{MAX} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2}$$

*Ponderado entre la media cuadrática y la suma de valores absolutos.*

$$r_{MAX} = \alpha \left( \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2} \right) + \beta \left( |r_1| + |r_2| + \dots + |r_m| \right)$$

$\alpha$  y  $\beta$  son escalares menores o iguales a uno

Probablemente, el criterio más difundido y estudiado es el de Combinación Cuadrática Completa (CQC, por sus siglas en inglés). Este criterio se encuentra disponible en casi todos los programas comerciales de análisis sísmico, a los cuales debe indicarse el porcentaje de amortiguamiento que se desea emplear (generalmente, 5 o 7 % en edificios convencionales).

Todos los criterios de superposición espectral se aplican tanto a los desplazamientos globales como a las deformaciones internas (desplazamientos de entrepiso o giros relativos en planta). También se emplean en esfuerzos internos, por ejemplo, para calcular los valores máximos del momento flector o de la fuerza cortante en los elementos.

Sin embargo, según algunos autores, ningún criterio de superposición debería emplearse para combinar las fuerzas externas, con el fin de obtener un único juego de fuerzas con el cual efectuar luego el análisis de fuerzas internas.

### **Modos de vibración significativos**

Como ya se indicó, la respuesta máxima de una estructura se puede estimar adecuadamente empleando sólo algunos modos. Por esta razón, es necesario identificar los modos adecuados, así como su número necesario.

Según un criterio muy difundido, la importancia de un modo puede definirse por la fuerza cortante en la base que tendrían el modo como respuesta a un espectro plano, es decir un espectro con  $S_a = \text{constante}$ . Como la fuerza cortante en la base es igual al producto  $(L_i^{*2}/M_i^*) S_{ai}$ ; según este criterio, la selección se hace directamente en función del valor de las masas efectivas.

Esto constituye un criterio acertado sólo cuando se calcula la respuesta a un espectro plano. Sin embargo, para un caso general, podría existir un modo que, teniendo menor valor de masa efectiva, tenga una fuerza cortante basal mayor, debido a una aceleración espectral elevada. A pesar de esto, este criterio es empleado frecuentemente.

Cada modo tiene una masa efectiva que, a su vez, se puede expresar como un porcentaje de la masa total del edificio. El número de modos a considerar se determina fijando un porcentaje mínimo que se debe alcanzar sumando las masas efectivas de los modos. Por ejemplo, algunos autores sugieren emplear los modos necesarios hasta completar con las masas efectivas por lo menos el 90 % de la masa de la estructura.

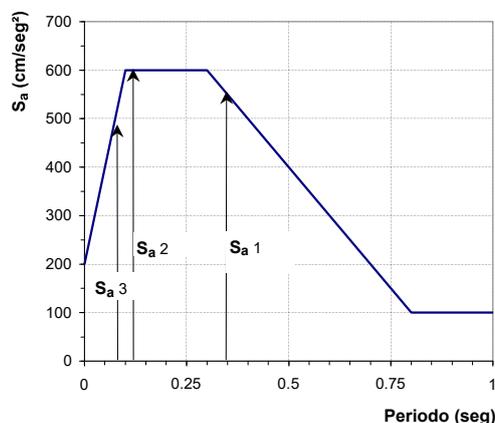
La tabla 5.5 muestra las masas efectivas para los tres modos traslacionales del edificio desarrollado como ejemplo.

**Tabla 5.5 Masas efectivas para tres modos traslacionales de un edificio**

	$L^*/M^*$	% M.Ef.
<b>Modo 1</b>	0.2794	97.882
<b>Modo 2</b>	0.0054	1.887
<b>Modo 3</b>	0.0007	0.231

Puede verificarse que la suma de las tres masas efectivas es igual a la masa total del edificio. Como se aprecia, el primer modo tiene una masa efectiva igual al 97.9% de la masa total y, entre los dos primeros modos, alcanzan 99.8 % de masa efectiva acumulada.

A manera de ejemplo, se muestran algunos resultados del análisis espectral para el edificio de tres pisos presentado en este acápite. Como representación del movimiento del suelo, se usa el espectro de pseudo aceleraciones que se muestra a continuación.



**Figura 5.96** Espectro suavizado para el análisis del edificio de tres pisos; se indican las aceleraciones espectrales correspondientes a los tres modos traslacionales

La tabla 5.6 muestra los parámetros generalizados para cada uno de los tres modos naturales.

**Tabla 5.6** Parámetros generalizados para tres modos naturales

	$L^*$	$M^*$	$L^*/M^*$	$L^{*2}/M^*$	% M.Ef.
<b>Modo 1</b>	0.2382	0.2031	1.1729	0.2794	97.882
<b>Modo 2</b>	-0.0250	0.1157	-0.2158	0.0054	1.887
<b>Modo 3</b>	0.154	0.3598	0.0428	0.0007	0.231
Suma de Masas Efectivas = 0.2854					100.00

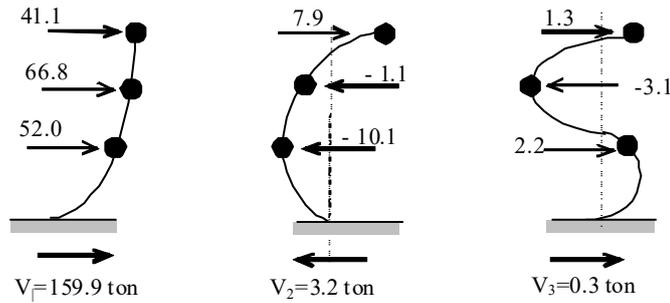
Se aprecia que, tanto el factor de participación como la masa efectiva, caen con el número del modo. La última columna indica la masa efectiva como un porcentaje de la masa total.

Los valores máximos de la aceleración, el desplazamiento y la fuerza cortante en la base se indican para cada modo en la tabla 5.7.

**Tabla 5.7** Valores máximos de aceleración, desplazamiento y fuerza cortante en la base

	Periodo (seg.)	$S_{ai}$ (cm/seg²)	$S_{di}$ (cm)	$V_i$ (ton)
<b>Modo 1</b>	0.3275	572.49	1.555	159.9
<b>Modo 2</b>	0.1059	600.00	0.170	3.2
<b>Modo 3</b>	0.0717	486.99	0.063	0.3

La figura 5.97 presenta el sistema de fuerzas y la fuerza cortante en la base correspondientes a cada modo.



**Figura 5.97** Sistemas de fuerzas correspondientes a los tres modos traslacionales de un edificio de tres pisos

Empleando el siguiente criterio de superposición

$$r_{MÁX} = 0.5 \left( \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2} \right) + 0.5 \left( |r_1| + |r_2| + \dots + |r_m| \right)$$

obtenemos, para la fuerza cortante en la base, el valor de  $V_{max} = 161.7$  ton

y para los desplazamientos de cada nivel, los valores presentados en la última columna de la tabla 5.8.

**Tabla 5.8** Desplazamientos modales y máximos para un edificio (cm)

Nivel	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Respuesta Máxima Esperada
1	1.261	0.026	0.003	1.275
2	1.620	0.003	-0.004	1.623
3	1.824	-0.037	0.003	1.844

# 6

## Respuesta inelástica de estructuras

---

Los sismos severos producen deformaciones tan importantes en las estructuras que, para asegurar su comportamiento elástico en estos eventos, sería necesario dotarlas de una elevada resistencia lateral. Dada la baja probabilidad de que durante la vida útil de una edificación común (50 ó 100 años) se presente un sismo severo (475 ó 950 años de periodo de retorno), se acepta, para la mayoría de las edificaciones, la posibilidad de comportamiento post elástico y daño durante estos sismos.

El comportamiento de las edificaciones durante sismos importantes es altamente complejo, no sólo por su carácter dinámico, sino fundamentalmente por el cambio de las características de la propia estructura debido al deterioro progresivo durante los segundos que dura el evento.

Tratar de anticipar el comportamiento de las edificaciones en sismos severos es un problema complejo; tiene, además, un elevado nivel de incertidumbre, no solo en lo que se refiere al movimiento esperado en el suelo de cimentación, sino también en lo referente a las propiedades mismas de la propia estructura. Por estas razones, para edificaciones convencionales, se emplean modelos sencillos con el fin de estudiar tendencias y obtener valores representativos del comportamiento general. Solo para estructuras importantes o con fines de investigación académica, se suelen hacer estudios más sofisticados en los que se pretende una mejor representación del problema, reconociendo siempre la naturaleza probabilística del mismo.

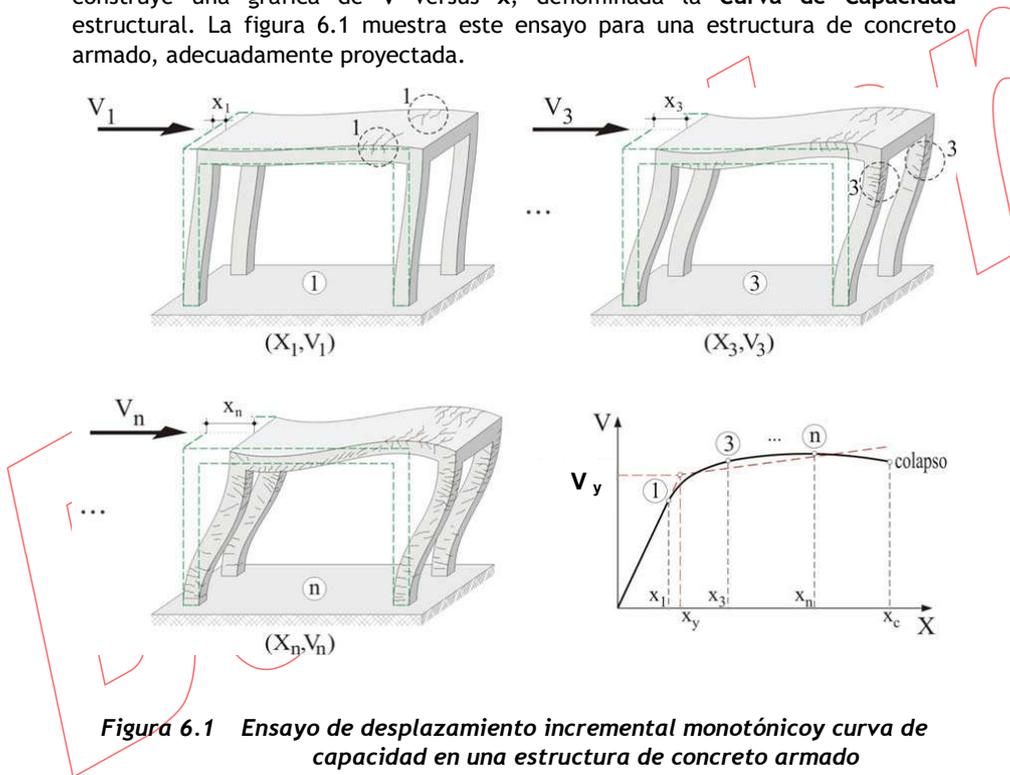
En este capítulo, se hace una introducción al comportamiento que tienen las estructuras más allá del rango elástico cuando son sometidas a sismos importantes. El capítulo se inicia con el estudio del comportamiento estructural bajo acciones incrementales estáticas y luego se estudia la respuesta dinámica bajo acciones sísmicas severas. Se presentan los principales parámetros involucrados en el comportamiento estructural, y se estudian sus relaciones y órdenes de magnitud.

## 6.1. Comportamiento inelástico bajo acciones incrementales lentas

### 6.1.1. Ensayos de desplazamiento incremental

Para estudiar el comportamiento de las estructura mas allá del rango elástico, se emplean ensayos de desplazamiento incremental que pueden ser monotónicos o cíclicos.

En un ensayo de desplazamiento incremental monotónico, la estructura se somete a un desplazamiento lateral, que crece muy lentamente en un solo sentido. Durante el ensayo, se registra los valores del desplazamiento,  $x$ , y la fuerza aplicada,  $V$ . Como se trata de un ensayo lento, la fuerza aplicada  $V$  constituye también la fuerza sobre el sistema estructural. Con los valores obtenidos, se construye una gráfica de  $V$  versus  $x$ , denominada la **Curva de Capacidad estructural**. La figura 6.1 muestra este ensayo para una estructura de concreto armado, adecuadamente proyectada.



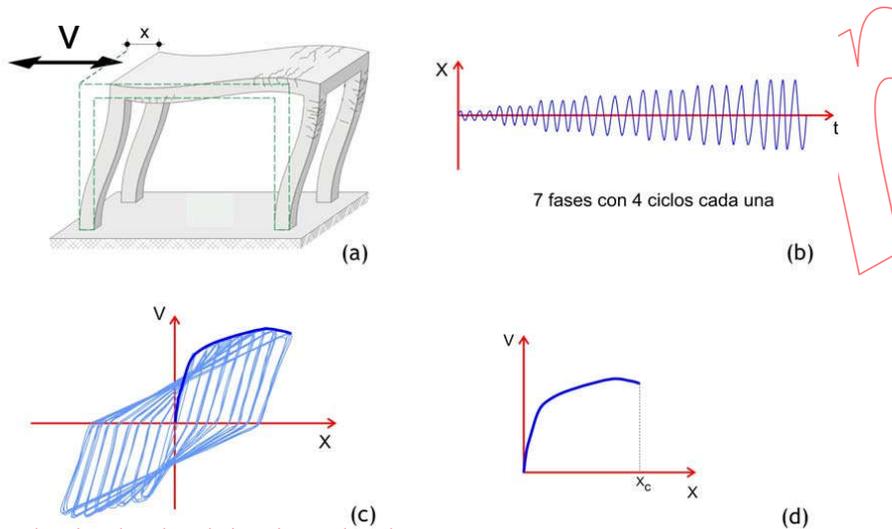
**Figura 6.1** Ensayo de desplazamiento incremental monotónico y curva de capacidad en una estructura de concreto armado

Para valores reducidos del desplazamiento, la estructura se comporta elásticamente, de manera tal que si la carga se retira, el desplazamiento desaparece. Para un determinado valor del desplazamiento, la estructura pierde su poder de recuperación e ingresa al rango inelástico. Conforme crece el desplazamiento lateral, van apareciendo zonas con marcado deterioro, que se conocen como rótulas plásticas y que, en la figura, se muestran numeradas. Si la

estructura ha sido adecuadamente proyectada y construida, podrá desarrollar un desplazamiento inelástico considerable gracias a una apropiada secuencia en la aparición de rótulas y a una adecuada capacidad de rotación de las mismas.

Cuando el nivel de deterioro es tal que el colapso es inminente, el ensayo se detiene; el desplazamiento correspondiente a ese instante se denomina desplazamiento de colapso y en la figura se ha representado como  $X_c$ .

Durante un ensayo cíclico incremental, la estructura se desplaza en ambos sentidos muy lentamente. El ensayo se organiza en fases, en cada una de las cuales se imponen algunos ciclos de desplazamiento con amplitud constante. Al pasar a una nueva fase, se incrementa la amplitud del desplazamiento. La figura 6.2 muestra un ensayo cíclico de desplazamiento controlado con 7 fases, cada una de 4 ciclos.

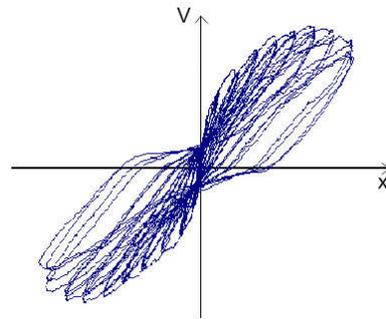


**Figura 6.2** Ensayo de desplazamiento incremental cíclico

El gráfico fuerza-desplazamiento (figura 6.2.c) muestra la naturaleza cíclica del ensayo. Cada lazo de la curva V-x corresponde a un ciclo del ensayo. Del ensayo cíclico, se puede obtener la Curva de Capacidad de la estructura empleando la envolvente de los tramos de desplazamiento inelástico junto a los tramos iniciales en el rango elástico (Figura 6.2.d).

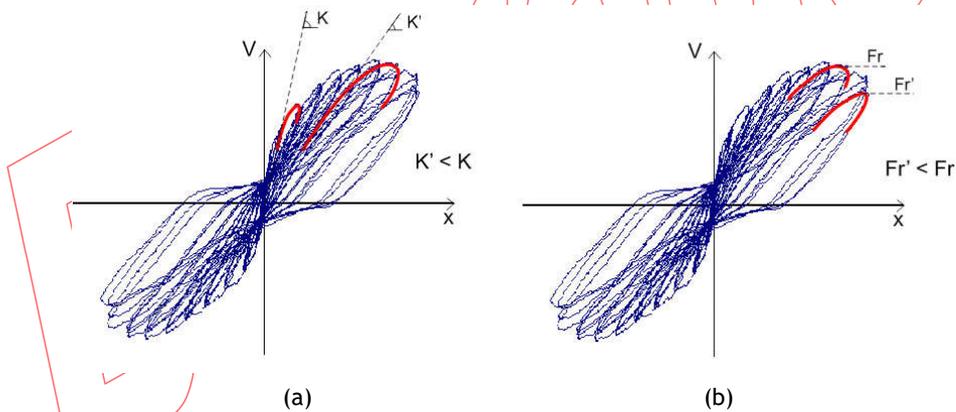
Los cambios en los lazos muestran la degradación de la rigidez y la resistencia estructural. Generalmente, la rigidez lateral va decreciendo conforme progresa el ensayo; en cambio, la fuerza máxima en cada ciclo suele crecer en las primeras fase y, luego de alcanzar su máximo valor, empieza a decrecer.

La figura 6.3 muestra los resultados de un ensayo de desplazamiento cíclico en una estructura de concreto armado.



**Figura 6.3 Ensayo incremental en un muro de concreto armado**

En este ensayo, la degradación de la rigidez lateral se manifiesta por el cambio de pendiente en los lazos de la curva V-x (Figura 6.4.a). La pérdida de resistencia lateral se observa comparando el lazo asociado con la carga máxima con un lazo posterior del ensayo (Figura 6.4.b).



**Figura 6.4 Degradación de la resistencia y rigidez del muro**

El ensayo de desplazamiento incremental cíclico permite estudiar la influencia del movimiento oscilatorio en la degradación de la estructura y, de alguna manera, constituye una mejor representación del comportamiento estructural en terremotos severos.

### 6.1.2. Espectro de capacidad

La relación fuerza-desplazamiento de una estructura se representa también mediante una curva desplazamiento versus fuerza por unidad de masa. Esta curva constituye el Espectro de Capacidad de la edificación y tiene, en el eje horizontal, el desplazamiento estructural, referido como desplazamiento espectral ( $S_d$ ), y en el eje vertical el cociente fuerza restitutiva/masa, denominado aceleración espectral ( $S_a$ ). La figura 6.5 muestra la obtención del Espectro de Capacidad sobre la base de la Curva de Capacidad.

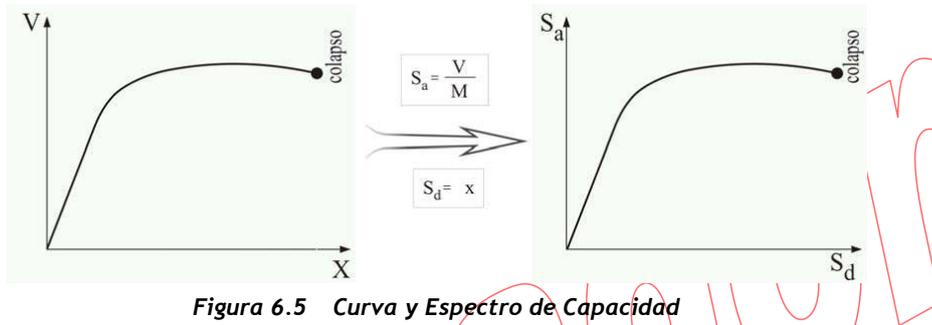


Figura 6.5 Curva y Espectro de Capacidad

Durante un sismo, la principal fuerza que recibe la masa de un edificio es la fuerza restitutiva del sistema estructural, ya que la fuerza de amortiguamiento suele ser pequeña. Por tanto, la aceleración máxima que puede desarrollar el edificio puede estimarse como el cociente entre la fuerza restitutiva máxima y la masa de la edificación. Así, mientras mayor sea la fuerza que desarrolle el sistema resistente a acciones laterales, mayor será la aceleración que experimentará la edificación durante el sismo.

Para una edificación en particular, la Curva de Capacidad muestra la fuerza máxima que recibiría la masa del edificio ante cada desplazamiento lateral del sistema estructural. El Espectro de Capacidad permite estimar la aceleración máxima que el edificio podría desarrollar ante cada desplazamiento lateral.

### 6.1.3. Curva de Capacidad y desempeño sismorresistente

Si durante un sismo los desplazamientos laterales de una estructura se mantienen en el rango elástico, resulta sencillo calificar el desempeño de la componente estructural como perfectamente operacional. Sin embargo, si la estructura incursiona en el rango inelástico la calificación se torna complicada. Mientras mayores son los desplazamientos inelásticos, mayor es el daño y la estructura se acerca más al colapso.

Una alternativa para facilitar la calificación del desempeño consiste en asignar cada nivel de desempeño a un sector de la curva de capacidad. La figura 6.6 muestra la sectorización propuesta por el SEAOC sobre la base del desplazamiento inelástico disponible en la estructura,  $\Delta_p$  en la figura 6.6.

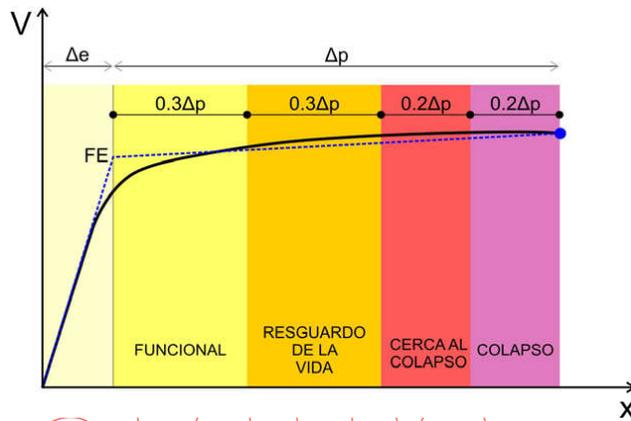


Figura 6.6 Curva de Capacidad y desempeño

Para determinar el desplazamiento inelástico disponible ( $\Delta_p$ ) es necesario identificar el inicio del comportamiento inelástico. Como luego de la primera rótula la pendiente de la curva de capacidad generalmente no cambia significativamente, se prefiere definir el ingreso al régimen inelástico mediante un punto más significativo, denominado fluencia efectiva (FE), representado por  $[x_y, V_y]$  en la figura 6.6.

Para definir el punto de fluencia efectiva existen alternativas como la de emplear un modelo bilineal que encierre un área igual a la que está bajo la curva de capacidad. Con el punto de fluencia efectiva ubicado, se determina el desplazamiento inelástico  $\Delta_p$ , se sectoriza la curva de capacidad y se asignan los niveles de desempeño.

Con la curva de capacidad sectorizada, el nivel de desempeño estructural ante un terremoto en particular, se logra ubicando el desplazamiento de respuesta en la curva de capacidad e identificando el nivel de desempeño correspondiente.

#### 6.1.4. Ductilidad, resistencia y energía

##### Ductilidad y resistencia

Mientras mayor sea el valor del desplazamiento de colapso ( $x_c$ ) en relación con el desplazamiento límite elástico ( $x_y$ ), la estructura tendrá mayor capacidad de deformación inelástica y, por consiguiente, mayor capacidad de sobrellevar los sismos severos. Esta capacidad de deformación más allá del límite elástico se denomina ductilidad.

Resulta difícil tratar de cuantificar la capacidad de deformación inelástica de las edificaciones, más aún durante los complicados ciclos de deformación en sismos fuertes. Sin embargo, se ha sugerido como una medida sencilla de la ductilidad estructural, el cociente entre el desplazamiento de colapso y el desplazamiento límite elástico. Este cociente se conoce como ductilidad estructural de desplazamientos ( $\mu_e$ ).

$$\mu_e = \frac{x_c}{x_y}$$

Otro parámetro que influye significativamente en el comportamiento de las edificaciones durante sismos severos es la resistencia lateral. Para estructuras sencillas de un grado de libertad, la resistencia lateral se define como la carga horizontal máxima que puede soportar una estructura en el rango elástico o, también, como la carga lateral que inicia el comportamiento inelástico. Este concepto se puede extender también a estructuras de varios grados de libertad, asumiendo una forma constante para el juego de cargas que actúan en los diferentes grados de libertad.

Si se acepta comportamiento lineal en el rango elástico, entonces la resistencia lateral se puede obtener como el producto de la rigidez lateral por el desplazamiento máximo elástico:

$$V_y = K x_y$$

Luego de la fase elástica, las estructuras generalmente pueden recibir fuerzas laterales superiores al valor de la fuerza máxima en el rango elástico,  $V_y$ . Este incremento de capacidad se denomina sobrerresistencia y en estructuras bien proyectadas suele ser importante. Una representación sencilla de la sobrerresistencia se logra por el cociente entre la fuerza lateral máxima que puede desarrollar una estructura y la fuerza que inicia el comportamiento inelástico. Representando la sobrerresistencia por  $\Omega_f$  tendremos:

$$\Omega_f = \frac{V_{máx}}{V_y}$$

### Energía de deformación

Durante la fase elástica del ensayo de desplazamiento incremental, el trabajo que produce la fuerza actuante se almacena directamente como energía de deformación elástica. Es gracias a esta energía de deformación que la estructura puede recuperar su forma original si la carga se retira.

Cuando el desplazamiento lateral excede el límite de comportamiento elástico ( $x_y$ ), parte del trabajo de la fuerza externa se almacena como energía de deformación y otra parte se disipa en el proceso de degradación general de la estructura. Si representamos por  $W_F$  al trabajo de la fuerza externa y por  $E_S$  y  $E_H$  a las energías elástica y disipada respectivamente, tendremos que:

$$W_F = E_S + E_H$$

La porción de la energía que se almacena en la estructura ( $E_S$ ) permite que ésta recupere parcialmente su configuración original en caso de que la fuerza se retire. La energía disipada ( $E_H$ ) resulta ser considerablemente mayor que la energía almacenada cuando la incursión inelástica es severa.

Para cuantificar la capacidad de deformación de una estructura, se ha sugerido emplear el trabajo total que se efectúa sobre ella durante un ensayo de desplazamiento incremental llevado hasta el colapso.

Este trabajo corresponde al área bajo la curva fuerza-desplazamiento. Mientras mayor sea el área bajo esta curva, mayor será la energía necesaria para hacer colapsar la estructura.

La figura 6.7 muestra el diagrama fuerza-desplazamiento para una estructura linealmente elástica en su primera fase y con comportamiento plástico perfecto en la fase inelástica

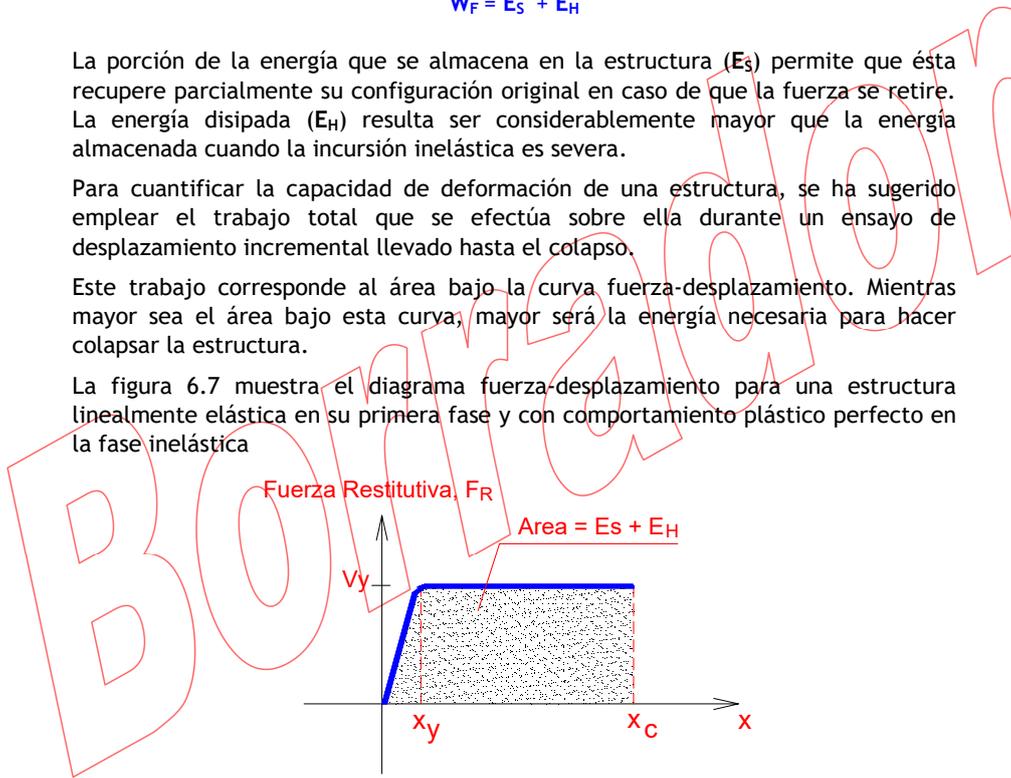


Figura 6.7 Modelo de comportamiento estructural elasto-plástico perfecto.

El área bajo la curva corresponde a la suma de un área triangular y otra rectangular; por lo tanto:

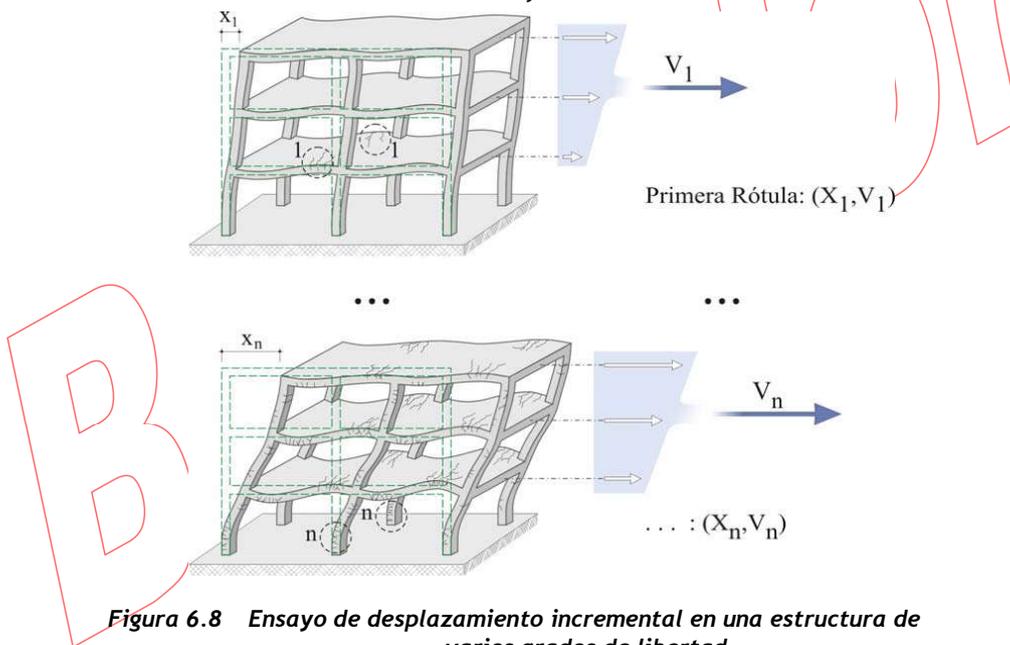
$$Area = E_S + E_H = \frac{x_y V_y}{2} + (x_c - x_y) V_y$$

Expresando el desplazamiento de colapso en función de la ductilidad de desplazamientos y el límite de desplazamiento elástico, tendremos:

$$E_S + E_H = \frac{1}{2} x_y V_y (2\mu_e - 1)$$

### 6.1.5. Estructuras de varios grados de libertad

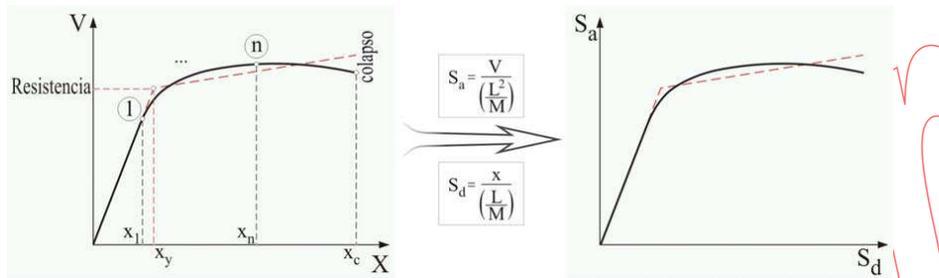
Para ensayar estructuras de varios grados de libertad bajo acciones incrementales estáticas, es necesario asumir un patrón para la distribución de los desplazamientos o fuerzas en la altura. Generalmente, se asume una distribución correspondiente al modo fundamental en la dirección del ensayo.



Como resultado del ensayo, se obtienen las historias de desplazamientos y fuerzas aplicadas en cada grado de libertad. La fuerza cortante en la base y el desplazamiento en el techo sirven para representar el comportamiento de la estructura mediante una curva de capacidad global.

También es posible representar la relación fuerza-desplazamiento en estructuras de varios grados de libertad mediante un Espectro de Capacidad. En este caso, los valores espectrales deben ser tales que, al ser afectados por el factor de participación ( $\mathcal{L}^*/M^*$ ) y la masa efectiva ( $\mathcal{L}^{*2}/M^*$ ), permitan estimar el desplazamiento del techo y la fuerza cortante en la base. Como la deformada del edificio puede cambiar de forma durante el ensayo incremental, el cálculo de  $\mathcal{L}^*$  y  $M^*$  se puede hacer usando la deformada correspondiente a cada punto de la curva de capacidad.

La figura 6.9 explica la construcción del espectro de capacidad para una estructura de varios grados de libertad, sobre la base de la curva de capacidad.

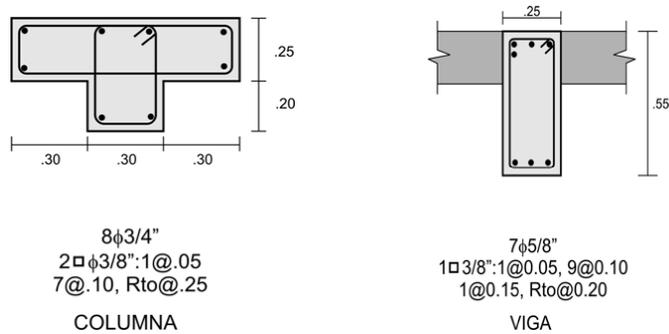


**Figura 6.9** Determinación del espectro de capacidad para una estructura de varios grados de libertad

En el terremoto de Atico del 2001 en el sur del Perú,  $M_w=8.4$ , las edificaciones educativas con las características mostradas en las figuras 6.10 y 6.11 no sufrieron daño.

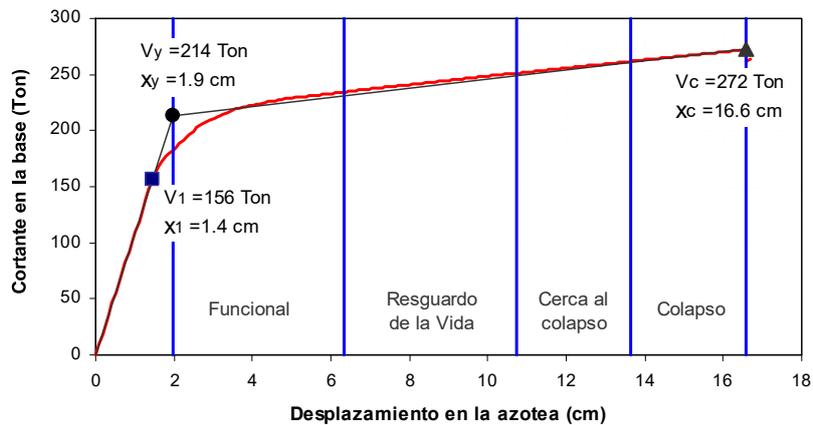


**Figura 6.10** Edificio educativo en el sur del Perú sin daño luego del terremoto de Atico en el 2001,  $M_w= 8.4$



**Figura 6.11 Detalle del refuerzo de columnas y vigas longitudinales**

Usando un modelo teórico de rótulas concentradas en los extremos de vigas y columnas, se desarrolló el ensayo de acciones incrementales y se obtuvo la curva de capacidad mostrada en la figura 6.12 con la sectorización propuesta por el SEAOC.



**Figura 6.12 Curva de capacidad sectorizada para el edificio educativo**

Los resultados indican que la primera rótula se produciría para un desplazamiento lateral de 1.4 cm y que el edificio podría alcanzar un desplazamiento máximo de 16.6 cm en el techo.

Inmediatamente después de la primera rótula, la pendiente de la curva de capacidad no muestra un cambio significativo; conforme crece el desplazamiento lateral se van desarrollando nuevas rótulas y la pendiente va decreciendo

paulatinamente hasta alcanzar el valor prácticamente constante del tramo recto final.

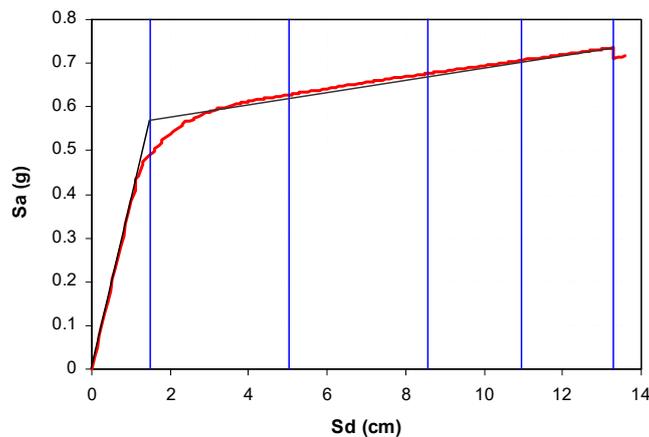
El punto de fluencia efectiva se determinó igualando el área encerrada por el modelo bilineal con el área de la curva de capacidad: se obtuvo, para el desplazamiento de fluencia efectiva, 1.9 cm y la ductilidad global se estimó en:

$$\mu_e = \frac{x_c}{x_y} = 8.4$$

Los valores de la fuerza cortante asociados con la primera rótula y con la fluencia efectiva fueron 156 y 214 ton; para la fuerza cortante máxima se obtuvo el valor de 272 ton. La sobrerresistencia respecto de la primera rótula y de la fluencia efectiva se estimó por los siguientes valores:

$$\Omega_f = \frac{V_c}{V_y} = 1.3 \qquad \Omega_1 = \frac{V_c}{V_1} = 1.7$$

Sobre la base de la curva de capacidad de la estructura, se obtuvo el espectro de capacidad mostrado en la figura 6.13.



**Figura 6.13** Espectro de capacidad para el edificio educativo peruano

## 6.2. Respuesta inelástica en el tiempo

Solo en los primeros segundos de un terremoto severo, las estructuras convencionales pueden mantenerse elásticas, sin daño. Conforme crece el movimiento del suelo, se incrementan las oscilaciones laterales hasta que, en algún instante, el sistema estructural abandona el régimen elástico y empieza a incursionar en régimen inelástico a costa de daño.

La severidad de las incursiones inelásticas que experimente una estructura en un sismo importante depende tanto de la intensidad del movimiento del suelo como de la resistencia lateral de la propia estructura. A menor resistencia lateral, mayores serán las incursiones inelásticas y mayor el daño.

En este acápite se estudia la relación entre la resistencia estructural y la severidad de las incursiones inelásticas usando modelos sencillos con el fin de estimar tendencias y órdenes de magnitud.

### 6.2.1. Factor de reducción de fuerza sísmica

Supongamos una estructura ideal que puede mantenerse en régimen elástico durante un sismo severo gracias a su gran resistencia lateral. La figura 6.14 muestra la respuesta de esta estructura durante un terremoto importante. Los valores máximos del desplazamiento y la fuerza restitutiva se indican como  $x_{\text{máx-elástico}}$  y  $F_{\text{máx-elástica}}$ , y frecuentemente se refieren como la demanda elástica.



Figura 6.14 Respuesta sísmica de una estructura ideal con resistencia infinita

Durante el movimiento de esta estructura ideal de resistencia muy grande, la fuerza restitutiva dependerá exclusivamente del desplazamiento lateral, de modo tal que, en el instante en que se produce el máximo desplazamiento lateral, la fuerza restitutiva alcanza también su valor máximo.

Si, además, suponemos comportamiento elástico lineal, los valores máximos de la fuerza restitutiva y el desplazamiento lateral se relacionarán por medio de la rigidez lateral del sistema ( $K$ ), como:

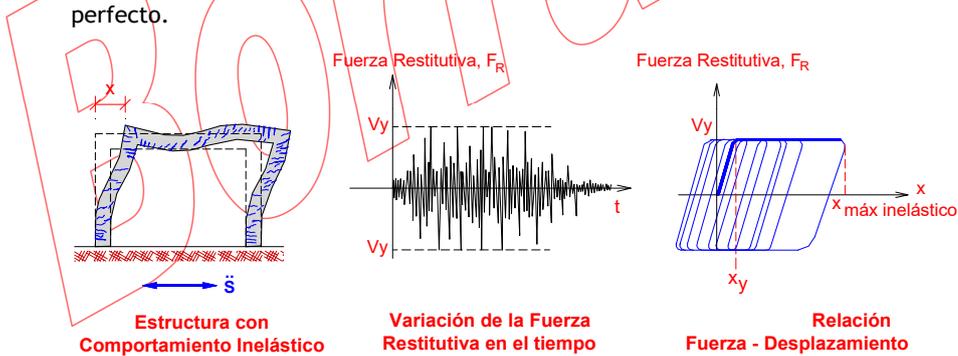
$$F_{\text{máx elástica}} = K x_{\text{máx elástico}}$$

En contraste con el modelo ideal de comportamiento perfectamente elástico, las estructuras reales tienen una resistencia definida que, para la generalidad de las edificaciones, suele ser menor que la fuerza máxima que el sismo severo impone en la estructura ideal perfectamente elástica. Para estas estructuras, se define el factor de reducción de fuerza sísmica ( $R\mu$ ) como el cociente entre la fuerza máxima impuesta por el sismo en la correspondiente estructura ideal elástica y la resistencia de la estructura ( $V_y$ ), es decir:

$$R\mu = \frac{F_{\text{máx elástica}}}{V_y}$$

En algún instante de un terremoto fuerte, el desplazamiento lateral de las estructuras con resistencia menor que la demanda elástica,  $R\mu > 1$ , sobrepasará el límite de comportamiento elástico y empezarán las incursiones en el rango inelástico. Durante los segundos que dura el movimiento, se sucederán múltiples intervalos en régimen inelástico cuya extensión dependerá tanto de la severidad del movimiento como de la resistencia de la propia estructura.

La figura 6.15 muestra el comportamiento que tendría una estructura bien proyectada, con una resistencia lateral menor que la fuerza máxima que el sismo impondría en una estructura ideal perfectamente elástica con igual masa, rigidez y amortiguamiento. Para los detalles, supongamos comportamiento elastoplástico perfecto.



**Figura 6.15 Respuesta sísmica de una estructura con resistencia limitada**

Como se aprecia, la fuerza restitutiva alcanza su valor máximo, solo en algunos instantes del movimiento durante las incursiones inelásticas. El gráfico fuerza-desplazamiento muestra los complejos cambios de régimen durante el movimiento.

### 6.2.2. Demandas sísmicas de ductilidad y energía

Cuando una estructura tiene una resistencia menor que la necesaria para garantizar su comportamiento elástico durante un sismo severo, en algún instante del movimiento abandonará el régimen elástico y, dependiendo de si ha sido o no apropiadamente proyectada y construida, podrá seguir desplazándose en sucesivos intervalos, tanto en régimen elástico como inelástico.

Dependiendo de la severidad del sismo y de la resistencia de la propia estructura, las incursiones inelásticas podrán ser de mayor o menor importancia. A mayor severidad del movimiento sísmico, las incursiones inelásticas serán mayores. A mayor resistencia lateral, la estructura retardará su ingreso en régimen inelástico y las incursiones en este régimen serán menores.

Durante el movimiento, se suceden múltiples intervalos en régimen inelástico, intercalados con intervalos en régimen elástico. Aunque resulta difícil cuantificar la severidad de esta demanda, se han propuesto diferentes índices, algunos basados en desplazamientos y otros en la energía disipada.

El más sencillo y difundido de los índices para cuantificar la demanda sísmica inelástica se denomina ductilidad demandada de desplazamientos ( $\mu$ ), y se calcula como el cociente entre el desplazamiento máximo alcanzado durante el movimiento y el desplazamiento que inicia el comportamiento inelástico.

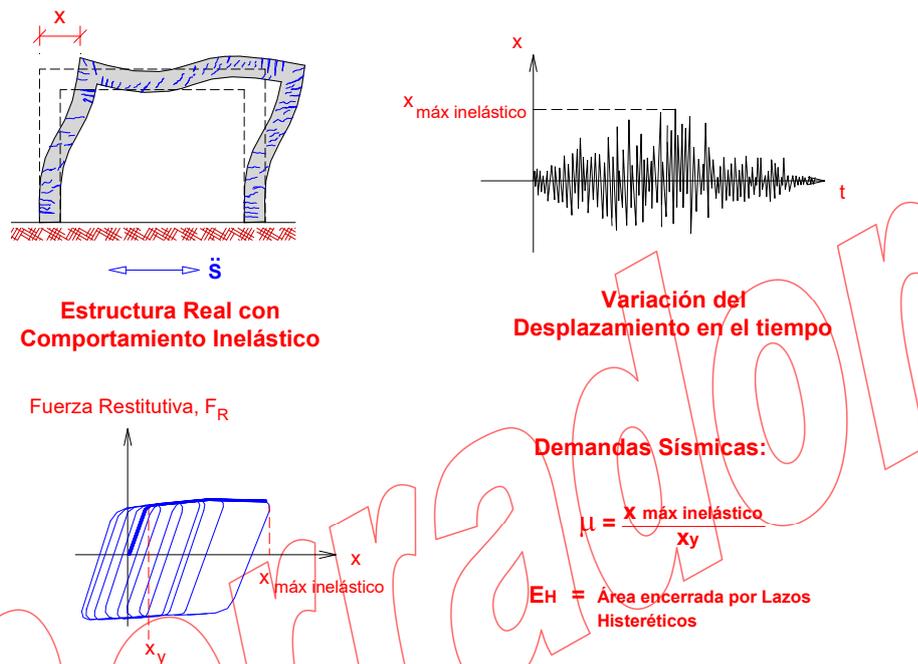
Si se representa el máximo de la historia de desplazamientos por  $x_{\text{máx inelástico}}$ , y el desplazamiento límite elástico por  $x_y$ , la demanda sísmica de ductilidad se expresa como:

$$\mu = \frac{x_{\text{máximo inelástico}}}{x_y}$$

Durante un sismo severo, los intervalos en régimen inelástico se suceden junto a intervalos de retorno parcial al régimen elástico, originando una compleja relación fuerza-desplazamiento ( $F_R-X$ ). El trabajo de la fuerza restitutiva a lo largo del desplazamiento se transforma tanto en energía de deformación recuperable como en energía que disipa la estructura en forma de daño estructural durante el agrietamiento y deterioro general. La energía que se disipa en forma de daño se denomina energía histerética. Se representa por  $E_H$  y se puede estimar como el área bajo los múltiples lazos en el diagrama de histéresis  $F_R-X$ .

La energía histerética disipada durante el movimiento, usualmente expresada por unidad de masa ( $E_H / M$ ), constituye una medida de la demanda sísmica que, además de incorporar la severidad del desplazamiento lateral, toma en cuenta el proceso de degradación propio de los sucesivos lazos de histéresis.

La figura 6.16 resume el comportamiento inelástico de una edificación sometida a un sismo severo. La estructura ha sido construida apropiadamente, y su capacidad de comportamiento inelástico es superior a las demandas de ductilidad y disipación de energía. Se presenta la historia de desplazamientos, el diagrama fuerza-desplazamiento y los índices empleados para cuantificar la severidad de la demanda inelástica.



**Figura 6.16 Demandas sísmicas de ductilidad y energía histerética**

La ductilidad y la energía disipada resumen la severidad de las demandas sísmicas de comportamiento inelástico. Es necesario, ahora, estudiar en conjunto las formas de energía involucradas durante el movimiento de una estructura.

### 6.2.3. Balance de energía

La energía que recibe una estructura, desde su base, durante un sismo severo, se transforma en movimiento o se disipa por medio de complejos mecanismos de amortiguamiento y deterioro progresivo. Veamos el caso de una estructura sencilla de un grado de libertad dinámico.

La ecuación de equilibrio dinámico para esta estructura de un grado de libertad sometida a la aceleración del suelo  $s(t)$  es:

$$M \ddot{x}(t) + F_D(t) + F_R(t) = -Ms(t)$$

En esta ecuación, cada uno de los términos representa una fuerza, la misma que realizará un trabajo a lo largo del movimiento. Al integrar esta ecuación respecto del desplazamiento relativo, desde el inicio del movimiento hasta un desplazamiento genérico,  $x$ , se obtiene la siguiente relación entre los trabajos de las fuerzas involucradas:

$$M \int_0^x \ddot{x}(t) dx + \int_0^x F_D(t) dx + \int_0^x F_R(t) dx = -M \int_0^x s(t) dx$$

Como  $dx = \dot{x}(t)dt$ , tendremos que:

$$M \int_0^t \ddot{x}(t) \dot{x}(t) dt + \int_0^t F_D(t) \dot{x}(t) dt + \int_0^t F_R(t) \dot{x}(t) dt = -M \int_0^t s(t) \dot{x}(t) dt$$

Esta expresión se denomina ecuación de balance de energías. A diferencia de la ecuación de equilibrio dinámico que representa una relación instantánea de fuerzas, la ecuación de balance de energía constituye una síntesis del movimiento desde el inicio hasta el instante en que se considera.

El primer término del lado izquierdo de la ecuación de balance corresponde a la energía cinética de la estructura, que se puede expresar como:

$$E_K(t) = M \int_0^t \ddot{x}(t) \dot{x}(t) dt = \frac{M}{2} (\dot{x}(t)^2 - \dot{x}(0)^2)$$

El segundo término representa la energía disipada por amortiguamiento desde el inicio del movimiento hasta el instante considerado ("t"):

$$E_D(t) = \int_0^t F_D(t) \dot{x}(t) dt$$

El tercer término corresponde al trabajo de la fuerza restitutiva. Una parte de este trabajo se almacena como energía de deformación recuperable,  $E_S$ , y otra parte,  $E_H$ , se va disipando en los sucesivos ciclos de comportamiento inelástico:

$$E_S(t) + E_H(t) = \int_0^t F_R(t)x(t)dt$$

El segundo miembro de la ecuación de balance representa la energía total de entrada, que la estructura recibe del suelo desde el inicio del movimiento hasta el instante "t". Representando esta energía de entrada como  $E_I$ , tendremos:

$$E_I(t) = -M \int_0^t s(t)x(t)dt$$

Simbólicamente, la ecuación de balance para un intervalo de tiempo que se inicia con el movimiento y se extiende hasta un instante genérico "t", quedará expresada como:

$$E_K(t) + E_D(t) + E_S(t) + E_H(t) = E_I(t)$$

Consideremos ahora esta ecuación para todo el evento. Luego de que el movimiento termina la estructura, regresa al reposo (velocidad nula) y, por consiguiente, la energía cinética desplegada durante todo el evento será:

$$E_K = \frac{M}{2} (\dot{x}_{final}^2 - \dot{x}_{inicial}^2) = 0$$

Cuando termina el movimiento la estructura se encuentra en reposo y, aunque podría o no tener una deformación lateral, ya no tiene energía de deformación elástica que le permita una posterior recuperación; es decir  $E_S = 0$ .

Por lo tanto, la ecuación de balance del movimiento completo será:

$$E_D + E_H = E_I$$

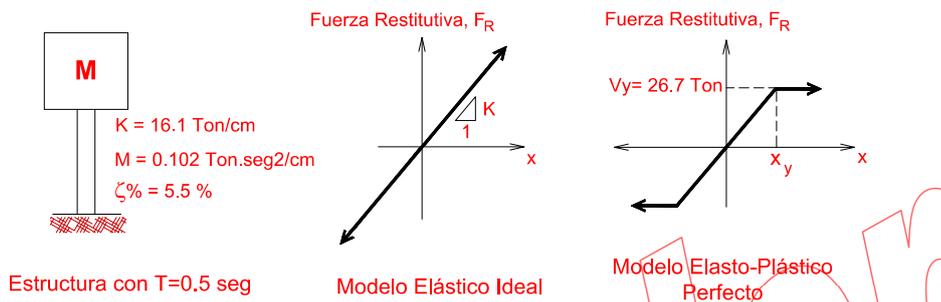
Esta ecuación muestra que parte de la energía total de entrada,  $E_I$ , se disipa mediante amortiguamiento y parte como energía histerética, causante directa del daño.

La manera tradicional de reducir el daño consiste en incrementar la resistencia lateral de las estructuras para ampliar el rango de comportamiento elástico y disminuir, así, las incursiones inelásticas. Otra alternativa consiste en incrementar la energía disipada por amortiguamiento,  $E_D$ , incorporando al sistema amortiguadores mecánicos.

El daño estructural también puede controlarse reduciendo la energía total de entrada mediante sistemas de aislamiento en la base de las estructuras.

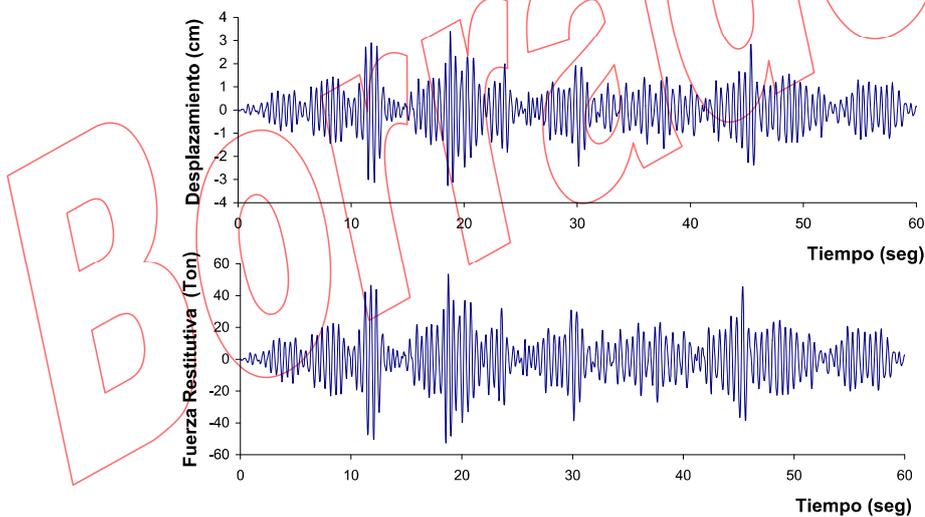
A manera de ejemplo, se estudia la respuesta de una estructura de 0.5 seg. de periodo, con 100 Ton de peso y 5.5% de amortiguamiento, sometida a la componente N08E del terremoto de Lima del 10-X-1974, escalada a 0.4g (en adelante, LIMA-X-74).

La figura 6.17 muestra el modelo elástico lineal asumido para la estructura ideal de resistencia infinita junto al modelo elasto-plástico empleado para estudiar las demandas de ductilidad y energía.



**Figura 6.17 Modelos de comportamiento elástico e inelástico**

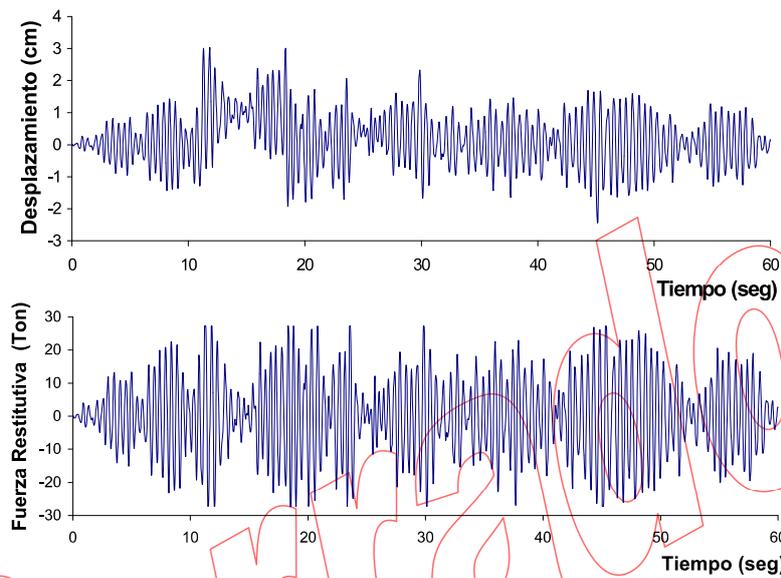
Las historias de desplazamiento y fuerza restitutiva, que corresponden a la estructura elástica de resistencia infinita, se muestran en la figura 6.18; los valores máximos de estas historias fueron 3.32 cm y 53.4 Ton.



**Figura 6.18 Respuesta de la estructura ideal linealmente elástica con  $T=0.5$  seg, sometida a la señal LIMA-X-74; desplazamiento máximo=3.32 cm,  $F_R$  máx elástica= 53.4 Ton**

Veamos ahora la respuesta de la estructura de igual masa, rigidez y amortiguamiento que la estructura ideal, pero cuya resistencia lateral corresponde a un factor de reducción de fuerza sísmica de  $R_{\mu}=2$ , es decir  $V_y = 53.4/2 = 26.7$  Ton. El correspondiente desplazamiento de fluencia será entonces  $x_y = 3.32/2=1.66$  cm.

La figura 6.19 muestra las historias de desplazamiento y fuerza restitutiva en esta estructura con resistencia definida.

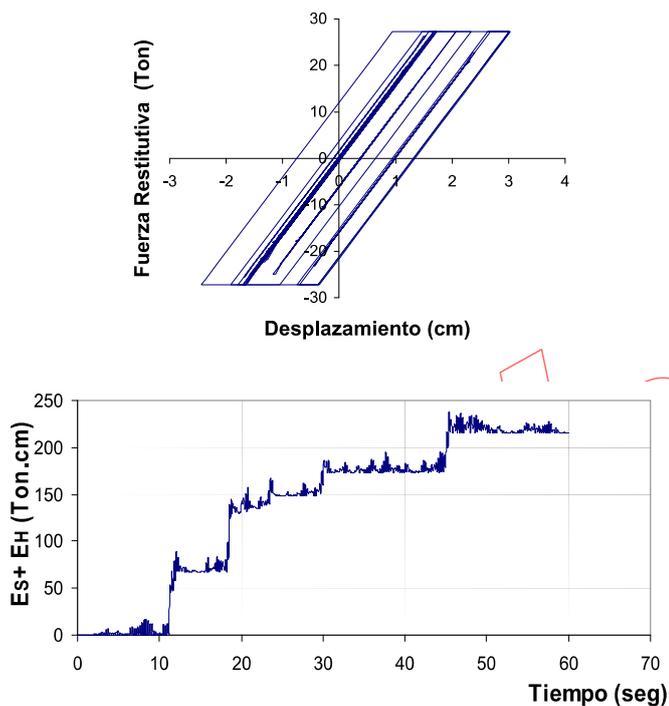


**Figura 6.19** Historia de desplazamiento y fuerza restitutiva para la estructura de  $T=0.5$  seg y Factor de Reducción  $R_{\mu}=2$  ( $V_y=26.7$  Ton) sometida a la señal LIMA-X-74; desplazamiento máximo = 3.09 cm

El desplazamiento máximo que alcanzó esta estructura inelástica fue 3.09 cm.; como el desplazamiento de fluencia es  $x_y = 1.66$ cm, la ductilidad demandada será  $\mu = 3.09/1.66 = 1.86$ .

En la historia de fuerza restitutiva, se observa que el valor máximo,  $V_y = 26.7$ ton, se alcanza en varios instantes de la respuesta, pero nunca se sobrepasa, ya que se ha supuesto una relación fuerza-desplazamiento del tipo elasto-plástico perfecto.

A continuación, se muestran los ciclos de histéresis durante el movimiento, junto a la variación en el tiempo de la suma de energías  $E_S+E_H$ .



**Figura 6.20** Diagramas desplazamiento-fuerza restitutiva y variación en el tiempo de la suma de energías  $E_S+E_H$  para la estructura con  $T=0.5$  seg, y Factor de Reducción  $R_\mu=2$  sometida a la señal LIMA-X-74

Se aprecia que la suma de energías,  $E_S+E_H$ , crece a medida que transcurre el movimiento. Al final, cuando la estructura ha regresado al equilibrio y no tiene deformaciones recuperables, esta suma corresponde íntegramente a la energía total disipada por histéresis,  $E_H = 215$  ton cm., valor que expresado por unidad masa es de  $2108 \text{ cm}^2/\text{seg}^2$ .

### 6.3. Espectros inelásticos

La respuesta máxima de un conjunto de estructuras inelásticas sometidas a un movimiento en su base puede organizarse en espectros inelásticos de dos tipos. Dependiendo de la forma como se establece la resistencia lateral de las estructuras, los espectros pueden ser de resistencia constante o de ductilidad constante. En ambos casos, el movimiento se representa por un acelerograma y se asume la misma fracción de amortiguamiento crítico para todas las estructuras.

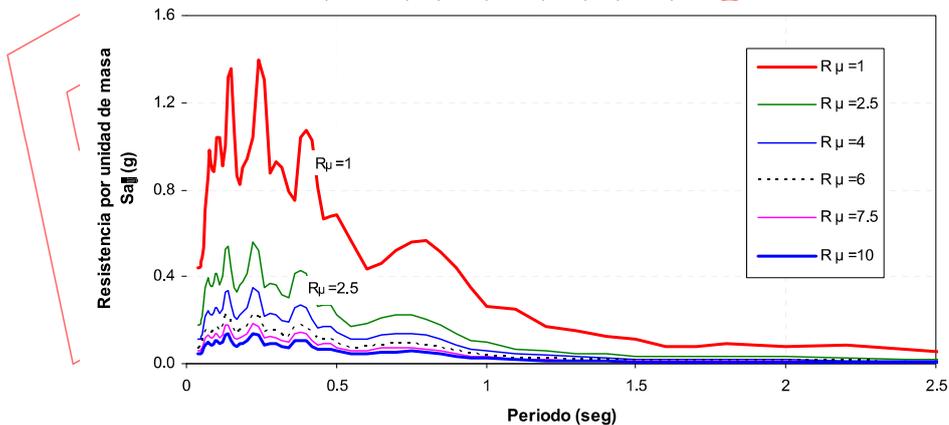
Además de los valores espectrales de desplazamiento, velocidad y aceleración, se construyen curvas de resistencia requerida por unidad de masa. Esta resistencia requerida por unidad de masa se representa por  $Sa_y$  y puede expresarse en función del desplazamiento de fluencia como:

$$Sa_y = \frac{V \cdot y}{M} = \frac{K \cdot x}{M} = \omega^2 \cdot x$$

#### Espectros de resistencia constante

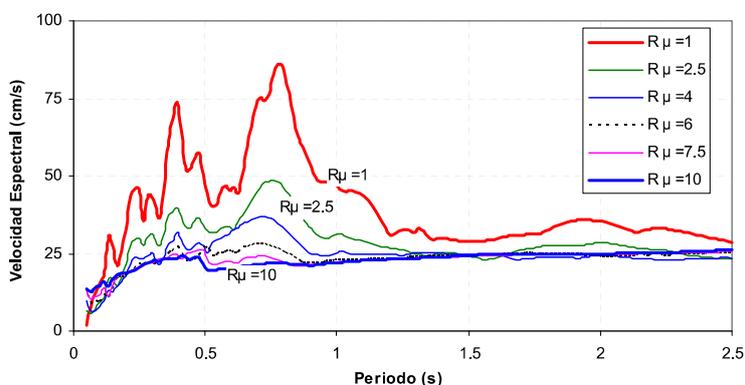
Cuando la resistencia lateral se define empleando un juego predeterminado de factores de reducción  $R_{\mu 1}, R_{\mu 2}, \dots, R_{\mu n}$ , los valores espectrales se organizan en curvas; cada una de las cuales corresponde a un factor determinado. La respuesta elástica se incluye en la curva  $R_{\mu 1} = 1$ . El juego de curvas constituye el espectro de resistencia constante del acelerograma empleado.

La figura 6.21 muestra el espectro de resistencia requerida por unidad de masa, para un acelerograma peruano obtenido en el terremoto de 1970, escalado a 0.4g.; se empleó 5% de amortiguamiento y factores de reducción  $R_{\mu} = 1, 2.5, 4, 6, 7.5, 10$ .



**Figura 6.21** Demandas de resistencia para factores de reducción de fuerza sísmica de  $R_{\mu}=1, 2.5, 4, 6, 7.5$  y  $10$ ; señal mayo 70, componente N08E, escalada a 0.4 g

Para obtener los valores espectrales correspondientes a un periodo en particular (juego de puntos en la intersección de las curvas con una línea vertical), se calcula primero la respuesta en el tiempo de la estructura elástica correspondiente y se anota el valor de la fuerza restitutiva máxima elástica ( $FR_{\text{máx elá}}$ ). Luego, se define la resistencia lateral de las estructuras inelásticas como el cociente de la fuerza restitutiva máxima elástica y los factores de reducción:  $V_{y i} = FR_{\text{máx elá}} / R_{\mu i}$ . Finalmente, se determina la respuesta de las estructuras inelásticas y se seleccionan los valores máximos. La figura 6.22 presenta el espectro de velocidades correspondiente a la señal y factores de reducción de la figura anterior.

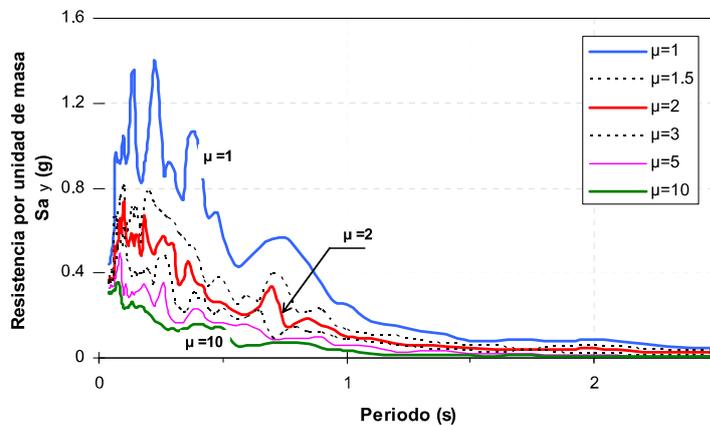


**Figura 6.22** Espectro de velocidades para factores de reducción  $R_{\mu}=1, 2.5, 4, 6, 7.5$  y  $10$ ; señal mayo 70, N08E, escalada a  $0.4 g$

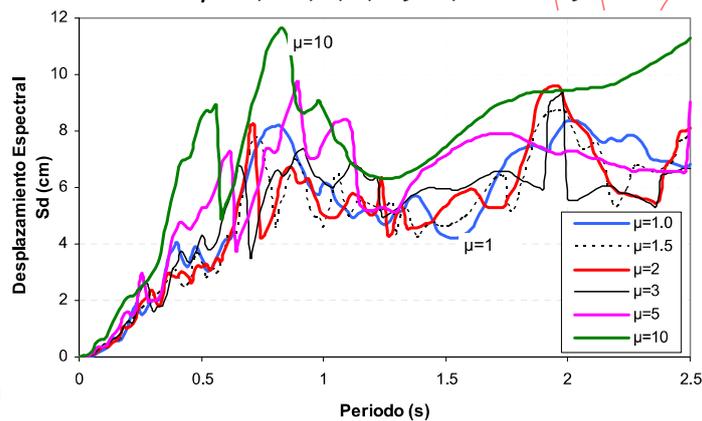
### Espectros de ductilidad constante

Un espectro de este tipo muestra la respuesta máxima de estructuras con igual amortiguamiento, en las cuales la ductilidad demandada alcanza valores preestablecidos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . Los valores espectrales se organizan en curvas; cada una de las cuales corresponde a un valor de ductilidad  $\mu_i$ . La respuesta elástica se incluye en la curva correspondiente a  $\mu_1 = 1$ .

La figura 6.23 muestra los espectros de resistencia requerida correspondientes a una señal peruana representativa, escalada a  $0.4 g$ ; se usó 5 % de amortiguamiento y valores de ductilidad  $\mu = 1, 1.5, 2, 3, 5, 10$ . La figura 6.24 corresponde al espectro de desplazamientos.



**Figura 6.23** Espectro de resistencia demandada para valores de ductilidad constante  $\mu = 1, 1.5, 2, 3, 5$  y  $10$ ; señal mayo 70 N08E



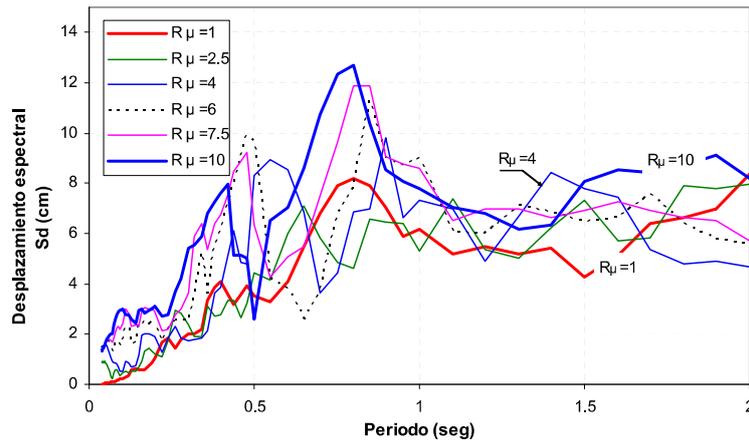
**Figura 6.24** Espectro de desplazamientos para valores de ductilidad constante  $\mu = 1, 1.5, 2, 3, 5$  y  $10$ ; señal mayo70, N08E

Para obtener los valores espectrales asociados con un periodo en particular, se obtiene primero la respuesta de la estructura elástica correspondiente y se anota el valor máximo de la fuerza restitutiva elástica ( $FR_{\text{máx elá}}$ ). Luego, se deben identificar las estructuras inelásticas que, teniendo una resistencia menor que  $FR_{\text{máx elá}}$ , resulten demandadas con valores de ductilidad iguales a los prefijados  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ .

La resistencia de las estructuras que tendrán demandas prefijadas de ductilidad se obtiene por aproximaciones sucesivas partiendo de valores de resistencia acordes con la demanda elástica ( $FR_{\text{máx elá}}$ ) y a las ductilidades objetivo. Luego del proceso iterativo, se cuenta con las estructuras inelásticas y sus historias de respuesta, a partir de cuyos valores máximos se obtienen los valores espectrales que corresponden a un periodo en particular (juego de puntos en la intersección de las curvas con la línea vertical de periodo definido).

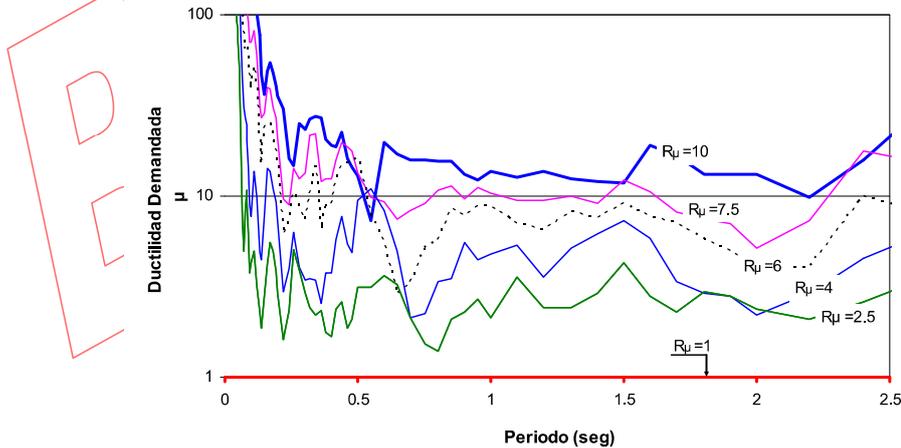
#### 6.4. Relación ductilidad - factor de reducción

La figura 6.25 muestra los desplazamientos espectrales de estructuras sometidas a un acelerograma de un terremoto de subducción, escalado a 0.4g; los valores corresponden a estructuras elásticas ( $R_\mu=1$ ) y a estructuras inelásticas cuya resistencia se ha obtenido usando factores de reducción de  $R_\mu=2.5, 4, 5, 7.5$  y 10.



**Figura 6.25** Espectro de desplazamientos totales para factores de reducción  $R_\mu=1, 2.5, 4, 6, 7.5$  y 10; señal mayo 70 N08E

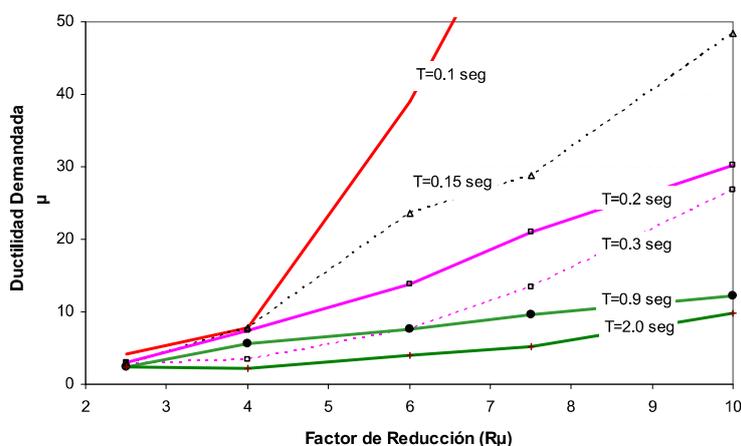
Para cada una de las estructuras del espectro anterior, la figura 6.26 muestra las demandas de ductilidad a las que estarían sometidas.



**Figura 6.26** Demandas de ductilidad para factores de reducción de fuerza sísmica de  $R_\mu=1, 2.5, 4, 6, 7.5$  y 10; señal mayo 70 N08E

Se observa que, en la zona de periodos cortos ( $0, \approx 0.3$ ), las demandas de ductilidad,  $\mu$ , son elevadas y numéricamente muy altas en relación con los valores del factor de reducción de fuerza sísmica,  $R_{\mu}$ . En cambio, para periodos de 0.5 seg. o más, la ductilidad demandada es moderada y numéricamente comparable al factor de reducción.

El gráfico 6.27 muestra la relación  $\mu - R_{\mu}$  extraída del espectro anterior para 6 estructuras específicas cuyos periodos están entre 0.1 y 2 seg.



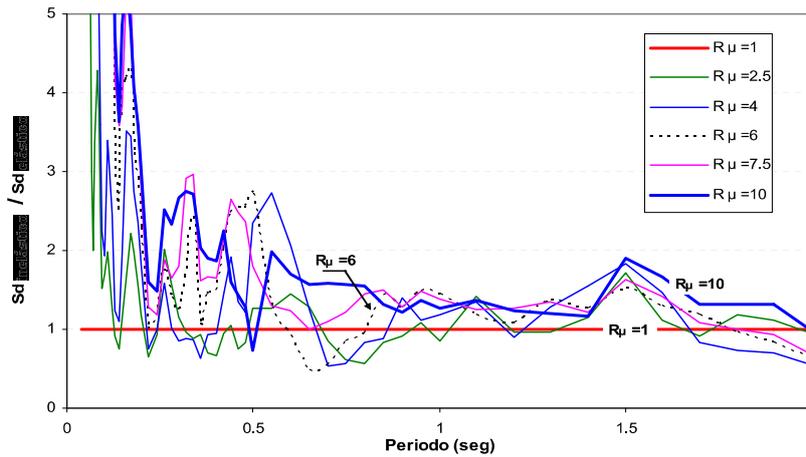
**Figura 6.27** Factor de reducción y ductilidad demandada para estructuras en las tres zonas del espectro; señal mayo 70 NOBE

Se observa que, para las estructuras de periodo  $T=0.9$  seg. y  $T=2$  seg (curvas inferiores en la figura 6.27), los valores de  $R_{\mu}$  se mantienen aproximadamente proporcionales a los valores de  $\mu$ . En cambio, para las estructuras de periodos cortos (curvas superiores), la figura sugiere que la ductilidad crece con una potencia de  $R_{\mu}$ .

Los ejemplos estudiados muestran que la relación  $\mu - R_{\mu}$  es compleja y fuertemente dependiente de la zona de periodos que se considere. Para fines prácticos, es necesario representar esta relación mediante expresiones sencillas en cada zona del espectro.

### Expresiones sencillas para la relación $\mu - R_\mu$

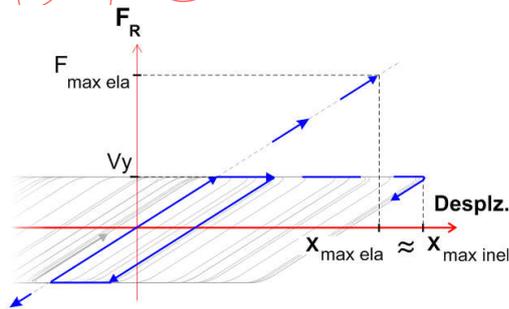
Usando los desplazamientos espectrales presentados en la figura 6.25, se determinó el cociente entre el desplazamiento de cada estructura inelástica asociada con un valor de  $R_\mu$  y el desplazamiento de la correspondiente estructura elástica del mismo periodo. Los resultados se muestran en la figura 6.28.



**Figura 6.28** Factor de amplificación de la respuesta inelástica con relación a la respuesta elástica para factores de reducción de  $R_\mu=1, 2.5, 4, 6.0, 7.5$  y  $10$ ; señal mayo 70 N08E

Para periodos medios y largos, 0.5 en adelante, se observa que el cociente entre los desplazamientos espectrales, correspondientes a una estructura inelástica y a otra estructura elástica del mismo periodo, es un valor cercano a la unidad. Por tanto, con el fin de obtener una expresión sencilla que relacione la ductilidad demandada y el factor reducción, podemos suponer que ambos desplazamientos tienen el mismo valor.

La figura 6.29 muestra la historia fuerza-desplazamiento para dos estructuras del mismo periodo, una elástica y la otra inelástica; los trazos resaltados corresponden a los intervalos en que se producen los desplazamientos máximos. Como ambas estructuras son de periodo largo, además de tener el mismo valor de periodo, sus desplazamientos máximos alcanzan valores similares.



**Figura 6.29** Relaciones fuerza-desplazamiento para dos estructuras con el mismo valor de periodo largo, una elástica y otra inelástica

El desplazamiento máximo de la estructura inelástica en función de la ductilidad alcanzada y del desplazamiento de fluencia se expresa como:

$$X_{\text{máx inelástico}} = \mu X_y$$

A su vez, el desplazamiento de fluencia se puede expresar en función de la resistencia y la rigidez como  $x_y = V_y / K$ . Por tanto, tendremos:

$$X_{\text{máx inelástico}} = \mu V_y / K$$

Similarmente, el desplazamiento máximo de la estructura elástica se puede representar en términos de la máxima fuerza elástica alcanzada y la rigidez como:

$$X_{\text{máx elástico}} = F_{R \text{ máx elástica}} / K$$

Como se trata de estructuras de periodo largo, podemos igualar sus desplazamientos máximos:

$$\mu V_y / K = F_{R \text{ máx elástica}} / K$$

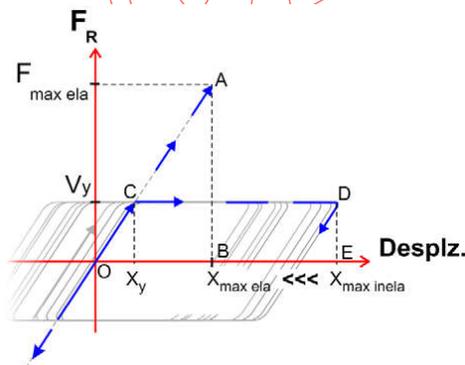
Recordando que el factor de reducción se define como  $R_\mu = F_{R \text{ máx elástica}} / V_y$ , tendremos finalmente:

$$\mu = R_\mu$$

Esta expresión permite estimar la ductilidad de desplazamientos demandada en una estructura de periodo medio o largo, cuya resistencia corresponde a valores de reducción  $R_\mu$ , moderados, como los empleados en este acápite.

Veamos ahora qué sucede en la zona de periodos cortos. Se observó que, en esta zona, los desplazamientos de las estructuras inelásticas son notoriamente mayores que los correspondientes desplazamientos de las estructuras elásticas (figura 6.28).

La figura 6.30 muestra los desplazamientos y fuerzas máximas en dos estructuras de igual periodo. Una estructura tiene comportamiento linealmente elástico y, para la otra, se ha supuesto comportamiento elastoplástico perfecto. Como se trata de estructuras de periodo corto, el desplazamiento máximo de la estructura inelástica es significativamente mayor que el correspondiente desplazamiento de la estructura elástica.



**Figura 6.30**  
**Relación fuerza- desplazamiento**  
**para una estructura elástica y**  
**otra inelástica de igual periodo en**  
**la zona de aceleraciones**

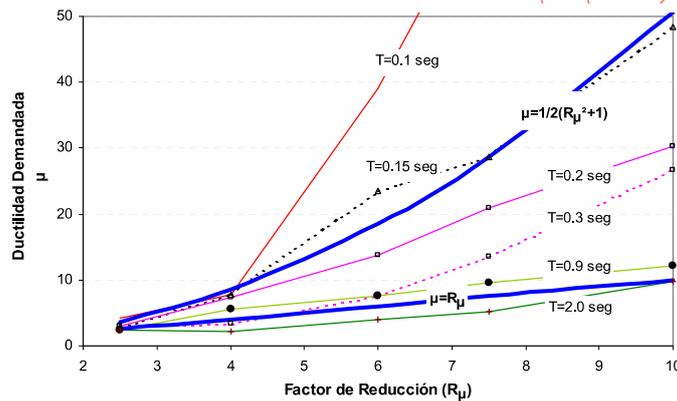
Con el fin de obtener una expresión sencilla para la relación  $\mu - R_\mu$ , se puede suponer que la energía de deformación máxima que alcanza la estructura elástica es similar al trabajo que la estructura inelástica tendría que desarrollar en un recorrido continuo desde su posición indeformada hasta alcanzar el desplazamiento máximo. Con relación a figura 6.30, esto equivale a igualar el área del triángulo OAB con el área del cuadrilátero OCDE:

$$\frac{F_{\text{máx ela}} X_{\text{máx ela}}}{2} = \frac{V_y x_y}{2} + V_y (\mu x_y - x_y)$$

expresando la fuerza y el desplazamiento máximos de la estructura elástica en función de  $x_y$ ,  $V_y$  y  $R_\mu$ , tendremos:

$$\mu = \frac{1}{2}(R_\mu^2 + 1)$$

La figura 6.31 muestra las dos expresiones sencillas obtenidas para la relación  $\mu - R_\mu$ , junto a los valores para 6 estructuras sometidas a un acelerograma registrado en suelo duro, durante un terremoto de subducción.



**Figura 6.31** Relación  $\mu - R_\mu$ , expresiones sencillas y 6 casos de estructuras entre 0.1 y 2 seg de periodo

Se observa que las curvas correspondientes a  $T=0.9$  y  $T=2.0$  seg pueden ser aceptablemente aproximadas por la expresión  $\mu = R_\mu$ , deducida para períodos largos. Sin embargo, las curvas correspondientes a las estructuras de periodo corto muestran diferencias importantes respecto de la ecuación  $\mu = (R_\mu^2 + 1) / 2$ .

También se obtienen expresiones sencillas por ajustes estadísticos empleando grupos de acelerogramas correspondientes a terremotos y condiciones de suelo similares. Estas expresiones generalmente reducen las discrepancias y constituyen una mejor representación para el caso de condiciones geotécnicas específicas.

La relación  $\mu - R_\mu$  es compleja y dependiente de muchos factores; sin embargo, para fines prácticos se maneja con expresiones sencillas, como las mostradas en este acápite.

### Respuesta espectral inelástica

Las estructuras convencionales tienen una resistencia lateral menor que la fuerza máxima que los sismos severos impondrían en una estructura ideal elástica; por tanto, en terremotos fuertes, estas estructuras se verán demandadas más allá del rango elástico. Los espectros inelásticos, junto a las características propias de cada estructura, permiten estimar el desplazamiento de respuesta, la ductilidad demandada y el factor de reducción correspondiente a estos eventos. La figura 6.32 presenta el problema.

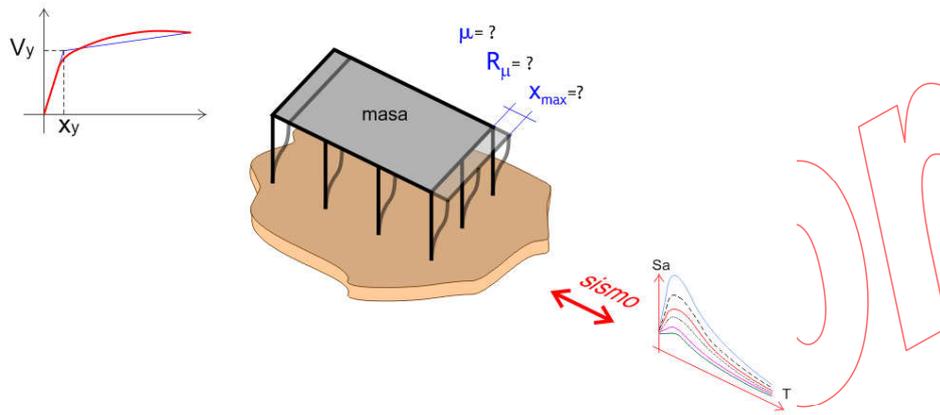


Figura 6.32 Respuesta espectral inelástica

A manera de ejemplo, estimemos la respuesta de una estructura de 500 ton de peso, rigidez  $K= 12500$  ton/m y resistencia lateral  $V_y = 165$  ton, sometida a un movimiento sísmico representado por el espectro de ductilidad constante mostrado en la figura 6.33.

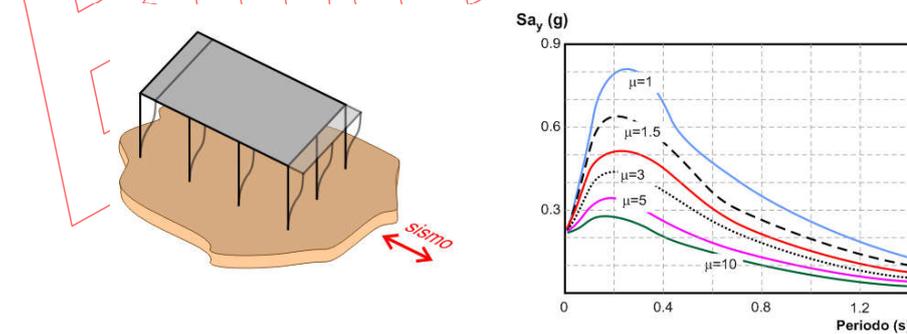


Figura 6.33 Estructura inelástica sometida a un movimiento sísmico representado por un espectro de ductilidad constante

El periodo de la estructura se estima en :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 0.4$  seg.

Si la estructura pudiera comportarse elásticamente durante este evento, alcanzaría una aceleración espectral  $S_a = 0.7$  g ( curva  $\mu = 1$ ,  $T = 0.4$  ); por tanto, recibiría una fuerza máxima de  $0.7g \times M = 0.7 \times \text{Peso} = 350$  ton y alcanzaría un desplazamiento de  $X_{\text{máx elá}} = 350 / 12500 \times 100 = 2.8$  cm.

Como la estructura tiene una resistencia lateral de sólo 165 ton, le corresponde un factor de reducción de  $R_\mu = 350 / 165 = 2.12$ .

La resistencia real de la estructura por unidad de masa es  $S_{ay} = 165 / (500/g) = 0.33g$ . Ubicando en el espectro este valor para  $T = 0.4$  seg, vemos que la ductilidad demandada será un valor entre 3 y 5; interpolado, obtenemos un valor aproximado de  $\mu = 3.6$ . Como el desplazamiento de fluencia es  $x_y = 165 / 12500 \times 100 = 1.32$  cm, el desplazamiento máximo esperado será de  $x_{\text{máx}} = 1.32 \times 3.6 = 4.8$  cm.

### Respuesta usando espectros inelásticos de demanda

Existen procedimientos para estimar la demanda inelástica empleando el espectro de capacidad estructural junto a un juego de curvas espectrales de ductilidad constante en formato de demanda ( $S_d - S_{ay}$ ).

La figura 6.34.a muestra las curvas de demanda correspondientes al juego de ductilidades  $\mu = 1, 3, 4, 5$  y  $6$  junto al espectro de capacidad de una estructura.

En el espectro de capacidad, a cada desplazamiento lateral corresponde una ductilidad que la estructura debe desarrollar; usando círculos ("•"), se han resaltado los puntos de esta curva correspondientes a ductilidades de 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Las intersecciones de la curva de capacidad con las curvas de demanda se muestran resaltados con un aspa ("x"). Como se nota fácilmente, los valores de ductilidad de las curvas no corresponden a los valores de ductilidad en el espectro de capacidad.

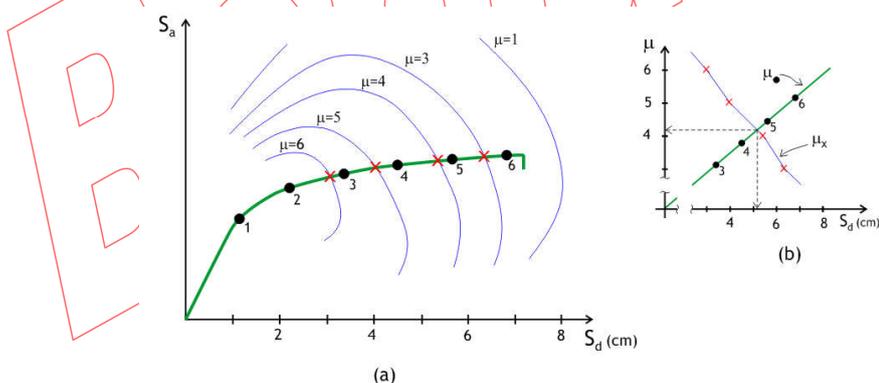


Figura 6.34 Respuesta inelástica usando espectros de demanda y capacidad

Siguiendo el espectro de capacidad de izquierda a derecha vemos que, conforme crece el desplazamiento lateral crece la ductilidad que tendría que desarrollar la estructura (puntos en "•"). En cambio, si nos fijamos en las intercepciones del

espectro de capacidad con las curvas de demanda (puntos en "x"), vemos que, de izquierda a derecha la ductilidad de cada curva decrece.

El desplazamiento de respuesta se debe encontrar en la intersección del espectro de capacidad con una curva de demanda cuyo valor de ductilidad sea igual al valor que la estructura debe desarrollar para tal desplazamiento de respuesta.

La figura 6.34.b muestra el procedimiento para encontrar la respuesta. Se construyen curvas ductilidad-desplazamiento correspondientes a la capacidad estructural ("•") y a la demanda ("x"); la ductilidad y desplazamiento espectral buscados corresponden a la intersección de estas curvas. Cuando se trata de edificios de varios pisos, el desplazamiento del nivel más alto se obtiene luego como  $x = (\mathcal{L}^*/M^*) S_d$ .

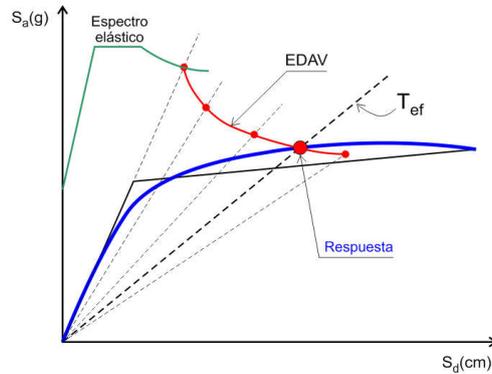
### **Respuesta usando espectros de amortiguamiento variable**

Existen aproximaciones que permiten estimar la respuesta inelástica de una estructura empleando un modelo elástico de mayor periodo y amortiguamiento que la estructura. El incremento en el periodo intenta estimar la pérdida de rigidez de la estructura durante un movimiento severo; el incremento del amortiguamiento trata de representar la disipación de energía histerética mediante energía de amortiguamiento.

A mayores incursiones inelásticas, el periodo del modelo elástico y el amortiguamiento equivalente crecen. Debido al incremento del amortiguamiento equivalente, la demanda elástica equivalente decrece. Esto permite establecer, para cada nivel de desplazamiento lateral de la estructura inelástica, un amortiguamiento equivalente y, luego, una demanda elástica reducida. De este modo, es posible construir una curva denominada espectro de amortiguamiento variable (EDAV) en formato de demanda.

El uso conjunto del espectro de capacidad de la estructura y el espectro de amortiguamiento variable permiten estimar la respuesta estructural inelástica.

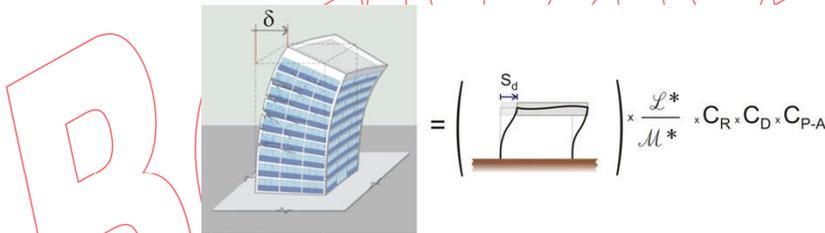
La figura 6.35 muestra la curva de capacidad de una estructura en la cual, para distintos valores del desplazamiento lateral, se asocia un periodo efectivo, un amortiguamiento equivalente y un valor del espectro elástico reducido por amortiguamiento. La curva que une los nuevos valores espectrales reducidos por ductilidad (EDAV) se interseca con la curva de capacidad de la estructura para encontrar la respuesta espectral ( $S_d$ ) y luego el desplazamiento del techo por medio de factor de participación ( $\mathcal{L}^*/M^*$ ).



**Figura 6.35** Determinación de la respuesta espectral usando el espectro de capacidad de la estructura y un espectro de amortiguamiento variable (EDAV)

### Respuesta usando espectros elásticos y factores de ajuste

Este método permite estimar el desplazamiento máximo de un edificio bajo solicitaciones sísmicas representadas por espectros elásticos. El desplazamiento del nivel superior,  $\delta$ , se obtiene usando el desplazamiento espectral correspondiente al período fundamental, junto a factores que permiten el paso hacia el edificio como sistema de varios grados de libertad y en régimen inelástico. La figura 6.36 muestra el procedimiento general.



**Figura 6.36** Respuesta inelástica espectral usando factores de ajuste

El factor  $L^*/M^*$  es propio de cada edificio y permite pasar del oscilador de un grado de libertad hacia el sistema de varios grados de libertad en régimen elástico. Cuando el modo fundamental tiene fuerte importancia en la respuesta del edificio, (como cuando la masa participante es 80 % o más de la masa total), el cálculo de  $L^*/M^*$  puede hacerse usando la forma de vibración fundamental (Capítulo 5). Es posible también emplear formas asociadas a sistemas de cargas o desplazamientos preestablecidos.

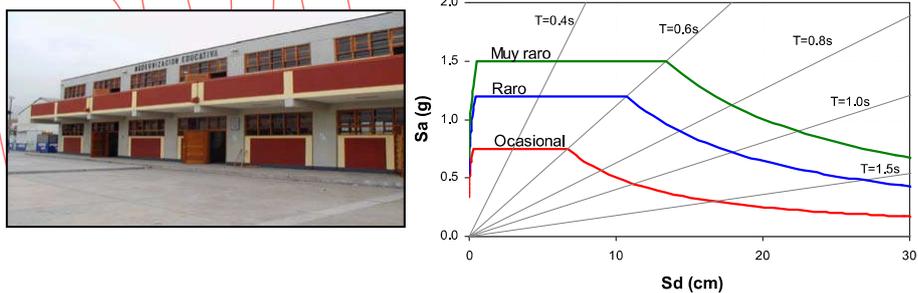
Para edificios de un piso el valor de  $L^*/M^*$  es 1, para edificios bajos (4 ó 7 pisos) el valor es cercano a 1.3 y para edificios altos (12 o más pisos) pueden usarse valores cercanos a 1.4.

El factor  $C_R$  incorpora el efecto del comportamiento inelástico estable, sin degradación; sus valores corresponden al cociente entre el desplazamiento máximo de un modelo bilineal y el correspondiente desplazamiento de un modelo elástico. Se conoce que para osciladores de periodo largo, el desplazamiento máximo que se obtienen con un modelo bilineal es similar al correspondiente valor obtenido con un modelo elástico; en cambio para osciladores de periodo corto, el valor del desplazamiento de un modelo bilineal es mayor al de un modelo elástico. Por tanto para estructuras de periodo largo se asume  $C_R = 1$  y para estructuras de periodo corto, mediante ajustes estadísticos se obtienen funciones que dependen tanto del factor de reducción de fuerza sísmica como del propio periodo estructural en relación al periodo del suelo.

Durante sismos severos la rigidez y resistencia lateral de algunas estructuras pueden reducirse considerablemente dependiendo de las características del propio sistema estructural y del nivel de desplazamiento lateral que la estructura alcance. El factor  $C_D$  intenta tomar en cuenta tanto la forma de la curva fuerza-desplazamiento como su variación durante el movimiento, en relación a los resultados de modelos bilineales. Para estructuras diseñadas y construidas con requerimientos moderados y especiales de ductilidad se sugiere  $C_D = 1$ ; para estructuras sin consideraciones especiales de ductilidad puede usarse  $C_D = 1.3$  ó  $1.5$  según el nivel de desplazamiento que se alcance en la curva de capacidad.

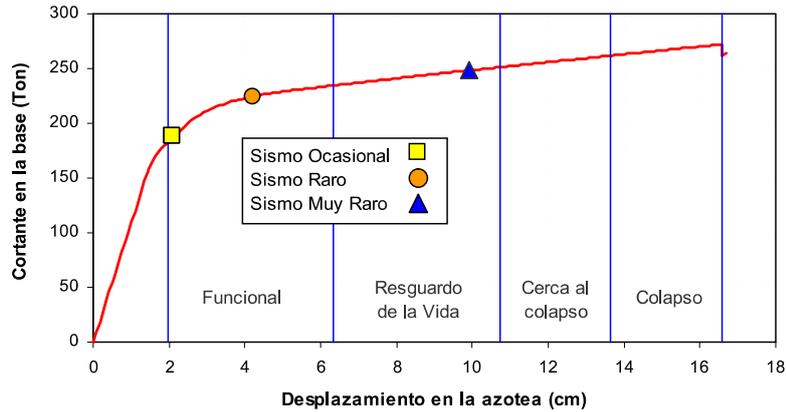
### Respuesta inelástica y desempeño esperado

A manera de ejemplo, se estimó la respuesta de un edificio educativo moderno sometido a tres niveles de demanda sísmica correspondientes a eventos ocasionales, raros y muy raros (periodos de retorno de 75, 450 y 950 años). La figura 6.37 muestra el edificio estudiado y los espectros de demanda de estos tres niveles de peligro.



**Figura 6.37** Edificio educativo moderno y espectros de demanda para tres niveles de peligro

Se estimó la respuesta inelástica y los desplazamientos de respuesta se ubicaron en la curva de capacidad de la estructura (figura 6.38).



**Figura 6.38** Respuesta de un edificio educativo ante tres niveles de demanda sísmica

Los resultados muestran que, para un sismo ocasional, la estructura se mantendría prácticamente elástica, en un sismo raro estaría en el rango funcional de desempeño y en un evento muy raro de 1000 años de periodo de retorno, aún resguardaría la vida (Figura 6.39).

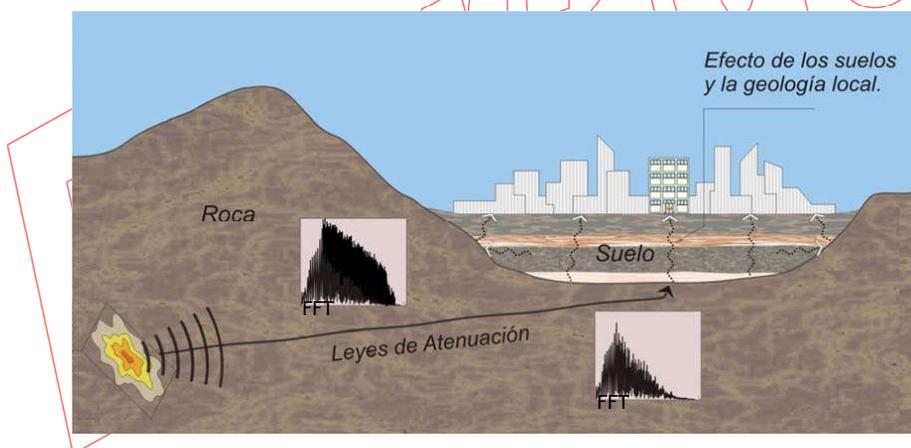
		NIVEL DE DESEMPEÑO		
		Operacional	Funcional	Resguardo de la vida
NIVEL DE DEMANDA	Sismo Ocasional (75 años)	😊		
	Sismo Raro (450 años)		😊	
	Sismo Muy Raro (950 años)			😊

**Figura 6.39** Desempeño esperado para un edificio educativo moderno ante tres niveles de demanda sísmica

### 7.1. Efectos de sitio

Las observaciones de campo en las zonas afectadas por terremotos, indican una estrecha relación entre el daño que sufren las obras de ingeniería y las características del suelo y la geología local.

Durante un terremoto, el movimiento que se genera en el foco va cambiando mientras recorre la base rocosa y atraviesa los estratos de suelo hasta llegar a los cimientos de las obras de ingeniería (Figura 7.1). En ambos casos el cambio corresponde al valor máximo del movimiento y también al contenido de frecuencias.



**Figura 7.1.** Durante un terremoto, el movimiento cambia mientras recorre la base rocosa y luego atraviesa los estratos de suelo hasta llegar a los cimientos de las obras de ingeniería.

### ***Atenuación en la base rocosa***

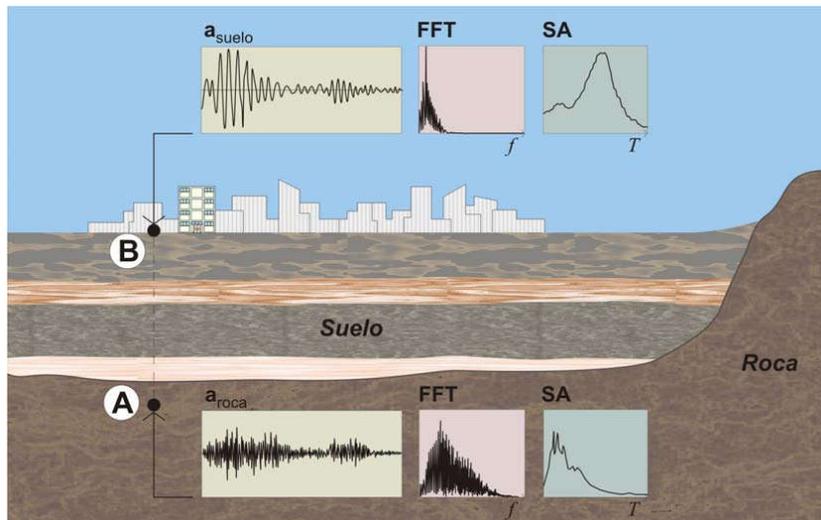
Con la distancia al foco, las componentes del movimiento en la base rocosa asociadas a periodos cortos se atenúan con mayor rapidez que las componentes de periodo largo. Esta diferencia ocasiona un cambio en el contenido de frecuencias del movimiento junto a una disminución de su valor pico. El cambio puede ser tan importante que en zonas de afloramientos rocosos distantes del foco, el movimiento puede percibirse sólo en edificios altos de periodo largo y como un “movimiento lento de pequeña amplitud”.

Para propósitos de ingeniería el cambio en el movimiento de la base rocosa se maneja mediante funciones de atenuación empíricas. En su forma más simple, estas funciones permiten estimar la reducción que experimenta el valor pico de algún indicador de la severidad del movimiento (aceleración, velocidad, desplazamiento o intensidad). En un enfoque más reciente, las funciones de atenuación permiten incorporar el cambio en el contenido de frecuencias del movimiento, mediante expresiones para estimar la atenuación en las ordenadas espectrales de la respuesta estructural.

### ***Efecto de los estratos de suelo***

Cuando los trenes de ondas alcanzan la superficie superior del lecho rocoso, el perfil de suelo sobre el lecho empieza a oscilar con un movimiento de respuesta fuertemente influenciado por las características del propio perfil. Para eventos relativamente pequeños la respuesta del estrato puede considerarse elástica y los parámetros que influyen significativamente son la masa, la rigidez (módulo de corte y profundidad del estrato) y el amortiguamiento. Para terremotos severos el comportamiento del estrato es marcadamente no lineal y la degradación de la resistencia y la rigidez influyen notoriamente en el movimiento de respuesta a nivel de la superficie.

La figura 7.2 muestra la historia de aceleraciones y los espectros de Fourier y aceleración para un punto en la roca (punto A) y otro en la superficie de un perfil de suelo blando (punto B).

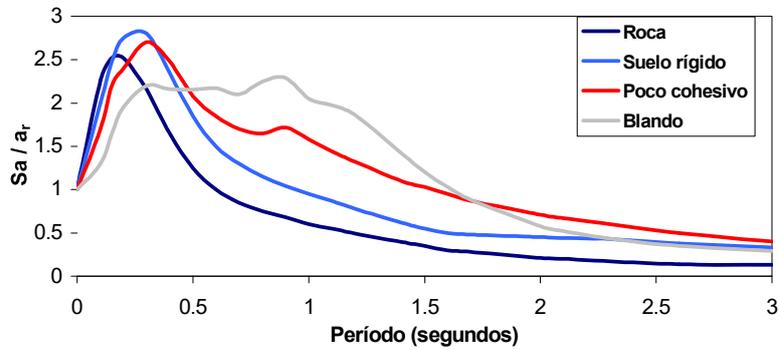


**Figura 7.2.** La aceleración en la base rocosa (punto A) cambia al pasar por el perfil de suelo hasta llegar a la superficie (punto B).

Podemos imaginar que el perfil de suelo recibe en su base una historia de aceleraciones con un contenido de frecuencias representado por el Espectro de Fourier (punto A de la figura) y en respuesta desarrolla una historia de aceleraciones con un contenido de frecuencias notoriamente amplificado en las regiones cercanas a las frecuencias de vibración importantes del perfil (punto B).

Dependiendo de las características dinámicas del propio perfil y del movimiento en el lecho rocoso, la aceleración en el lecho (punto A) puede llegar fuertemente amplificada a la superficie (punto B). En el terremoto de México de 1985 se produjeron amplificaciones cercanas a 5 en la zona de suelos blandos de mayor espesor en el Distrito Federal.

El cambio en el contenido de frecuencias que produce el paso del movimiento por los estratos de suelos, influye significativamente en los espectros de respuesta estructural. La figura 7.3 muestra los espectros promedio de aceleración para 104 acelerogramas agrupados por el tipo de suelo (roca y tres perfiles de suelo). En todos los casos estos espectros se representan como fracciones de la aceleración pico del registro, denominados factores de amplificación estructural (Seed e Idriss)

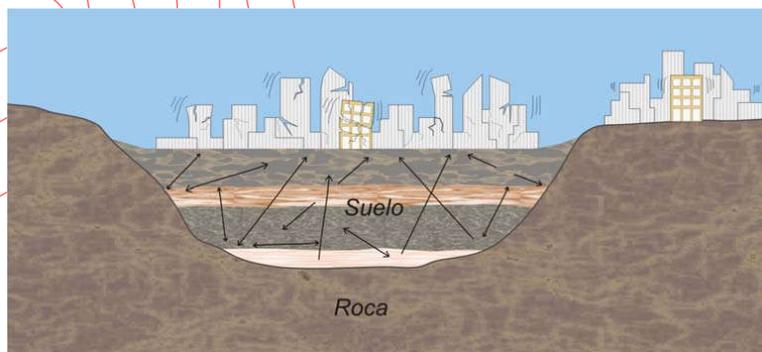


**Figura 7.3. Espectros promedio para señales en roca y en tres tipos de suelo. Seed e Idriss.**

Se observa que el rango de periodos en que se produce amplificación estructural (factor de amplificación mayor a uno) depende del tipo de suelo; para roca el rango de amplificación corresponde a periodos entre 0 a 0.5 seg aproximadamente y para suelos blandos el rango se extiende hasta 1.5 seg aproximadamente.

### Efecto de vaso

En depósitos de suelos de menor extensión horizontal, el paso del movimiento de la roca a la superficie corresponde a complejos fenómenos de propagación de ondas y está fuertemente influenciado por la forma propia del lecho rocoso. Para propósitos sencillos podemos imaginar el perfil del suelo como contenido en un gran vaso de roca que se agita durante un terremoto. El suelo no solo recibe el movimiento en su base sino también en toda la zona de contacto con el vaso y su respuesta es altamente compleja. Generalmente se producen amplificaciones por este efecto, en especial en las zonas superficiales de transición entre roca y suelo.



**Figura 7.4. Amplificación del daño por efecto de vaso geológico**

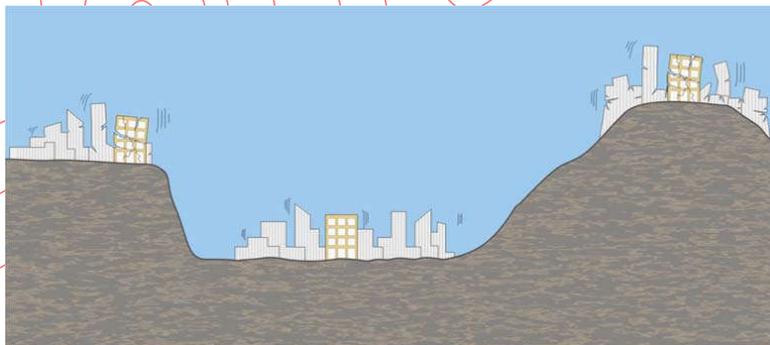
### **Amplificación topográfica**

La figura 7.5 muestra parte de los edificios del conjunto habitacional Canal de Beagle cerca de Viña del Mar, Chile. Durante el terremoto de 1985 los edificios en las partes altas de las colinas sufrieron daños importantes, mientras que aquellos en las partes bajas tuvieron poco o ningún daño.



**Figura 7.5. Edificios en la zona alta agreste de Canal de Beagle, Chile, 1985**

Observaciones de campo en diferentes terremotos indican que el movimiento en la superficie sufre cambios importantes por efecto de la topografía y que las estructuras situadas en las partes altas de una topografía agreste sufren mayor daño (Figura 7.6)



**Figura 7.6. Amplificación del daño por efectos topográficos**

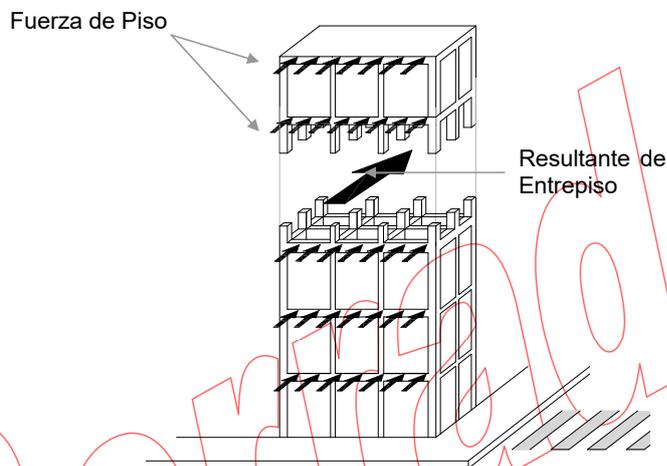
## 7.2. Comportamientos de edificios en terremotos

### 7.2.1. Las fuerzas de inercia y su camino al suelo

- diafragmas flexibles
- diafragma de transferencia

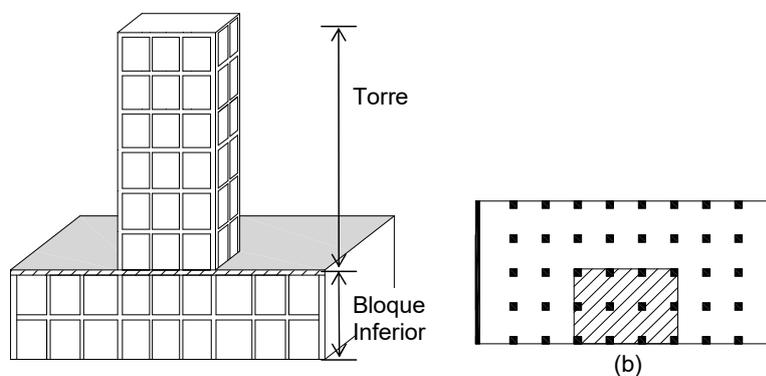
Las fuerzas laterales de inercia que se generan en los edificios durante los terremotos, se suelen suponer distribuidas en los sistemas de piso.

En cada entrepiso la fuerza resultante corresponde a la suma de las fuerzas de inercia de los niveles superiores. Esta resultante se distribuye a los ejes sismorresistentes en función a sus rigideces laterales.



**Figura 7.7 Fuerzas de piso y resultante de entrepiso**

Algunos edificios tienen reducciones importantes de su área en planta en los pisos superiores formándose dos volúmenes bien definidos, una torre y un bloque inferior. En el edificio de la **figura 7.6**, la torre tiene una estructura muy regular de vigas y columnas y en el bloque inferior además de vigas y columnas existen muros muy robustos en los extremos.

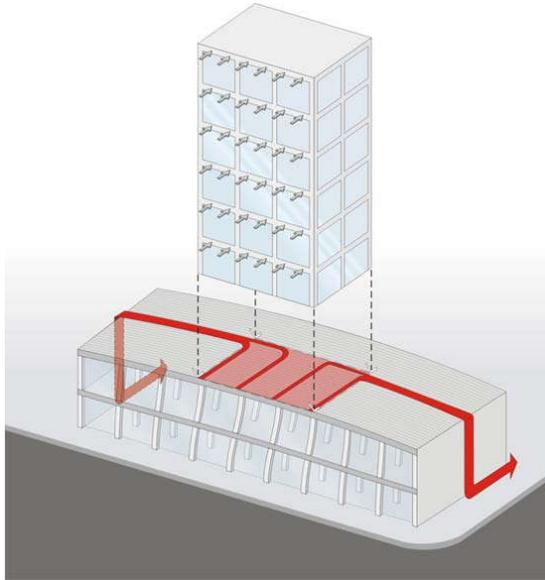


(a)  
**Figura 7.8 Elevación y planta de un edificio con torre.**

Como en la torre, todos los ejes sismorresistentes son similares, la fuerza resultante de cada entrepiso se reparte entre los ejes sismorresistentes en fracciones similares. En cambio en el entrepiso más alto del bloque inferior, la resultante de la fuerza de inercia se reparte prácticamente sólo entre los dos muros extremos debido a la gran rigidez de estos en comparación a los ejes de pórticos.

Para que esto sea posible la fuerza de inercia de la torre debe viajar por el techo más alto del bloque inferior a los muros extremos. Debido a éste trabajo este techo se denomina "diafragma de transferencia".

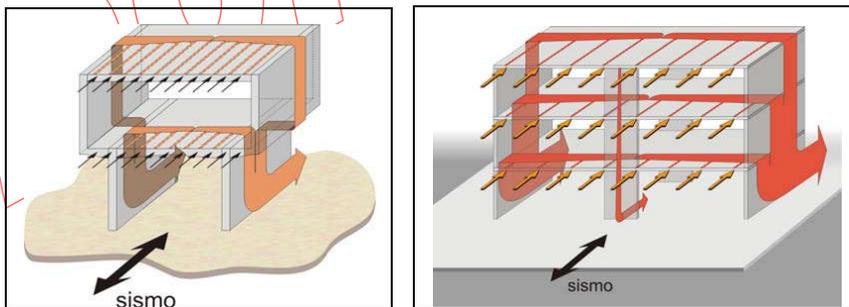
El viaje de la fuerza de inercia hacia los muros extremos puede producir en el diafragma de transferencia fuertes deformaciones y deterioro severo. Cuando esto sucede, el diafragma pierde su capacidad para transmitir fuerzas en su plano y los ejes sismorresistentes bajo la torre pueden verse sometidos a elevadas acciones laterales no previstas.



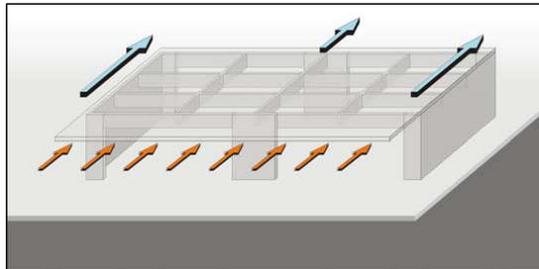
**Figura 7.9 Transmisión de las fuerzas de inercia en un edificio con reducción brusca en planta.**

En otros edificios donde la torre tiene elementos rígidos que llegan hasta la cimentación (figura XX.c), la resultante de fuerzas de inercia sobre el bloque inferior se distribuye de manera más uniforme y sólo una fracción de la fuerza total viaja hasta los muros extremos y el diafragma no se ve muy solicitado.

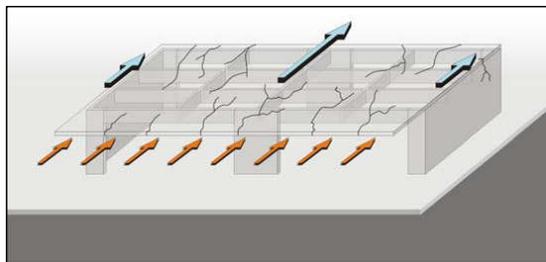
En estos edificios aunque el diafragma de transferencia no sufre grandes deformaciones el edificio presenta una marcada diferencia entre las tendencias de vibración del bloque de la base y la torre produciéndose fuertes amplificaciones en los desplazamientos de la torre y concentración de deformaciones y esfuerzos en las zona de transición (figura XX III).



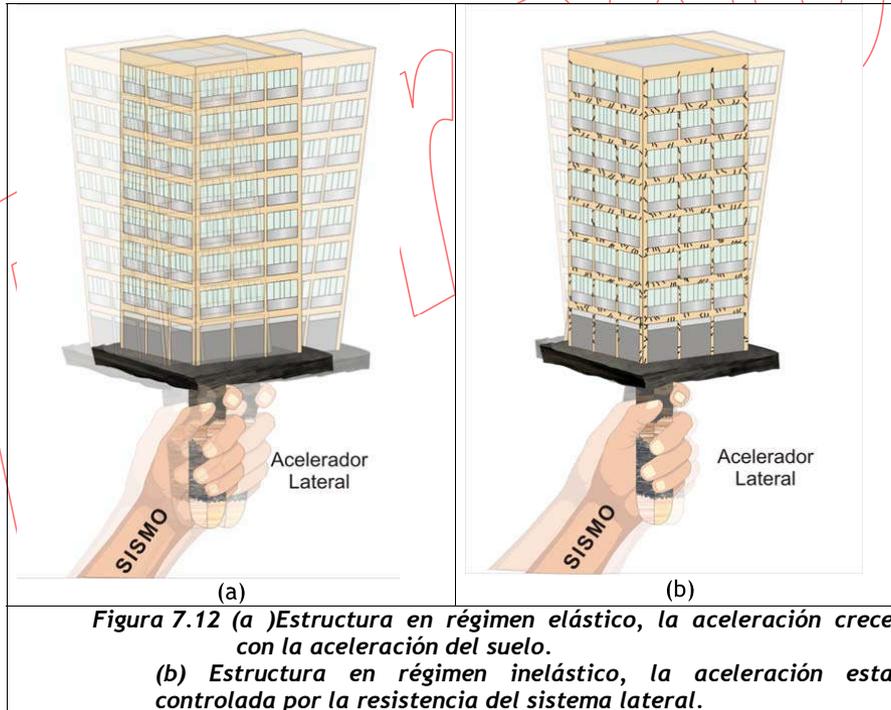
**Figura 7.10 Transmisión de fuerzas de inercia desde las losas hacia el suelo en un edificio irregular**



**Figura 7.11**  
**Distribución de Fuerza en un**  
**diafragma rígido y uno**  
**flexibilizado por el dañado**

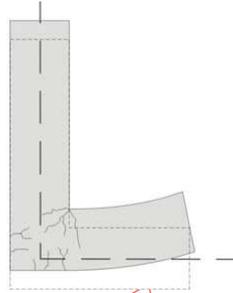
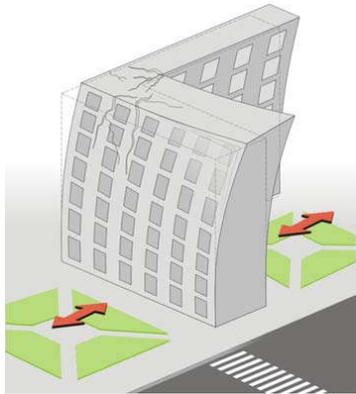


**Si la aceleración del suelo crece más y más, las fuerzas de inercia también lo hacen?**

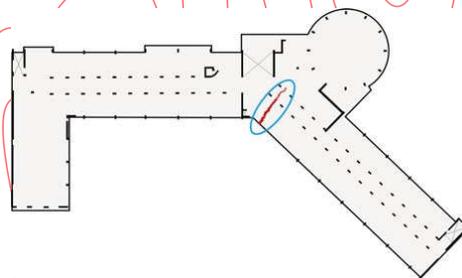


**Figura 7.12 (a) Estructura en régimen elástico, la aceleración crece con la aceleración del suelo.**  
**(b) Estructura en régimen inelástico, la aceleración esta controlada por la resistencia del sistema lateral.**

### 7.2.2. Edificios con planta irregular



**Figura 7.13** Deterioro de un edificio con configuración en L



**Figura 7.14** Diafragma roto en una escuela con diafragma en V durante el terremoto de Alaska, EEUU, 1964.

Cortesía de Karl V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center, University of California.

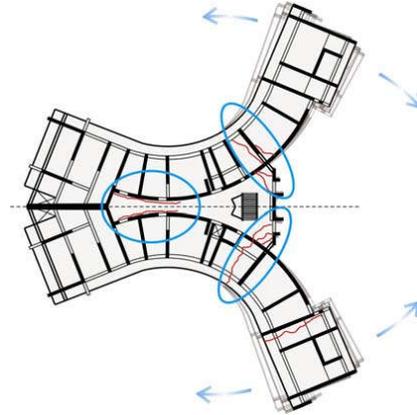


Figura 7.15 Patrón de daños en las planta del edificio Hanga Roa. Terremoto de Chile, 1985

7.2.3. El problema de torsión en planta

- Debido a excentricidad de rigidez

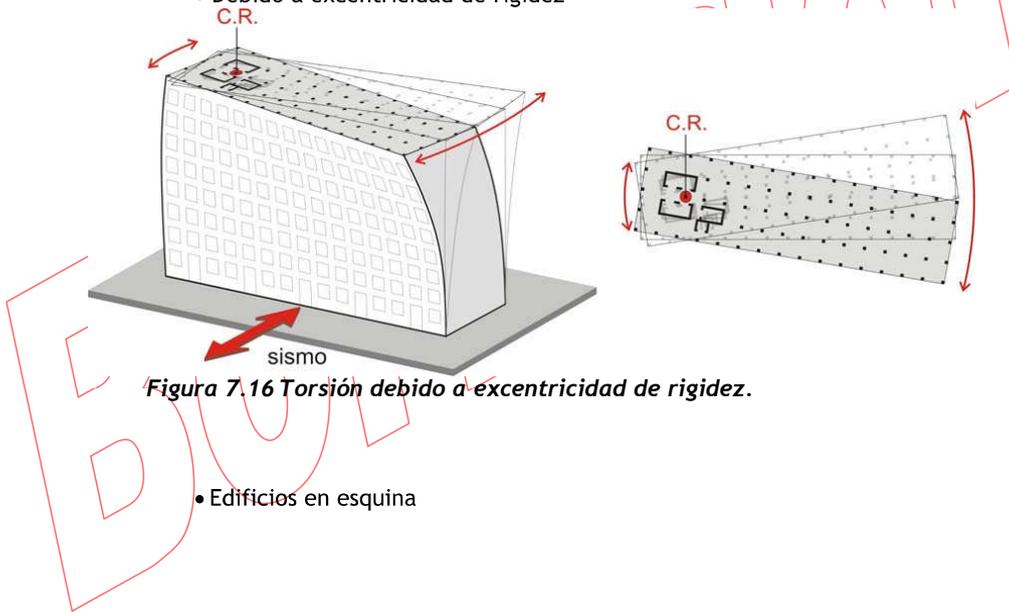


Figura 7.16 Torsión debido a excentricidad de rigidez.

- Edificios en esquina



Photo by James L. Shatta

**Figura 7.17** Colapso en edificio en esquina debido a excentricidad de rigidez. Cotabato 1976, Filipinas.

Cortesía del Earthquake Engineering Research Institute.

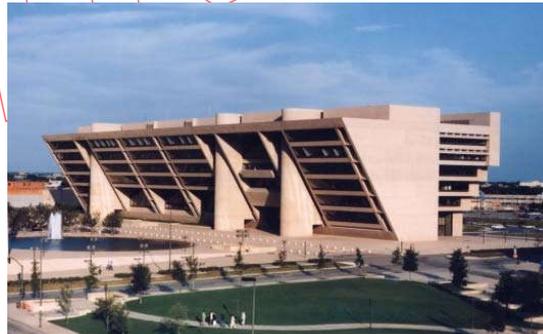
Los edificios en esquina son especialmente vulnerables debido a que tienen dos caras abiertas (la de la fachada) y dos caras cerradas (la del límite de propiedad).

#### 7.2.4. Irregularidades verticales

- Escalonamiento
- diafragma de transferencia
- concentración de esfuerzos
- formas modales superiores

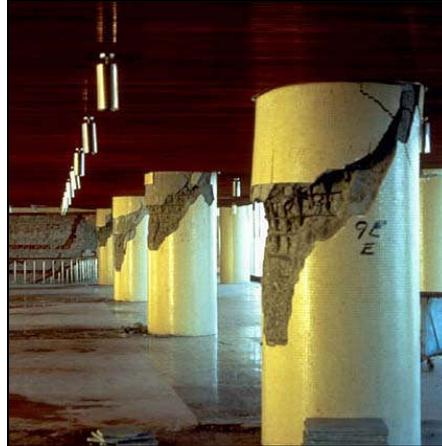
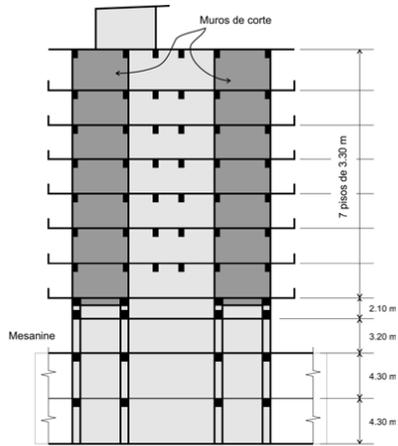


Photograph © Gary L. Catchen



Photograph © Thorney Lieberman

**Figura 7.18** Escalonamiento invertido (Texas, EEUU) y Escalonamiento (Berlin, Alemania)



**Figura 7.19** Daño por corte en columnas del tercer piso y corte transversal del Hotel Macuto. Venezuela 1967.

Cortesía del National Information Service Earthquake for Earthquake Engineering.

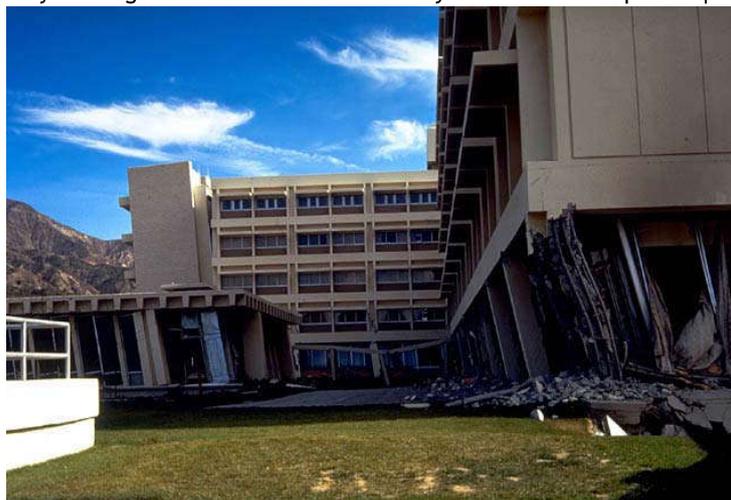
Borrador

### 7.2.5. El problema de piso blando

- efectos de los tabiques

El desplazamiento del techo se concentra en el entrepiso flexible y la capacidad de deformación inelástica se agota en este entrepiso  $\delta_1 \approx \Delta_T$

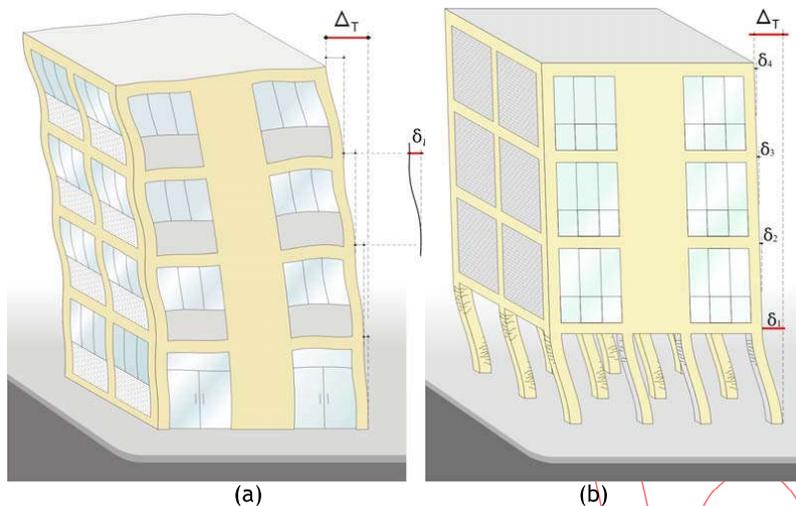
En un edificio regular el desplazamiento del techo se distribuye entre todos los entrepisos y las exigencias de ductilidad disminuyen en cada entrepiso  $\delta_i \ll \Delta_T$



**Figura 7.20** Acercamiento del daño severo ocasionado en el Hospital Olive View.

Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering, Karl V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center, University of California.

Durante los terremotos los desplazamientos laterales de los edificios pueden llegar a producir daño en el sistema estructural. Generalmente el daño estructural se asocia al desplazamiento de un nivel respecto del adyacente, denominado “desplazamiento de entrepiso”. La figura muestra los desplazamientos de entrepiso ( $\delta_1, \dots, \delta_i, \dots$ ) y el desplazamiento del techo  $\Delta_T$  de dos edificios.



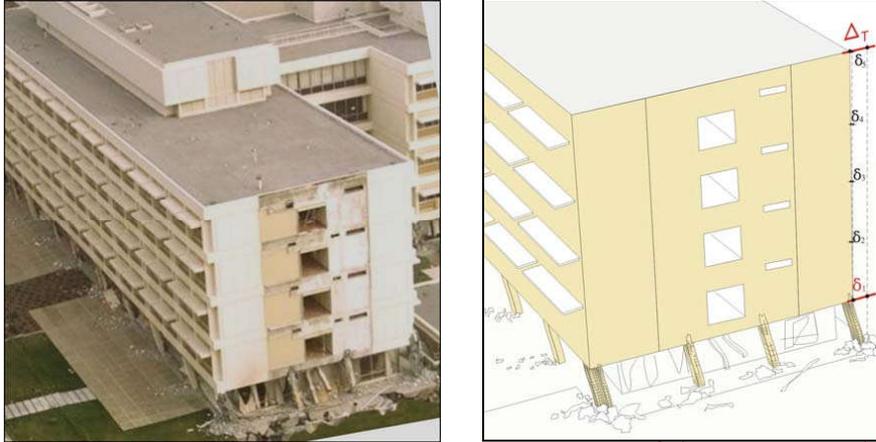
**Figura 7.21 Comparación entre el desplazamiento total y el del primer piso en dos edificaciones.**

En edificios cuyo sistema sismorresistente no tiene cambios bruscos de un entrepiso a otro, los desplazamientos relativos en los diferentes entrepisos,  $\delta_1, \dots, \delta_i, \dots$ , en la figura 7.18a, son similares entre sí. En este caso puede decirse que el desplazamiento del techo,  $\Delta_T$ , se distribuye en todos los entrepisos en partes similares y consecuentemente el daño también se distribuye en los diferentes entrepisos. Al final del terremoto, si el daño fue moderado, el edificio puede repararse y volver a funcionar.

En algunos edificios el sistema sismorresistente cambia bruscamente de un entrepiso a otro. Este es el caso de edificios cuyo primer piso sólo cuenta con columnas mientras que los pisos superiores tienen además muros (figura 7.18b). Este cambio significativo en los elementos estructurales se suele presentar en edificios donde el entrepiso para estacionamientos es marcadamente más flexible que los demás.

Al producirse un sismo, el edificio con estos cambios bruscos en altura, se pone en movimiento con un gran desplazamiento relativo en el entrepiso flexible y con deformaciones pequeñas en los demás entrepisos. De este modo, el desplazamiento del techo, en lugar de distribuirse en todos los entrepisos, se concentra casi totalmente en el entrepiso flexible.

Este problema de concentración de deformaciones, ocasiona que el daño se presente prácticamente solo en el entrepiso flexible. En terremotos importantes el daño puede ser tan severo que el edificio colapsa o queda sin posibilidad de reparación. Esta irregularidad estructural se denomina “entrepiso blando” o “piso blando” y ha sido la causa del colapso de muchos edificios en zonas sísmica.



**Figura 7.22** Daño severo causado por piso blando en el Medical Treatment Building del Hospital Olive View. Los Angeles, EEUU, 1971.

Foto cortesía de Karl V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center, University of California.

En algunos edificios los tabiques no se aíslan del sistema estructural y forman entresijos muy rígidos, desencadenando así el problema de entresijo blando en los entresijos inferiores. (figura 7.20)



**Figura 7.23** Colapso del primer piso (piso blando). Bhuj, India 2001.  
(Cortesía de Kerstin Lang)

La falla de piso blando no solo puede presentarse en el primer entresijo, sino también en pisos intermedios muy flexibles.

Para evitar la falla de piso blando se debe procurar que los elementos estructurales sean continuos en toda la altura del edificio, que los entrepisos tengan alturas similares y que los elementos no estructurales estén debidamente aislados de la estructura.

### 7.2.6. Columnas cautivas

Al estar bajo acciones laterales, las columnas sufren deformación. Algunas que están aisladas de elementos a su alrededor, se deforman en toda su altura, sin embargo otras que no se encuentran aisladas se deformarán solo en su altura deformable. Como se ve en la figura 7.21, hay columnas que estando unidas a los parapetos o alfeizares adyacentes, presentan una altura libre marcadamente menor que la altura del entrepiso.

Cuando el edificio se deforma lateralmente por la acción de un sismo, las columnas de un entrepiso tienen prácticamente igual desplazamiento lateral en sus extremos y por tanto el mismo desplazamiento relativo de entrepiso. Una medida sencilla de su deformación interna es la distorsión angular (figura 7.21). Ante cualquier desplazamiento de entrepiso las columnas de menor altura tendrán mayor distorsión angular.

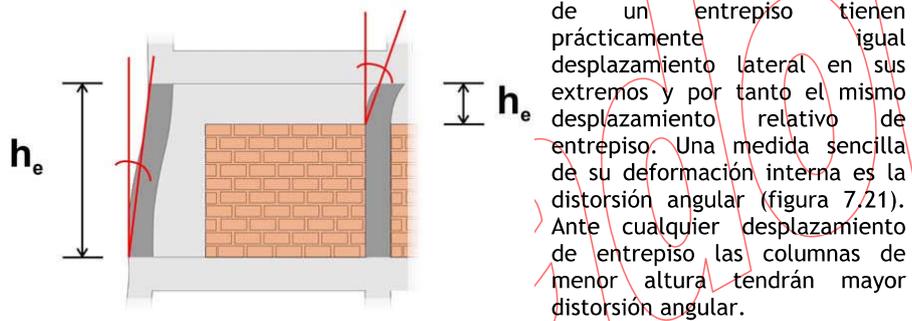


Figura 7.24 Deformación Angular en una columna

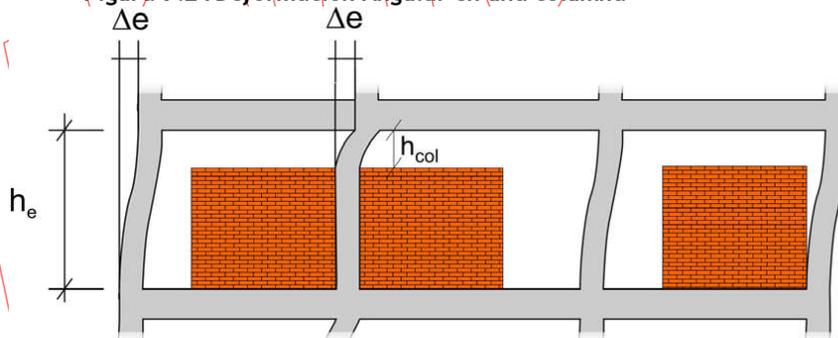
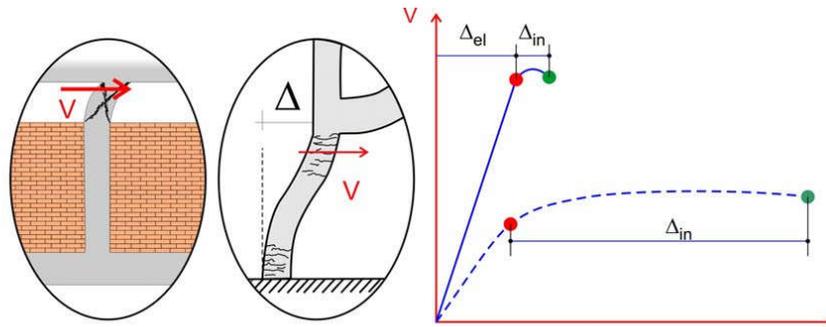


Figura 7.25 Deformación Angular en una columna

Veamos los resultados de ensayos de columnas sometidas a acción lateral:

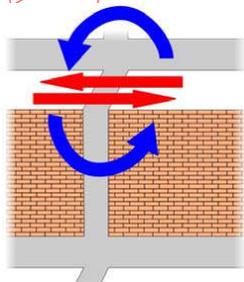


**Figura 7.26 Diagrama Fvs delta para columnas cortas y esbeltas.**

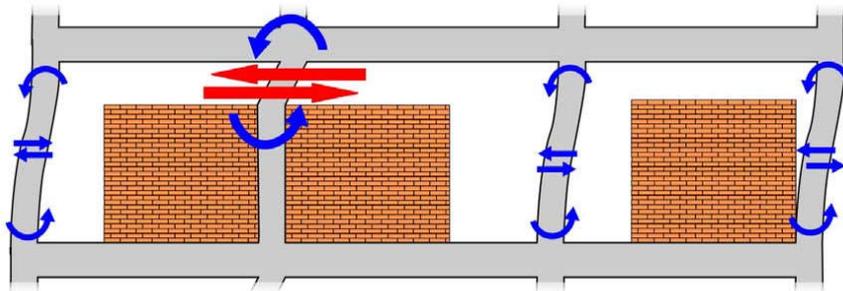
Como se ve en la figura 7.22, la fuerza aplicada en la columna esbelta (1) crece en igual proporción al incremento del desplazamiento lateral (comportamiento elástico lineal) hasta que en los extremos de la columna aparecen grietas horizontales indicando el inicio de lo que se denomina fase inelástica. En esta fase el desplazamiento lateral crece de manera importante sin que se produzca un incremento significativo de la fuerza cortante ni del momento flector. El desplazamiento lateral inelástico continúa hasta que luego de un desplazamiento lateral importante sobreviene la falla de la columna. En una columna esbelta bien diseñada y construida, el desplazamiento inelástico ( $\Delta_{in}$ ) puede llegar a ser apreciablemente más grande que el desplazamiento elástico ( $\Delta_{el}$ ).

En la columna corta (2), la fase elástica es muy reducida y termina con la aparición de una grieta diagonal. Luego el desplazamiento crece muy poco y casi de inmediato sobreviene la falla.

El desplazamiento lateral inelástico de la columna esbelta es notoriamente mayor que el de la columna corta; por tanto la columna esbelta tendrá un rango mayor de desplazamiento lateral, en que aun agrietada y en régimen inelástico, podrá seguir sirviendo de apoyo a las vigas y techos, en cambio en la columna corta la falla es súbita.



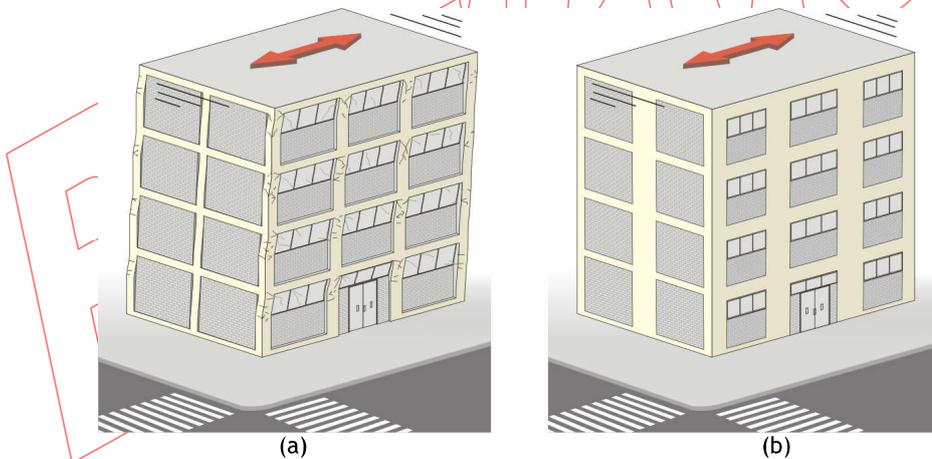
En sismos leves, que no producen daño estructural, las columnas cortas alcanzan fuerzas cortantes (y momentos flectores) significativamente mayores que las columnas de altura libre completa. Así en el edificio mostrado en la figura 7.21, la columna de la derecha tiene una mayor fuerza cortante y un mayor momento flector. (figura 7.23)



**Figura 7.27** Fuerzas que actúan en una columna corta

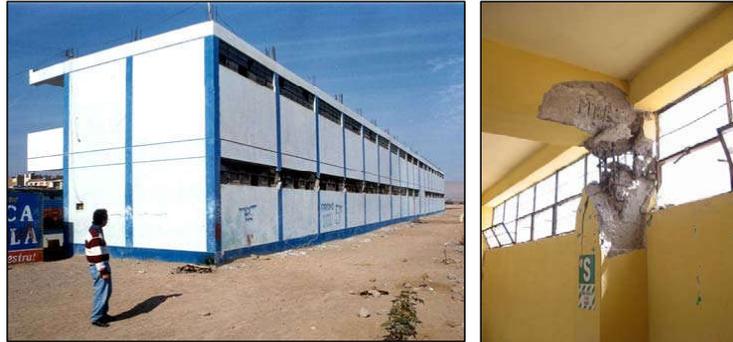
En terremotos importantes, conforme crece el desplazamiento lateral del edificio, crecen las fuerzas internas hasta que en un instante determinado los elementos agotan su resistencia a carga lateral e ingresan en régimen inelástico. Como las columnas cortas son las que tienen las mayores fuerzas internas serán las que primero ingresen al rango inelástico y debido a su escasa capacidad de deformación inelástica serán las que prematuramente y de súbito comprometerán su trabajo de soporte de vigas y techos

Un edificio con todas, o casi todas, sus columnas cortas durante un sismo pequeño que no ocasiona daño estructural tendrá fuerzas internas similares en todas las columnas y por tanto no se producirá el problema de concentración de esfuerzos.



**Figura 7.28** (a) Edificio con columnas cortas. (b) Edificio con columnas rígidas.

Sin embargo durante un sismo importante, en algún instante del movimiento las fuerzas internas inducidas por el sismo igualarán la capacidad de las columnas, y producirán su ingreso al régimen inelástico. Debido a la poca altura deformable de las columnas la falla será súbita y hasta podría ser simultánea en todas las columnas del entrepiso con el consiguiente riesgo de colapso.



**Figura 7.29 Problemas de columna corta en edificación escolar. Tacna, Peru 2001.**

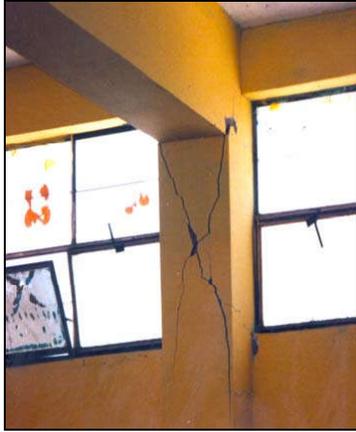
El problema de columna corta es causante de daño en muchos edificios en diferentes terremotos en el mundo.

Para evitar este problema es necesario separar las columnas de la tabiquería adyacente mediante juntas de dimensión generosa que supriman la interacción columna - tabique durante un sismo.

Además es necesario robustecer el sistema estructural resistente a cargas laterales con el fin de reducir el desplazamiento lateral del edificio durante un sismo severo; esto se logra incorporando muros de concreto o de albañilería.



**Figura 7.30 Edificación escolar en el sur del Perú. Típico problema de columna corta**



*Figura 7.31 Columna corta dentro de edificación escolar .*



*Figura 7.32 Colapso de segundo piso debido a los altos alfeizares que producen el fenómeno de columna corta, terremoto de Guam 1993.*

Cortesía del Earthquake Engineering Research Institute

### 7.2.7. Impacto entre edificios colindantes

Impacto a baja altura

No es posible predecir el comportamiento ante este imprevisto => no hay diseño contra impacto

Separación entre edificios



**Figura 7.33 Martilleo entre edificios colindantes, México 1985**

Foto cortesía del Earthquake Engineering Research Institute



**Figura 7.34 Golpeteo entre edificios colindantes. México 1985**

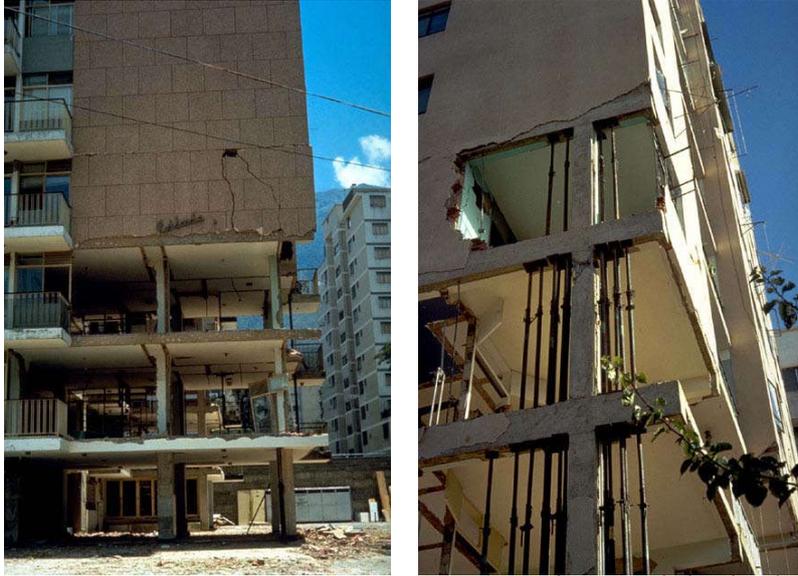
Foto cortesía del Earthquake Engineering Research Institute

### 7.2.8. Componentes no estructurales



**Figura 7.35** Interior de la biblioteca de la Universidad Estatal de California, terremoto de 1987 Whittier Narrows. Los estantes se inclinaron transversal y longitudinalmente, la gran masa que soportan requiere manejo ingenieril en los apoyos.

Cortesía del Earthquake Engineering Research Institute



**Figura 7.36** La tabiquería del segundo, tercer y cuarto piso fue expulsada de la estructura aporticada que se muestra apuntalada en la imagen. Terremoto de Caracas 1967, Venezuela.

Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley

Borrador



**Figura 7.37** Manpostería dañada en edificio de departamentos, Bhubaneswar, India

Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley.



**Figura 7.38 Muros Daño en mampostería en edificio de departamentos, muros de tabaquería dañados. Izmir 1999, Turquía.**

Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley

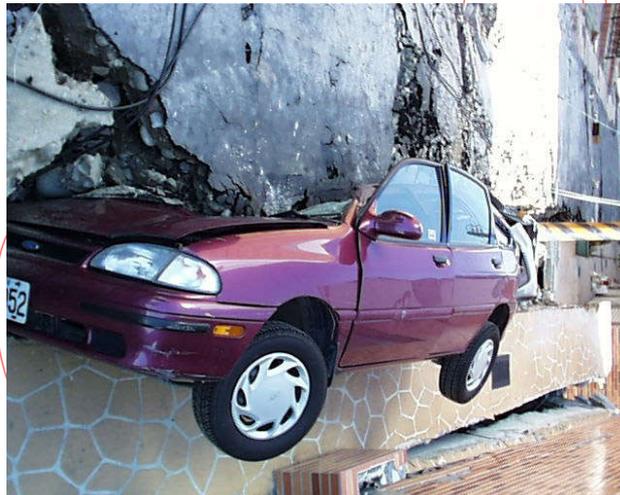


**Figura 7.39 Auto partido en dos por muro colapsado.**

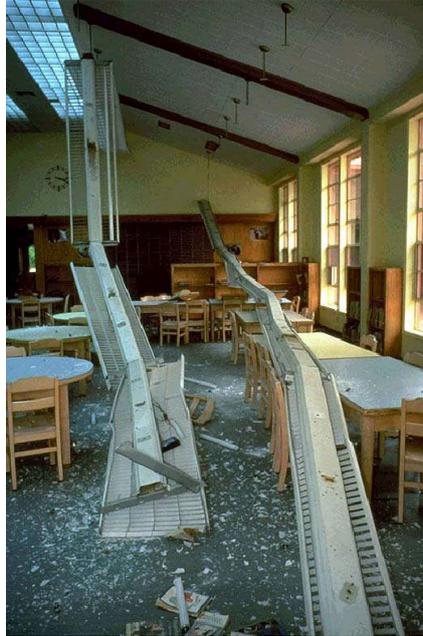
Cortesía del National Information Service for Earthquake Engineering, Universidad de California, Berkeley



*Figura 7.40 estacionamiento de camiones colapsado*



*Figura 7.41 auto atrapado por colapso de ..*



**Figura 7.42** Caída de lámparas de iluminación en colegio

Borrador

### 7.3. Representación de las solicitaciones sísmicas

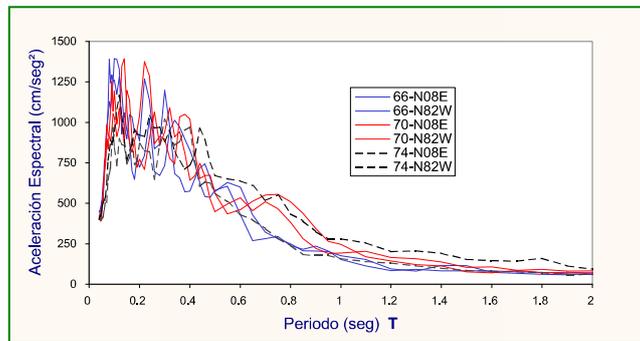
¿Para qué es necesario?:

Para proyectar nuevas obras civiles o para reducir la vulnerabilidad de edificaciones existentes.

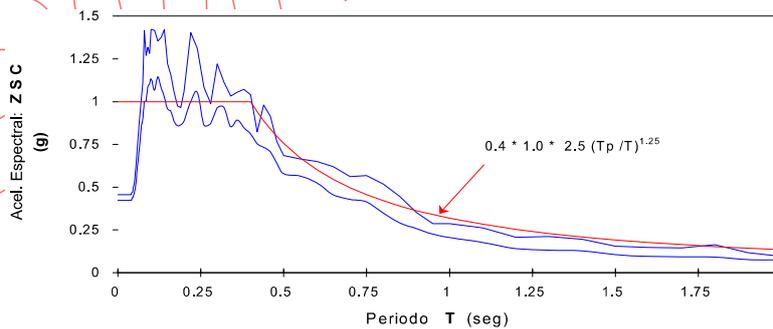
¿Cómo se logra esta representación?:

- Mediante un juego de registros representativos del lugar junto a algunos registros sintéticos (generados artificialmente)
- Por medio de espectros de demanda que tomen en cuenta la sismicidad de la zona y los efectos locales.

#### 7.3.1. Espectros de Demanda obtenidos mediante estadísticas sobre registros disponibles:



**Figura 7.43. Espectros de Seudo aceleración para 6 señales peruanas empleadas para obtener el espectro de diseño de la Norma Peruana de 1997. Todas las señales se escalaron a 0.4g**



**Figura 7.44. Espectros de Máximos, Promedios y línea de tendencia**

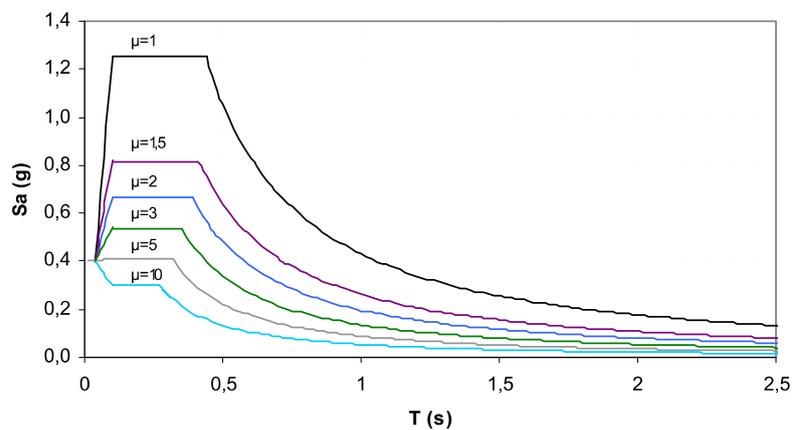


Figura 7.45. Espectros inelásticos de demanda  $T$  vs  $S_a$

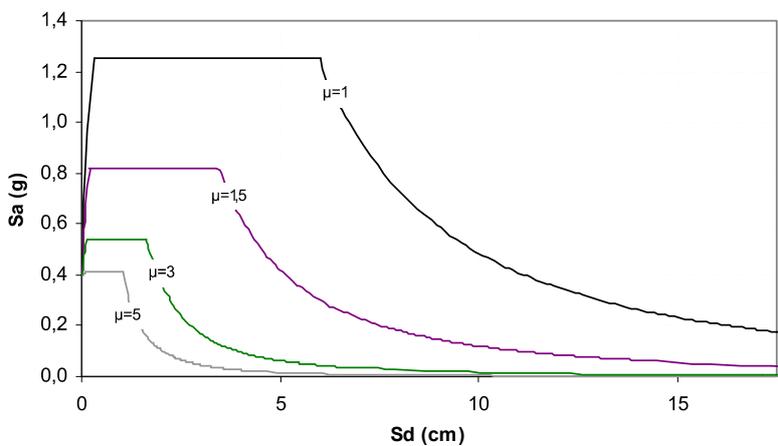


Figura 7.46. Espectros inelásticos de demanda en formato  $S_d$  vs  $S_a$

### 7.3.2. Espectros obtenidos a partir de los valores máximos del movimiento del suelo.

**Método de Newmark.** En base al valor estimado de los valores máximos del movimiento del suelo (desplazamiento, velocidad y aceleración).

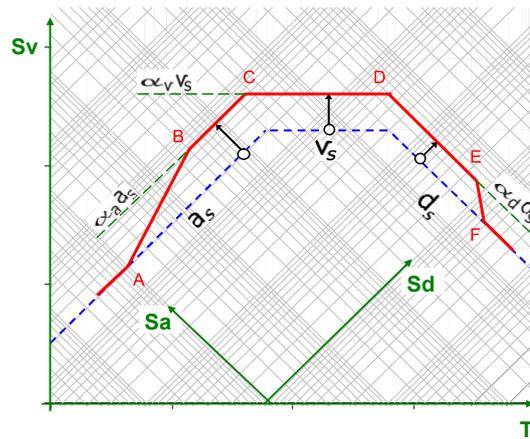


Figura 7.47. Espectro de demanda en formato tripartito.

#### 7.4. Diseño orientado al desempeño en múltiples escenarios de peligro.

Tal como se indicó en acápite previos, los objetivos del diseño sismorresistente se definen en función del nivel de desempeño que, de acuerdo a su importancia, deben tener las edificaciones para cada uno de los niveles de sismo a los que pueden estar sometidas durante su vida útil.

Así por ejemplo, es un objetivo del diseño sismorresistente que toda edificación de uso común, permanezca sin daños para sismos frecuentes (periodo de retorno de aproximadamente 50 años). Y es una aspiración de la ingeniería actual que las edificaciones importantes puedan permanecer operacionales aún en los sismos muy raros (aquellos con periodo de retorno de aproximadamente 1000 años).

Para lograr estos objetivos generales, la Ingeniería Sismorresistente define algunos criterios que sirven de marco global dentro del cual se desarrollan las reglas de buena práctica y se sustenten los procedimientos de análisis y diseño.

##### 7.4.1. Diseño para Sismos Frecuentes

Como se recordará se ha convenido en denominar sismos frecuentes y sismos ocasionales a aquellos cuyo periodo medio de retorno es de 45 y 75 años respectivamente.

De acuerdo con los objetivos del diseño sismorresistente las edificaciones comunes deben permanecer sin daño durante los sismos frecuentes y mostrar un daño muy reducido (nivel Operacional) durante los sismos ocasionales. En cambio las edificaciones esenciales y las edificaciones de seguridad crítica deben permanecer completamente operacionales durante estos dos niveles de sismo, tal como se muestra en la figura 7.39.

		NIVEL DE DESEMPEÑO			
		Completamente Operacional	Operacional	Supervivencia	Cerca al Colapso
SISMO DE DISEÑO	Sismo Frecuente (43 años)				
	Sismo Ocasional (72 años)				

 Edificación Común	 Edificación Esencial	 Edificación de Seguridad Crítica
--	---	--

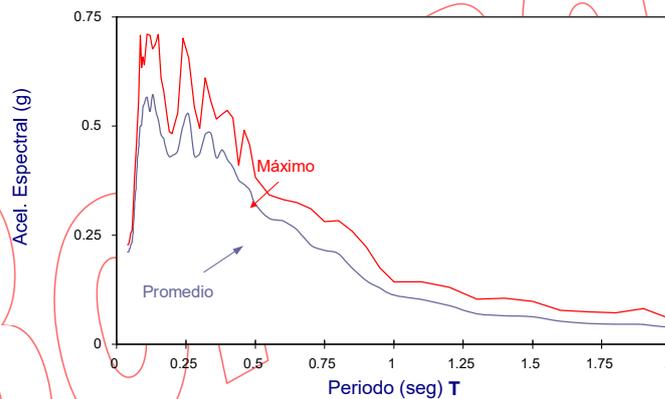
**Figura 7.48. Desempeño estructural para estructuras comunes, esenciales y de seguridad crítica en Sismos Frecuentes y Ocasionales.**

Para lograr que el nivel de daño en las edificaciones sea muy reducido o inexistente durante los sismos frecuentes u ocasionales, es necesario dotar a las estructuras de una resistencia mayor o por lo menos igual a la necesaria para que éstas puedan comportarse dentro del rango elástico durante todo el sismo. De acuerdo a la importancia de la estructura, se podrá aceptar pequeñas incursiones en el rango inelástico pero sin pérdida de rigidez o resistencia.

Si se supone que las edificaciones deben tener un comportamiento fundamentalmente elástico durante el sismo, el análisis de esfuerzos y la predicción de desplazamientos puede hacerse empleando modelos linealmente elásticos y para la mayoría de las edificaciones mediante procedimientos de respuesta espectral.

Así para lograr que las estructuras permanezcan sin daño, bastará con dotarlas de una resistencia lateral mayor o por lo menos igual a la que se espera demanden los sismos frecuentes u ocasionales de la región.

Los espectros de pseudo aceleración constituyen una forma sencilla y efectiva de representar las demandas de resistencia. Para el caso de estructuras de un grado de libertad los valores espectrales de pseudo aceleración se interpretan directamente como la resistencia necesaria (por unidad de masa) para garantizar un comportamiento elástico. La figura 7.40 muestra los máximos y el promedio de 6 espectros de pseudo aceleración, para 5 % de amortiguamiento, correspondientes a 6 registros peruanos escalados a 0.2 g.



**Figura 7.49. Espectros promedio y máximo de Demandas de Resistencia (Pseudo Aceleración) para 6 registros peruanos escalados a 0.2 g.**

### 7.4.2. Diseño para sismos raros.

Dotar a las estructuras de una resistencia lateral tan elevada como la demandada en estructuras elásticas por sismos con periodos de retorno de 500 ó 1000 años, es en muchos casos imposible o injustificable, dada la baja probabilidad de que estos eventos se presenten durante la vida útil de una estructura. La ingeniería sismorresistente reconoce este hecho y permite reducir la resistencia lateral de las estructuras a una fracción de la máxima sollicitación elástica a cambio de garantizar un comportamiento post elástico adecuado. Como se recordará, el cociente entre la demanda de resistencia elástica y la resistencia lateral de una estructura se denomina factor de reducción de fuerza sísmica.

Como se indicó en los acápites anteriores, el comportamiento inelástico adecuado se define en función del tipo de edificación. Así mientras que para una edificación común se acepta que en un sismo muy raro pueda quedar cercana al colapso, para una edificación de seguridad crítica se aspira a mantenerla operacional (Figura 7.41).

		NIVEL DE DESEMPEÑO			
		Completamente Operacional	Operacional	Supervivencia	Cerca al Colapso
SISMO DE DISEÑO	Sismo Raro (475 años)				
	Sismo muy raro (970 años)				

Edificación Común	Edificación Esencial	Ed. de Seguridad Crítica

**Figura 7.50. Desempeño estructural para estructuras comunes, esenciales y de seguridad crítica en Sismos Raros y Muy Raros**

Para lograr el comportamiento post elástico adecuado, el diseño sismorresistente ha tenido como idea central en las últimas décadas, el control en las demandas sísmicas de ductilidad. Sólo en años recientes es que se ha comenzado a poner mayor interés en conceptos de energía y daño y se ha logrado configurar nuevos criterios basados en las demandas sísmicas de energía.

A continuación se presentan en forma resumida los criterios de diseño sismorresistente basados en el control de las demandas de ductilidad y energía.

### Criterios de Diseño Basados en las Demandas de Ductilidad

Al dotar a una estructura de una resistencia menor a la demanda elástica de un evento importante, se espera que cuando se produzcan estos sismos, la estructura tenga severas incursiones inelásticas, tal vez con un nivel de daños elevado, pero se aspira a que no llegue a colapsar.

Mientras más se reduzca la resistencia lateral de una edificación, mayores serán las incursiones inelásticas y también mayor el daño. Una estructura, cuanto menos resistente sea, iniciará su comportamiento inelástico con un desplazamiento más pequeño. Es decir a mayor factor de reducción de fuerza sísmica mayor será la ductilidad demandada por el sismo. La figura que sigue muestra las demandas de ductilidad de desplazamientos para estructuras con factores de reducción entre 2.5 y 10, sometidas a la señal del 31 de mayo de 1970.

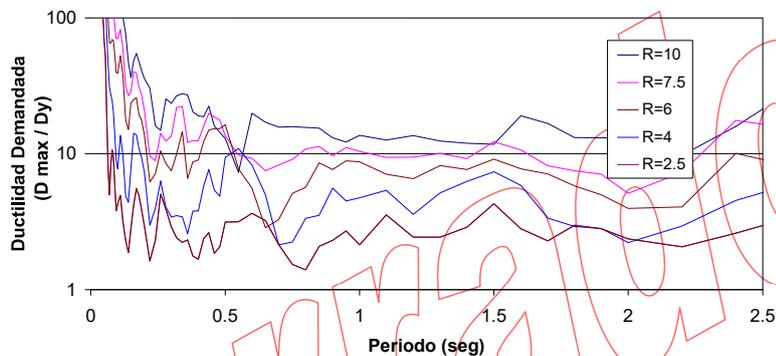
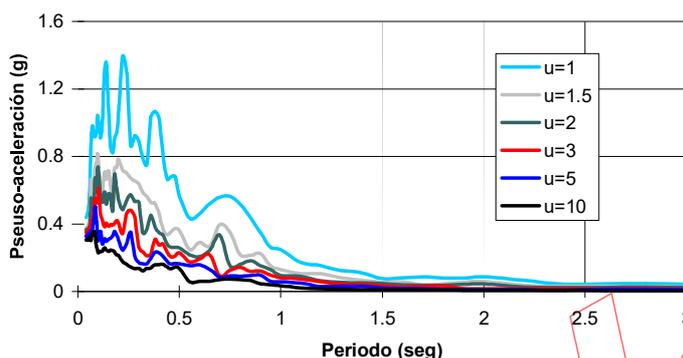


Figura 7.51. Demandas de ductilidad para factores de reducción de fuerza sísmica  $R=2.5, 4, 6, 7.5, 10$ . Señal Mayo 70, N08E, escalada a 0.4 g.

La estrategia del diseño sismorresistente basada en el control de las demandas de ductilidad se orienta, por un lado, a definir el nivel adecuado de fuerza sísmica acorde a cada sistema estructural con el fin de lograr que las demandas de ductilidad no superen la ductilidad que la propia estructura pueda desarrollar sin peligro de colapso; y por otro lado es parte de la estrategia general tratar de conseguir estructuras que puedan desarrollar el mayor comportamiento dúctil posible.

En términos generales se espera que según el sistema estructural, una edificación pueda desarrollar sin peligro un cierto nivel de ductilidad. Así por ejemplo, los estudios desarrollados con la albañilería confinada en el Perú, muestran que el inicio del comportamiento inelástico se produce para una distorsión de entrepiso de 1/800, pudiéndose alcanzar distorsiones de hasta 1/200 con posibilidad de reparación. Es decir, si las demandas de ductilidad global se mantuvieran por debajo de 4 ó 5, se podría reducir el daño a niveles que permitan la reparación efectiva de este tipo de estructuras.

La figura 7.43 muestra la resistencia, por unidad de masa, que deberían tener estructuras de diferente periodo, en función de la ductilidad que pueden desarrollar, tomando como sollicitación sísmica la señal del 31 de mayo de 1970 escalada a 0.4 g.



**Figura 7.52. Demandas de resistencia para ductilidad  $\mu_d = 1, 1.5, 2, 3, 5$  y  $10$ . Señal Mayo 70, NOBE, escalada a 0.4 g.**

Así por ejemplo si no se desea exponer a las edificaciones de albañilería a ductilidades globales mayores a 5, debemos definir su resistencia empleando la segunda curva inferior. Considerando además que los edificios de albañilería en el Perú tienen periodos de vibración por debajo de 0.4 seg. se podría decir que la resistencia necesaria debería ser aproximadamente el 35% de su peso.

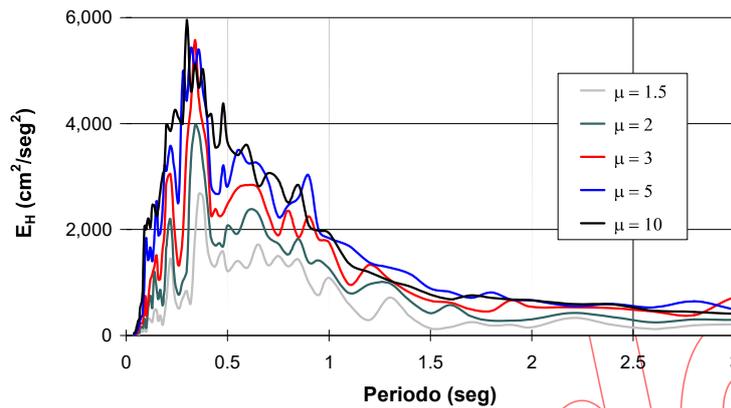
### **Criterios de Diseño Basados en las Demandas de Energía**

Tradicionalmente el diseño de estructuras sismorresistentes frente a sismos poco frecuentes se ha orientado a dotar a las estructuras de un comportamiento capaz de sobrellevar las demandas sísmicas de ductilidad. Sólo en años recientes, se han venido desarrollando criterios en base a la energía que las estructuras tienen que liberar durante los sismos ya sea por amortiguamiento o por comportamiento más allá del rango elástico.

La energía que una estructura disipa por amortiguamiento no se asocia directamente al daño que sufre durante un sismo. Sin embargo la liberación de energía histerética solo es posible a cambio de importantes incursiones post elásticas a las que acompaña un nivel considerable de daño.

Aunque los mecanismos de disipación de energía son altamente complicados, se puede tener una visión general de las demandas de energía mediante sistemas sencillos de un grado de libertad.

La figura 7.44 muestra las demandas de energía histerética en estructuras con 5 % de amortiguamiento, sometidas a la señal del terremoto del 31 de mayo de 1970, Perú, componente N08E. Cada curva corresponde a un valor determinado de ductilidad,  $\mu = 1.5, 2, 3, 5$  y  $10$ . Los valores de la energía demandada están dados por unidad de masa en  $\text{cm}^2/\text{seg}^2$ .



**Figura 7.53. Demandas de Energía Histerética para ductilidades  $\mu = 1, 1.5, 2, 3, 5$  y  $10$ . Señal Mayo 70, N08E, escalada a 0.4 g.**

En líneas generales, bajo estos criterios basados en las demandas de energía, el diseño se orienta conseguir estructuras con una capacidad de disipar energía mayor a la demanda sísmica de energía.

Sólo en los últimos años se están proponiendo y desarrollando sistemas de disipación de energía, ya no por histéresis a la que se asocia el daño estructural, sino por mecanismos de alto amortiguamiento. Por otro lado el aislamiento de edificios en su base ha dado buenos resultados en muchos casos. A continuación se presentan brevemente estos sistemas de protección.

### 7.5.5. Las Normas de Diseño Sismorresistente de edificios

#### Regularidad y confiabilidad estructural

Las normas establecen requisitos mínimos de resistencia, ductilidad y rigidez y sólo en algunos casos, requisitos de regularidad estructural para cierto tipo de edificios.



**Figura 7.5.1**  
*La rigidez, ductilidad y resistencia permiten una efectiva protección de los edificios regulares en terremotos fuertes*

Las observaciones de campo muestran que las estructuras regulares adecuadamente proyectadas y construidas tienen un buen comportamiento en terremotos severos. Se ha observado también que edificios antiguos estructuralmente regulares y rígidos han tenido buen desempeño en terremotos fuertes, contrariamente a las predicciones numéricas de su desempeño.

En contraste, las estructuras irregulares sufren daño importante y su desempeño es inferior al esperado a pesar que puedan haber sido proyectadas usando normas modernas. La falta de regularidad estructural incrementa la incertidumbre de los métodos de análisis y diseño estructural y a la fecha los procedimientos disponibles no resultan probadamente competentes para proteger las edificaciones irregulares en terremotos fuertes.



**Figura 7.5.2**  
*Los requisitos de resistencia, ductilidad y rigidez establecidos en los códigos, suelen ser insuficientes para proteger de manera efectiva los edificios muy irregulares durante terremotos severos.*

### **Requerimientos de Resistencia y ductilidad**

Las Normas de Diseño Sismorresistente (NDSR), establecen los requisitos de rigidez y resistencia lateral de las edificaciones y las Normas de Diseño en Concreto, Acero o Mampostería, detallan los procedimientos para instalar en las estructuras la resistencia y ductilidad correspondientes.

La resistencia lateral mínima que establece una Norma de Diseño Sismorresistente debería formalmente garantizar que en sismos pequeños el comportamiento estructural sea prácticamente elástico y que en eventos severos, las demandas sísmicas de ductilidad no superen la ductilidad estructural que se instale en la estructura.

Para que una estructura alcance la resistencia lateral establecida en una NDSR, es necesario instalar en cada uno de los elementos componentes (vigas, columnas, muros, etc.) la resistencia necesaria acorde a la resistencia especificada para el edificio en su conjunto. Las NDSR permiten estimar la resistencia requerida en cada uno de los elementos, analizando la estructura bajo acciones sísmicas laterales cuya resultante de fuerzas en la base corresponde a la resistencia requerida. Como los elementos se tendrán que preparar para desarrollar esta resistencia, para desarrollar el análisis se usan procedimientos sencillos elásticos.

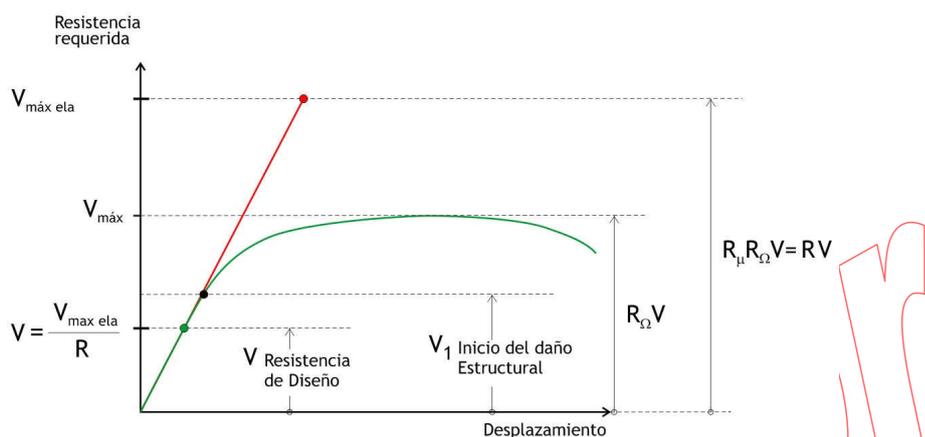
El procedimiento más sencillo para obtener los requisitos de resistencia en los elementos, consiste en suponer que la resistencia global requerida, es una fuerza actuante sobre el edificio. Esta suposición permite efectuar el análisis elástico estático de la estructura bajo cargas laterales, con el fin de determinar las solicitaciones en cada uno de los elementos.

Otro procedimiento establecido por las normas para estudiar las demandas locales de resistencia, es el análisis espectral. En este caso, la demanda sísmica sobre todo el edificio se representa por un espectro reducido de imponen a la estructura una fuerza cortante en la base equivalente a la resistencia global requerida. Las fuerzas internas que se obtienen del análisis elástico espectral, se interpretan como los requisitos de resistencia en cada uno de los elementos.

Las Normas de Diseño en Concreto, Acero o Albañilería establecen procedimientos de rotura para el diseño de los elementos componentes. En las combinaciones de carga se incrementan las solicitaciones de gravedad y sismo mediante factores del orden de 1.25 para cargas de gravedad y 1.0 para las solicitaciones sísmicas. Junto a esto, al establecer las dimensiones y refuerzo requerido en los elementos, se reduce la capacidad nominal mediante factores  $\phi$  (del orden de 0.8) con el propósito de incrementar la probabilidad de lograr una capacidad efectiva mayor que la demanda.

En condiciones de servicio, las cargas de gravedad se pueden estimar usando factores cercanos a 1 para la carga muerta junto a valores menores para la carga viva (la probabilidad de carga viva completa es muy remota). Por tanto como resultado del procedimiento de diseño a la rotura, la fuerza lateral que inicia el comportamiento inelástico de una estructura resulta mayor que la resistencia

nominal de diseño requerida por una norma. A este incremento natural de resistencia lateral también contribuye el hecho que la resistencia real de las estructuras suele ser en general mayor que los valores teóricos estimados. La resistencia nominal y la fuerza lateral que inicia el comportamiento inelástico se representan con  $V$  y  $V_1$  en la figura 7.5.3.



**Figura 7.5.3 Resistencia de diseño, sobrerresistencia y factor de reducción**

En un edificio bien proyectado y construido, inmediatamente después de iniciado el comportamiento inelástico, existen zonas sin daño que permiten que la resistencia lateral pueda incrementarse durante los posteriores desplazamientos inelásticos. Para el caso de edificios aporticados esto corresponde a una apropiada y paulatina secuencia de formación de rótulas. Por otro lado, el endurecimiento natural del acero y la sobrerresistencia del concreto permiten que cada elemento pueda incrementar las solicitaciones que recibe y de esta manera la estructura en su conjunto puede incrementar significativamente la fuerza máxima que puede recibir respecto a la fuerza lateral que inicia el daño. En la figura 7.5.3 la fuerza máxima se representa por  $V_{\max}$ .

El incremento de resistencia lateral debida a los procedimientos de diseño, a la secuencia paulatina de propagación del daño y a la sobrerresistencia mecánica de los elementos suele ser muy importante y explica el menor daño que en general sufren las edificaciones durante sismos severos, en comparación a las estimaciones teóricas. La sobrerresistencia estructural respecto a la resistencia de diseño se representa por  $R_\Omega$  y se estima por el cociente  $V_{\max} / V$ .

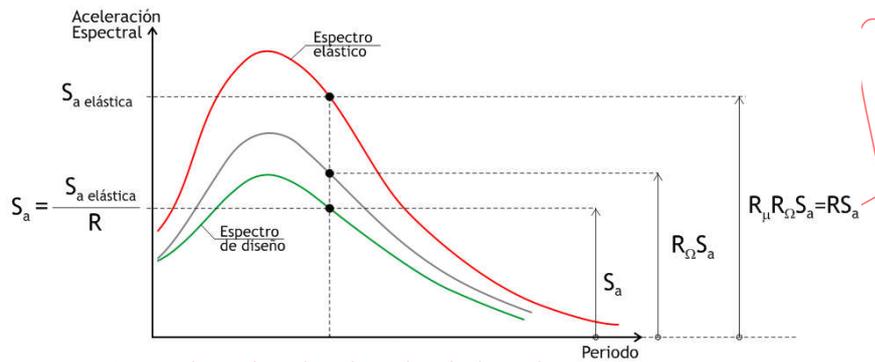
La fuerza máxima que una estructura puede resistir lateralmente,  $V_{\max}$ , es sólo una fracción de la fuerza máxima que recibiría en un sismo severo, si pudiera comportarse elásticamente,  $V_{\max\text{ ela}}$ . Esta reducción de resistencia origina que las estructuras sufran daño durante terremotos importantes, razón por la cual es necesario dotarlas de un apropiado comportamiento dúctil. El cociente entre la demanda elástica y la resistencia real se denomina factor de reducción por

ductilidad y se representa por  $R_{\mu}$ ,  $R_{\mu} = V_{\max \text{ ela}} / V_{\max}$ . Mientras mayor ductilidad pueda desarrollar una estructura, mayor podría ser el valor de este factor de reducción.

Para establecer la resistencia lateral mínima, las NDSR toman en cuenta tanto la sobrerresistencia estructural como la reducción de resistencia por comportamiento dúctil, mediante un factor de reducción combinado,  $R$ , definido como:

$$R = R_{\Omega} \cdot R_{\mu}$$

La figura 7.5.4 muestra la relación entre los espectros elástico y de diseño y los factores de reducción involucrados.



**Figura 7.5.4 Espectro de diseño reducido por ductilidad y sobrerresistencia.**

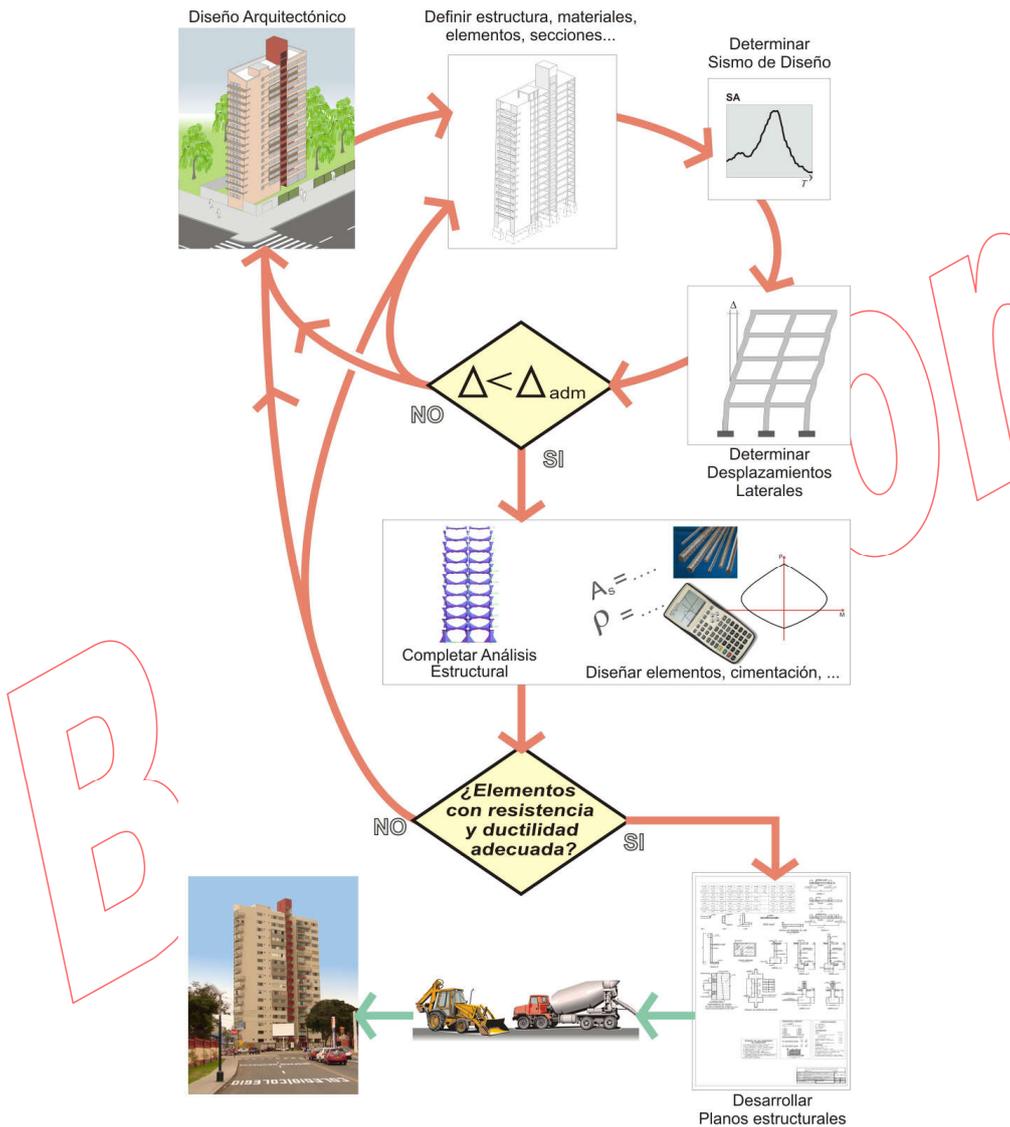
En algunas normas la sobrerresistencia y la reducción por ductilidad se maneja como parámetros independientes ( $R_{\Omega}$ ,  $R_{\mu}$ ), en cambio otras normas manejan un factor único ( $R$ ).

Tanto el factor de reducción por ductilidad como la sobrerresistencia varían con el periodo estructural y por tanto el factor de reducción único,  $R$ , debería ser también una función del periodo, como lo establecen algunos códigos. Sin embargo, la mayoría de normas sismorresistentes establecen un valor único que depende sólo de la ductilidad que puede desarrollar el sistema estructural.

### Requisitos de Rigidez

Las normas establecen límites para el desplazamiento lateral de los edificios, con el propósito de limitar las demandas de ductilidad de los terremotos severos y además para proteger el contenido de los edificios en sismos menores.

Generalmente se establece un único límite para el desplazamiento esperado como respuesta ante un sismo severo. Este límite depende del sistema estructural y se expresan generalmente como un valor máximo para la deriva de entrepiso. La figura 7.5.5 muestra el procedimiento general de diseño implícitamente materializado en los códigos.



**Figura 7.5.5 Esquema general del proyecto de edificaciones.**

*...Siguen comentarios a NTE-030*

Borrador