

INGENIERÍA

CIVIL Y CONSTRUCCIÓN

Recursos en Ingeniería, Arquitectura, Construcción y Afines

Libros, Plantillas en Excel, Revit, Civil 3D, Autocad y más

[Clic aqui para ir al sitio web](#)

[Explore nuestra Tienda](#)



[Canal de WhatsApp \(Convenio Institucional\)](#)

Ing. Alejandro Vera Lázaro



ANÁLISIS ESTRUCTURAL

CON MATRICES

PROBLEMAS RESUELTOS



ANÁLISIS

ESTRUCTURAL

con MATRICES

PROBLEMAS RESUELTOS



ANÁLISIS ESTRUCTURAL CON MATRICES

Autor: Ing. Alejandro Segundo Vera Lazaro

© Derecho de autor reservado
Empresa Editora Macro E.I.R.L.

© Derecho de edición, arte gráfico y diagramación reservados
Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Edición a cargo de:

Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Av. Paseo de la República 5613 – Miraflores

Lima - Perú

☎ (511) 748-0560

✉ ventas@editorialmacro.com

<http://www.editorialmacro.com>

Primera edición: Octubre 2013 - 1000 ejemplares

Impreso en los Talleres Gráficos de

Empresa Editora Macro E.I.R.L.

Lima - Perú

ISBN Nº 978-612-304-160-1

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2013-16280

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método de este libro sin
previa autorización de la Empresa Editora Macro E.I.R.L.



ING. ALEJANDRO SEGUNDO VERA LAZARO

Ingeniero mecánico egresado de la Universidad Nacional de Trujillo. Diplomado en *Computer Adding Design and Computer Adding Engineering* CAD-CAE-UCV, especialización en Análisis Vibracional en Máquinas y Estructuras Mecánicas con Modelamiento en Elementos Finitos en Diseño Mecánico. Cuenta con Maestría en Ingeniería Mecánica Eléctrica con mención en Energía (Convenio UNPRG-CARELEC). Docente universitario a tiempo completo en la Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo, Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica. Consultor del Área de Diseño de la empresa CAD-CAE Ingenieros y consultor en Eficiencia Energética bajo la Norma ISO 50001. Instructor de MATLAB y *Solidworks Simulation* en estudio estático, frecuencial y térmico; así como en *Computational Fluids Dynamics* (CFD).

Líneas de investigación

- Aplicación del método de los elementos finitos a la Ingeniería en Diseño de máquinas.
- Proyectos, planificación, gestión en energías renovables.
- Diseño y dimensionamiento de sistemas eólicos *onshore* y *offshore*.

Agradecimientos

A todas las personas que, de alguna u otra forma, me apoyaron para que esta obra salga a la luz.

A Rodrigo Echeandía y Rodolfo García, por ser buenos amigos y haber compartido conmigo grandes momentos en los congresos académicos, por las investigaciones realizadas a la fecha.

A Isabel Ramos, por la confianza depositada en mi persona.

Dedicatoria

A Evelyn Montoya, por ser una gran amiga, haberme apoyado en los momentos que más lo necesitaba y sobre todo por confiar en mi trabajo; siempre te dije: “Las promesas se cumplen; sino la palabra de un hombre no vale nada”.

Introducción

La presencia de la existencia de las computadoras ha dado un cambio en el estudio de la ingeniería; por esta razón, el libro *Análisis estructural con matrices* tiene como finalidad desarrollar el denominado «método de la rigidez de cálculo matricial», aplicado a estructuras bidimensionales formadas por barras y vigas, a partir de elementos unidimensionales, desde el más básico como es el elemento resorte. Este mismo esquema puede ser extendido a otras formas de discretizar una estructura o un medio continuo. De hecho, el método de los elementos finitos es la extensión del método de cálculo matricial, donde se trata con elementos que no son solo barras; sino volúmenes de distintas formas geométricas que modelan un mayor número de problemas mecánicos o físicos.

En todo el desarrollo del método, se aceptan las hipótesis generales en las que normalmente se desarrollan los cursos de la teoría de estructuras, es decir: el comportamiento elástico y lineal del material, así como el estado de pequeños desplazamientos.

El libro pretende que el estudiante pueda plantear las distintas matrices de rigidez para los diferentes elementos estructurales, los analice, los pueda plantear y con el apoyo del software MATLAB pueda resolver los cálculos finales para obtener una respuesta rápida; por este motivo en cada uno de los problemas se anexa el desarrollo en el software MATLAB. En el último capítulo, se proponen dos aplicaciones para tener un acercamiento a la realidad.

El autor

Índice

Capítulo 1

MÉTODO DE LA RIGIDEZ	13
1.1. HIPÓTESIS.....	15
1.2. ASPECTOS GENERALES	15
1.3. MÉTODO DE LA RIGIDEZ UTILIZANDO UNA COMPUTADORA.....	16
1.3.1. Identificación estructural	16

Capítulo 2

ANÁLISIS DE RESORTES.....	17
2.1. VISIÓN GENERAL	19
2.2. CONCEPTOS BÁSICOS	19
2.2.1. Nodo.....	19
2.2.2. Elemento	19
2.2.3. Grado de libertad (GDL).....	19
2.2.4. Local y global	19
2.2.5. Enfoque básico	20
2.3. ASOCIACIÓN DE RESORTES	22
2.3.1. La fuerza y energía elásticas de un resorte o muelle.....	22
2.3.2. Asociación o acoplamiento de resortes.....	22

Capítulo 3

PRINCIPIO DE HIPERESTATICIDAD	41
3.1. GRADOS DE INDETERMINACIÓN	43
3.1.1. Indeterminación estática.....	43
3.1.2. Indeterminación cinemática.....	43
3.2. CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS.....	43
3.3. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN O HIPERESTATICIDAD	43

Capítulo 4

BARRA 1D	51
4.1. ANÁLISIS ESTÁTICO LINEAL	53
4.1.1. Construir el elemento	53
4.1.2. Matriz de rigidez y el método directo	53
4.2. BARRA 1D CON EFECTOS TÉRMICOS	68

Capítulo 5

BARRA 2D	71
5.1. TRANSFORMACIÓN	73
5.2. MATRIZ DE RIGIDEZ EN 2D	74
5.3. ESFUERZO DEL ELEMENTO	75

Capítulo 6

TORSIÓN	143
----------------------	-----

Capítulo 7

VIGAS	165
7.1. ELEMENTO VIGA SIMPLE (1D)	167
7.2. TEORÍA DE LA VIGA ELEMENTAL	167
7.2.1. Método directo.....	167
7.2.2. Análisis de estructuras de marcos planos.....	168
7.3. VIGA 2D	220
7.4. ESTRUCTURAS 2 – D	231

Capítulo 8

APLICACIONES EN LA INGENIERÍA.....	363
TRABAJO DE APLICACIÓN EN INGENIERÍA: ANÁLISIS MATRICIAL DE UN TRAMO DEL MUELLE DE PIMENTEL, CHICLAYO	365
DISEÑO ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DE PLATAFORMA DE ELEVACIÓN DE AUTOMÓVILES A TRAVÉS DEL MÉTODO MATRICIAL EN UNA PLAYA DE ESTACIONAMIENTO	382
DISEÑO ESTRUCTURAL A TRAVÉS DEL ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA TRIBUNA EN LA CANCHA DEPORTIVA EN UNA UNIVERSIDAD	389
DISEÑO DE UN PUENTE PEATONAL	411

· MÉTODO DE LA RIGIDEZ

1.1. HIPÓTESIS

- Estructura lineal. Todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas.
- Pequeñas deformaciones. Ecuaciones de equilibrio en la estructura no distorsionada.
- Las barras son rectas y de sección constante.
- Para estudiar una estructura por el método de la rigidez, al igual que en cualquier otro problema elástico, se dispone de tres conjuntos de ecuaciones que deben cumplirse:
 - Ecuaciones de compatibilidad
 - Ecuaciones constitutivas
 - Ecuaciones de equilibrio

1.2. ASPECTOS GENERALES

Las ecuaciones de compatibilidad relacionan las deformaciones de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones constitutivas, asocie las fuerzas en los extremos de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas últimas relaciones en las ecuaciones de equilibrio, se obtiene un conjunto de ecuaciones de fuerzas nodales en función a desplazamientos nodales, que pueden ser consideradas como ecuaciones de equilibrio de la estructura en función de desplazamientos.

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales) a partir de los cuales se obtienen las solicitaciones de las barras de la estructura, así como las reacciones.

Cuando se van a calcular las relaciones esfuerzos de extremo de barra-desplazamientos, es natural escoger un sistema de coordenadas que haga estas ecuaciones lo más sencillas posible. Se tomará, por lo tanto, como eje X el que coincide con el eje geométrico de la pieza y los ejes Y y Z coincidentes con los ejes principales de la sección transversal. Tal sistema pertenece a la barra y no depende de la orientación de la misma en la estructura y se le denominará «sistemas de ejes locales». Por el contrario, cuando las piezas se unen entre sí para formar la estructura, es necesario tener un sistema de coordenadas común para todos los movimientos y esfuerzos de extremo de barras para poder aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad. A dicho sistema, se le denominará «sistema de ejes globales». Dichos esfuerzos de extremos de barras y desplazamientos, dependerán del tipo de estructura que está resolviendo, para barras de:

- *Reticulado plano*: Dos desplazamientos por nudo.
- *Reticulado espacial*: Tres desplazamientos por nudo.
En ambos casos, solo se obtendrán esfuerzos normales.
- *Pórtico plano*: Tres desplazamientos por nudo (una rotación en el plano del pórtico y dos traslaciones). Como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial: un esfuerzo de corte y un momento flector.
- *Pórtico espacial*: Seis desplazamientos por nudo, tres traslaciones y tres rotaciones. Como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial: dos esfuerzos de corte, dos momentos flectores y un momento torsor.
- *Emparrillado de vigas*: Tres desplazamientos nodales (un corrimiento normal al plano de la grilla) y dos rotaciones alrededor de los ejes contenidos en el plano mencionado. Los esfuerzos son un cortante y dos momentos (un torsor y un flector).

1.3. MÉTODO DE LA RIGIDEZ UTILIZANDO UNA COMPUTADORA

Una de las características más importantes del método de la rigidez es la forma en que las propiedades elásticas de las piezas y su orientación dentro de la estructura, son introducidas en el cálculo antes de que se efectúe alguna consideración sobre el equilibrio o la compatibilidad de los nudos.

Esto permite establecer relaciones entre las fuerzas de extremo de barras y los desplazamientos de nudo. Dichas relaciones expresadas en forma matricial, se denomina «matriz de rigidez de barra».

Al considerar la interrelación de cada barra con las demás, se obtiene un sistema global de ecuaciones que define el comportamiento de toda la estructura y conduce a la solución del problema.

Se considera seis etapas fundamentales en la solución de un problema:

- Identificación estructural
- Cálculo de la matriz de rigidez de barra y del vector de cargas nodales equivalentes
- Cálculo de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de la estructura
- Introducción de las condiciones de borde
- Solución del sistema de ecuaciones
- Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones nodales

1.3.1. IDENTIFICACIÓN ESTRUCTURAL

Esta etapa consiste en definir a través de números y datos las barras de la estructura.

- *Definir un sistema de ejes globales para la estructura:* Las coordenadas de los nudos se refieren a dicho sistema.
- *Conectividad de los elementos:* Identificando para cada barra el nudo inicial y el final. A cada barra está asociado un sistema de ejes locales al cual se refieren todas las dimensiones y características de la barra. El mismo queda definido automáticamente por el orden establecido para la numeración de los nudos de la barra. El eje X local coincide con el eje geométrico de la barra, siendo el sentido positivo el que va del nudo inicial (nudo de menor numeración) al final (nudo de mayor numeración). Los otros ejes locales deberán coincidir con los ejes principales de inercia de la sección transversal de la barra formando un triedro directo.
- *Propiedades de la sección transversal de cada barra:* Dependiendo del tipo de estructura (reticulado, pórtico plano, pórtico espacial, emparrillado), se debe dar el área de la sección transversal, los momentos de inercia en relación a los ejes principales y la inercia a la torsión.
- *Propiedades del material:* Se debe indicar, para cada barra, el módulo de elasticidad longitudinal o el módulo de elasticidad transversal.
- *Especificación de los vínculos:* Se debe indicar el nombre del nudo que tiene una o más restricciones y cuáles son las mismas.
- *Descripción de la carga:* Se da el nombre del nudo y los componentes de globales de las cargas externas y las reacciones de empotramiento perfecto en relación a los ejes locales de la barra si hay cargas en el tramo.

ANÁLISIS DE RESORTES

2.1. VISIÓN GENERAL

El método de la rigidez de la matriz es la base de casi todos los programas comerciales de análisis estructural. Se trata de un caso particular del método de los elementos finitos más generales y fue, en parte, responsable por el desarrollo del método de los elementos finitos. Por tanto, una comprensión de la teoría subyacente, las limitaciones y los medios de aplicación del método es esencial para que el usuario del software de análisis no es solo operar un “cuadro negro”. Estos usuarios deben ser capaces de entender los posibles errores en la modelización de las estructuras que normalmente vienen como advertencias obtusos como “giro cero” o “determinante cero: estructura inestable: abortar”. Entender los conceptos básicos presentados en este documento debe conducir a un uso más provechoso de los programas disponibles.

2.2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.2.1. NODO

El nombre más general de una conexión entre los miembros adyacentes se denomina un «nodo». Para vigas y marcos de los términos comunes y nodo son intercambiables. Para estructuras más complejas (por ejemplo, platos), no lo son.

2.2.2. ELEMENTO

Para vigas y marcos, **elemento** significa lo mismo que miembro. Para estructuras más complejas, este no es el caso.

2.2.3. GRADO DE LIBERTAD (GDL)

El número de posibles direcciones que los desplazamientos o las fuerzas en un nodo pueden existir es lo que se denomina un « grado de libertad» (DOF). Algunos ejemplos son los siguientes:

- *Plano armadura*: Tiene dos grados de libertad en cada nodo: traslación y fuerzas en las direcciones X e Y.
- *Vigas*: Con dos grados de libertad por nodo: desplazamiento; fuerzas verticales y rotación; y momento.
- *Plano del marco*: Con tres grados de libertad en cada nodo: las traducciones, fuerzas similar a una armadura de avión y la rotación o momento en la articulación.
- *Armadura de espacio*: Una armadura en tres dimensiones tiene tres grados de libertad: traducción o de fuerzas a lo largo de cada eje en el espacio.
- *Marco de espacio*: Tiene 6 grados de libertad en cada nodo: traducción; fuerzas a lo largo de cada eje y la rotación; y momentos alrededor de cada eje. Así, una celosía plana con 10 articulaciones tiene 20 grados de libertad. Un marco plano con dos miembros tendrá tres articulaciones (una común a ambos miembros) y, por lo tanto, 9 grados de libertad en total.

2.2.4. LOCAL Y GLOBAL

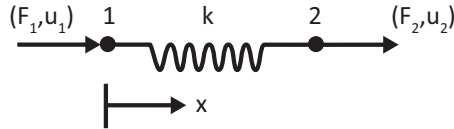
Fuerzas, desplazamientos y matrices de rigidez a menudo se derivan y se definen por un sistema de ejes locales para el miembro. Sin embargo existirá un sistema general o global, eje de la estructura en su conjunto. Por tanto, se debe transformar las fuerzas, desplazamientos, etc. desde el sistema de coordenadas local en el sistema de coordenadas global.

2.2.5. ENFOQUE BÁSICO

A. ELEMENTO INDIVIDUAL

Se considera aquí la forma más básica de análisis de la rigidez.

En este caso, se representa un miembro estructural por un resorte que tiene un nodo (o conexión) en cada extremo. También se considera que solo puede moverse en la dirección x . Por lo tanto, solo tiene 1 GDL por nodo. En cada uno de sus nodos, que puede tener una fuerza y un desplazamiento (de nuevo tanto en la dirección x):



Nótese que se ha sacado la fuerza y las flechas de vectores de desplazamiento positivo de la dirección x . El análisis matricial obliga a ser muy estrictos en las convenciones de signos.

Usando la relación básica que la fuerza es igual a la rigidez por el desplazamiento, se puede determinar la fuerza en el nodo 1 como:

$$F_1 = k (\text{desplazamiento en 1})$$

Así:

$$F_1 = k(u_1 - u_2) = ku_1 - ku_2 \quad \dots(1)$$

Del mismo modo para el nodo 2:

$$F_2 = k(u_2 - u_1) = -ku_1 + ku_2 \quad \dots(2)$$

Se puede escribir las ecuaciones (1) y (2) en forma de matriz para obtener la matriz de rigidez del elemento para un elemento axial 1-GDL:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Y usando la notación de matrices, se escribe así:

$$\{F\} = \{k\}\{u\}$$

Donde:

$\{F\}$ es el vector de fuerza del elemento

$\{k\}$ es la matriz de rigidez del elemento

$\{u\}$ es el vector de desplazamiento elemento

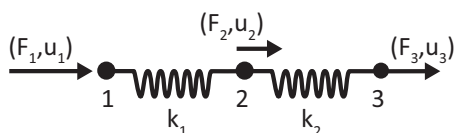
Debe quedar claro que la matriz de rigidez elemento es de importancia fundamental -que una fuerzas nodales a desplazamientos nodales- esto comprende cómo el elemento se comporta bajo carga.

La derivación de la matriz del elemento rigidez para diferentes tipos es probablemente la parte más difícil del método de matriz de rigidez. No obstante, esto no supone un gran inconveniente ya que solo hay unos pocos tipos de elementos para derivar y una vez obtenida se encuentra a disposición para su uso en cualquier problema.

B. CONJUNTO DE ELEMENTOS

Estructuras reales se componen de conjuntos de elementos; por lo tanto, se debe determinar cómo conectar las matrices de rigidez de los elementos individuales para formar una matriz de rigidez global (o global) para la estructura.

Considere la siguiente estructura simple:



Tenga en cuenta que los elementos individuales tienen diferentes rigideces: k_1 y k_2 . Por lo tanto, se puede escribir la relación de desplazamiento de fuerza para ambos elementos como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \dots(3)$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(4)$$

Se puede ampliar estas ecuaciones para que abarquen todos los nodos de la estructura:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(5)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(6)$$

Se puede añadir las ecuaciones (5) y (6) para determinar el total de ambas, las fuerzas y desplazamientos en cada nodo en la estructura:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(7)$$

Como puede verse a partir de esta ecuación, mediante la adición de, se tiene la rigidez total de en cada nodo, con contribuciones como apropiada por cada miembro. En particular, el nodo 2, donde los miembros se reúnen, tiene la rigidez total de $k_1 + k_2$. Se puede reescribir esta ecuación como:

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

Donde:

$\{F\}$ es el vector de fuerza de la estructura

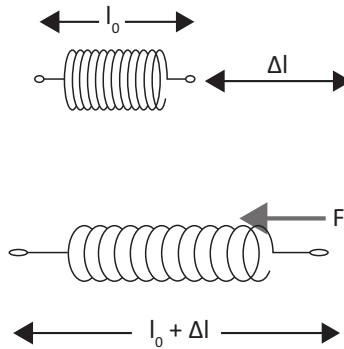
$[K]$ es la matriz de rigidez global de la estructura

$\{u\}$ es el vector de desplazamiento de la estructura

2.3. ASOCIACIÓN DE RESORTES

2.3.1. LA FUERZA Y ENERGÍA ELÁSTICAS DE UN RESORTE O MUELLE

Un resorte o muelle es un dispositivo mecánico que puede comprimirse o dilatarse y que vuelve a su posición original o natural, siempre que el desplazamiento no sea demasiado grande, existiendo un límite para estos desplazamientos; más allá de ellos, el resorte no volvería a su longitud natural. Para pequeñas compresiones o estiramientos, la fuerza ejercida por el resorte es directamente proporcional a ellos.



Si l_0 es la longitud natural del resorte y se alarga Δl cuando actúa la fuerza F , entonces:

$$\vec{F} = -K \Delta \vec{l}$$

La energía potencial elástica de un resorte vale lo siguiente:

$$U = \frac{1}{2} K (\Delta l)^2$$

Entonces cada resorte o muelle viene caracterizado por una constante **K**, llamada «constante elástica o recuperadora». El signo negativo indica que los sentidos de los vectores **F** y **Δl** son contrarios.

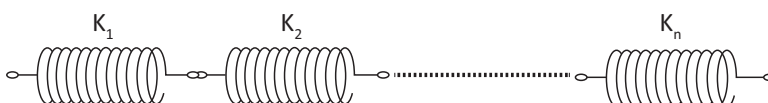
2.3.2. ASOCIACIÓN O ACOPLAMIENTO DE RESORTES

Los resortes, al igual que las resistencias eléctricas y los condensadores, pueden acoplarse de dos formas radicalmente diferentes: serie y paralelo. Por supuesto, cualquier otra asociación mixta que se pueda formar entre estas dos.

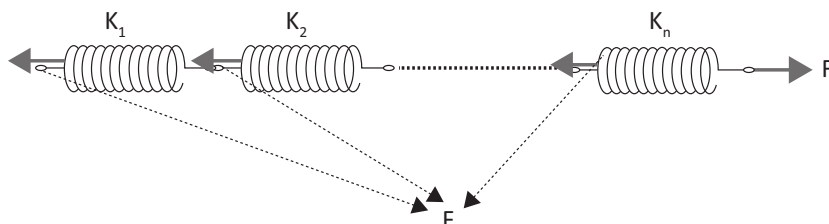
Estudiar una “batería” de resortes, conociendo las propiedades que tienen en cada una de las configuraciones base, simplifica extraordinariamente el cálculo de las mismas.

A. ASOCIACIÓN SERIE

Una cantidad n de resortes están asociados o acoplados en serie, si cada uno de ellos se inserta a continuación de otro en la misma línea de acción:



Si sobre uno de los extremos de los resortes, se ejecuta una fuerza de compresión o de estiramiento **F**, manteniendo fijo el otro extremo, esta fuerza será la que actúe sobre cada uno de los resortes, sufriendo cada uno de ellos su propia compresión o estiramiento, respectivamente, según valgan sus constantes recuperadoras.



Los resortes habrán sufrido unos incrementos de longitud, directamente proporcionales a sus constantes recuperadoras. Así:

Resorte 1º:	$F = K_1 \Delta l_1$	$\Delta l_1 = F / K_1$
" 2º:	$F = K_2 \Delta l_2$	$\Delta l_2 = F / K_2$
.....		
" nº:	$F = K_n \Delta l_n$	$\Delta l_n = F / K_n$

Se desea conocer cuál sería la constante recuperadora de un solo resorte que, sometido a la misma fuerza **F** que el sistema en serie, sufriese un incremento de longitud equivalente a la suma de los incrementos sufridos por cada uno de ellos y que, por tanto, tuviese la misma energía potencial elástica que el sistema en serie.

$$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n$$

Es decir:

$$\frac{F}{K_s} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} + \dots + \frac{F}{K_n}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}$$

Por lo tanto:

$$K_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i}}$$

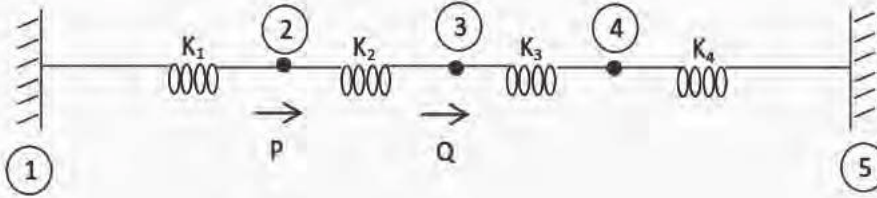
De todo lo anterior se deduce que para **n** resortes acoplados en serie, si uno de los extremos se deja fijo y sobre el otro se ejecuta una fuerza **F**, se cumple que:

- Cada resorte presenta la misma fuerza **F**, coincidente con la que actuó sobre el sistema.
- Cada resorte presenta su propio incremento de longitud Δl_i , con un módulo inversamente proporcional a la constante elástica del resorte K_i , ya que se cumple que: $\Delta l_i = F / K_i$.
- La constante elástica del único resorte equivalente en serie, vale lo siguiente:

$$K_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i}}$$

EJEMPLO 1

En el sistema mostrado, determinar los desplazamientos nodales así como las fuerzas de las paredes.



$$K_1 = 600 \text{ KN/m}$$

$$K_2 = 800 \text{ KN/m}$$

$$K_3 = 1000 \text{ KN/m}$$

$$P = 6000 \text{ N}$$

$$Q = 8000 \text{ N}$$

$$K_4 = 1200 \text{ KN/m}$$

A. Resolución

Paso 1: Genere la matriz de rigidez de cada elemento resorte:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix}$$

Paso 2: La matriz ensamblada es igual a la suma de las matrices parciales:

$$IK = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Donde:

$$IK = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz de rigidez global. Analizando el sistema se observa dos paredes, en los nodos 1 y 5. En dichos puntos, no puede haber desplazamiento, razón por la cual:

$$U_1 = U_5 = 0$$

Paso 3: Por esta razón, utilizando el método de eliminación, cancele las filas y columnas 1 y 5:

$$1000 \begin{bmatrix} \cancel{600} & \cancel{600} & 0 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{-600} & 1400 & -800 & 0 & 0 \\ 0 & -800 & 1800 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 & 2200 & -1200 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1200} & \cancel{1200} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cancel{U_1} \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \cancel{U_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{F_1} \\ 6000 \\ 8000 \\ 0 \\ \cancel{F_5} \end{bmatrix}$$

De tal manera que la matriz simplificada es como sigue:

$$1000 \begin{bmatrix} 1400 & -800 & 0 \\ -800 & 1800 & -1000 \\ 0 & -1000 & 2200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 8000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 1000*[1400 -800 0; -800 1800 -1000; 0 -1000 2200]
```

```
A =
```

```
1400000    -800000         0
-800000    1800000   -1000000
         0   -1000000    2200000
```

```
>> f = [6000; 8000; 0]
```

```
f =
```

```
6000
8000
     0
```

```

>> u = inv(A)*f

u =

    0.0116
    0.0129
    0.0058

>> % LA MATRIZ GLOBAL K ES:
>> K = 1000*[600 -600 0 0 0; -600 1400 -800 0 0; 0 -800 1800 -1000 0; 0 0 1000
2200 -1200; 0 0 0 -1200 1200]

K =

    600000    -600000         0         0         0
   -600000    1400000   -800000         0         0
         0   -800000    1800000  -1000000         0
         0         0    1000000    2200000  -1200000
         0         0         0   -1200000    1200000

>> % EL VECTOR DESPLAZAMIENTO GLOBAL U ES:
>> U = [0; 0.0116; 0.0129; 0.0058; 0]

U =

     0
    0.0116
    0.0129
    0.0058
     0

>> % LA FUERZA EN LAS PAREDES ES:
>> F = K*U

F =

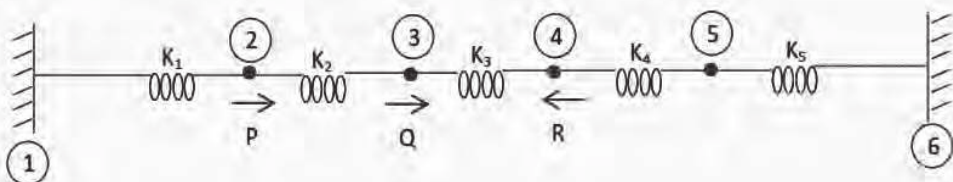
    1.0e+004 *

   -0.6960
    0.5920
    0.8140
    2.5660
   -0.6960

```

EJEMPLO 2

Según el gráfico y los datos presentados, resolver lo siguiente:



$$K_1 = 600 \text{ kN/m}$$

$$P = 5000 \text{ N}$$

$$S = -10000 \text{ N (Fuerza de Eq.)}$$

$$K_2 = K_3 = 1200 \text{ kN/m}$$

$$Q = 7000 \text{ N}$$

$$K_4 = K_5 = 1800 \text{ kN/m}$$

$$R = -2000 \text{ N}$$

A. Resolución

Paso 1: Genere la matriz de rigidez de cada elemento resorte:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_5 & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix}$$

Paso 2: La matriz ensamblada es igual a la suma de las matrices parciales:

$$IK = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1200 & 2400 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1200 & 3000 & -1800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1800 & 3600 & -1800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1800 & 1800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} IU \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IF \\ F_1 \\ 5000 \\ 7000 \\ -2000 \\ 0 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Esta es la matriz de rigidez global. Analizando el sistema, se observa dos paredes, en los nodos 1 y 6. En dichos puntos, no puede haber desplazamiento, razón por la cual:

$$U_1 = U_6 = 0$$

Paso 4: Por esta razón, utilizando el método de eliminación, cancele las filas y columnas 1 y 6:

$$IK = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1200 & 2400 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1200 & 3000 & -1800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1800 & 3600 & -1800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1800 & 1800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} IU \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IF \\ F_1 \\ 5000 \\ 7000 \\ -2000 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

De tal manera que la matriz simplificada es como sigue:

$$1000 \begin{bmatrix} 1800 & -1200 & 0 & 0 \\ -1200 & 2400 & -1200 & 0 \\ 0 & -1200 & 3000 & -1800 \\ 0 & 0 & -1800 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 7000 \\ -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 1000*[1800 -1200 0 0; -1200 2400 -1200 0; 0 -1200 3000 -1800; 0 0 -1800 0]
```

```
A =
```

```
1800000    -1200000         0         0
-1200000    2400000   -1200000         0
         0   -1200000    3000000   -1800000
         0         0   -1800000         0
```

```
>> f = [5000; 7000; -2000; 0]
```

```

f =
    6000
    5000
    7000
   -2000
     0

>> U = inv(A)*f

U =

    0.0071 m
    0.0065 m
   -0.0000 m
   -0.0032 m

>> % LA MATRIZ ENSAMBLADA K ES:

>> K = 1000* [600 -600 0 0 0 0; -600 1800 -1200 0 0 0; 0 -1200 2400 -1200 0 0; 0
0 -1200 3000 -1800 0; 0 0 0 -1800 3600 -1800; 0 0 0 0 -1800 1800]

K =

    600000    -600000         0         0         0         0
   -600000    1800000   -1200000         0         0         0
         0   -1200000    2400000   -1200000         0         0
         0         0   -1200000    3000000   -1800000         0
         0         0         0   -1800000    3600000   -1800000
         0         0         0         0   -1800000    1800000

>> % EL VECTOR DESPLAZAMIENTO GLOBAL D ES:
>> D = [0; 0.0071; 0.0065; -0.0000; -0.0032; 0]

D =

     0
    0.0071
    0.0065
     0
   -0.0032
     0

>> F = K*D

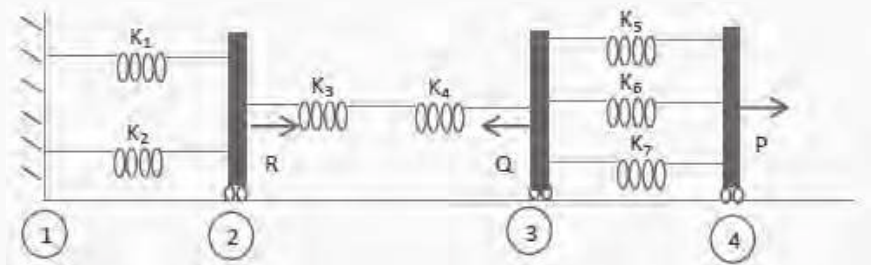
F =

   -4260
    4980
    7080
   -2040
   -11520

```


EJEMPLO 3

Resolver según el diagrama y los datos siguientes:



$$K_1 = K_3 = 2000 \text{ kN/m}$$

$$P = 3000 \text{ N}$$

$$K_2 = K_4 = 4000 \text{ kN/m}$$

$$Q = 8000 \text{ N}$$

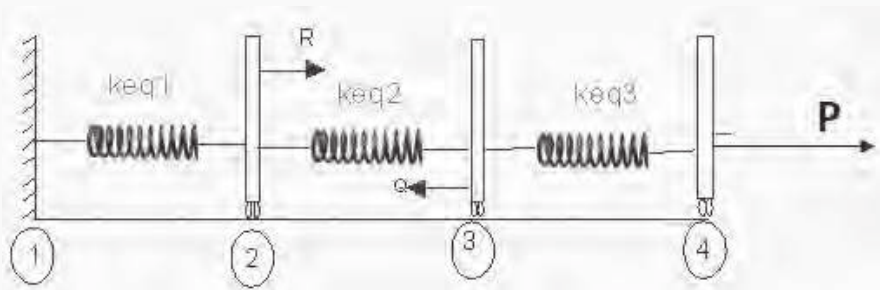
$$K_5 = K_6 = 6000 \text{ kN/m}$$

$$R = 15000 \text{ N}$$

$$K_7 = 10000 \text{ kN/m}$$

A. Resolución

Paso 1: Redibujando el sistema:



Paso 2: Hallando los valores de K_{eq} :

$$K_{eq1} = 2000 \text{ kN/m} + 4000 \text{ kN/m} = 6000 \text{ kN/m}$$

$$\frac{1}{K_{eq2}} = \frac{1}{2000} \frac{\text{KN}}{\text{m}} + \frac{1}{4000} \frac{\text{KN}}{\text{m}} = 1333.33 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_{eq3} = 6000 \text{ kN/m} + 6000 \text{ kN/m} + 10000 \text{ kN/m} = 22000 \text{ kN/m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> keq1 = 1000*[6000 6000 0 0; -6000 6000 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]
```

```
keq1 =
```

```

6000000    6000000         0         0
-6000000    6000000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

```

>> keq2 = 1000*[0 0 0 0; 0 1333.33 -1333.33 0; 0 -1333.33 1333.33 0; 0 0 0 0]

keq2 =

     0         0         0         0
     0    1333330   -1333330         0
     0   -1333330    1333330         0
     0         0         0         0

>> keq3 = 1000*[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 22000 -22000; 0 0 -22000 22000]

keq3 =

     0         0         0         0
     0         0         0         0
     0         0    22000000   -22000000
     0         0   -22000000    22000000

>> K = keq1 + keq2 + keq3

K =

    6000000    6000000         0         0
   -6000000    7333330   -1333330         0
         0   -1333330    2333330   -22000000
         0         0   -22000000    22000000

>> Y = [7333330   -1333330 0; -1333330    2333330   -22000000; 0   -22000000
22000000]

Y =

    7333330   -1333330         0
   -1333330    2333330   -22000000
         0   -22000000    22000000

>> F = [15000; -8000; 12000]

F =

    15000
    -8000
     12000

>> U = inv(Y)*F

U =

    0.0032
    0.0062
    0.0067

```

Equilibrando fuerzas

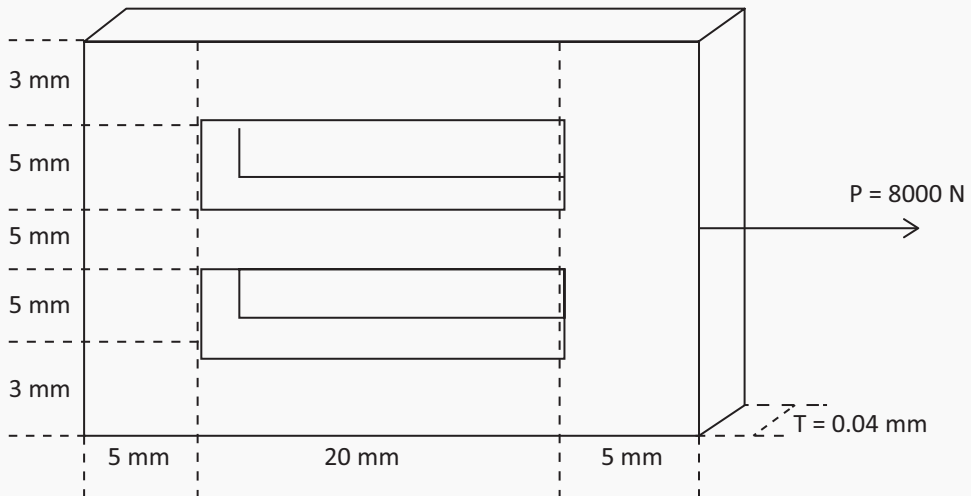
$$F_4 = -keq_3 \times U_3 + keq_4 \times U_4$$

$$\left(-22000 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^3\right) \times (0.0062) + \left(22000 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^3\right) \times (0.0067) = 11000 \text{ N}$$

EJEMPLO 4

Resolver según el diagrama y los datos siguientes:

$$E = 250 \text{ G Pa}$$



$$K_1 = K_3 = 2000 \text{ kN/m}$$

$$P = 3000 \text{ N}$$

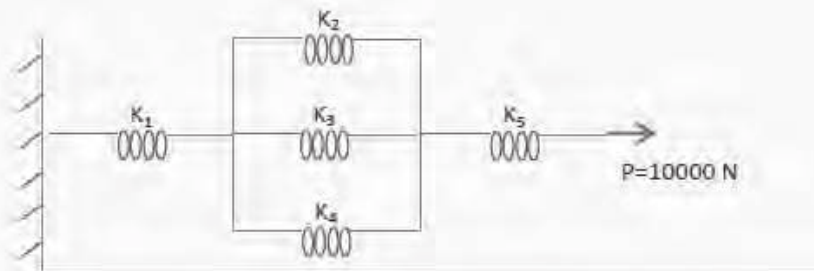
$$K_2 = K_4 = 4000 \text{ kN/m}$$

$$Q = 8000 \text{ N}$$

$$K_5 = K_6 = 6000 \text{ kN/m}$$

$$R = 15000 \text{ N}$$

$$K_7 = 10000 \text{ kN/m}$$

A. Resolución

Cálculo de K:

$$k_1 = k_5 = \frac{(21 \times 10^{-3})(0.04 \times 10^{-3})(250 \times 10^9)}{(5 \times 10^{-3})} = 42000 \text{ kN/m}$$

$$k_2 = k_4 = \frac{(3 \times 10^{-3})(0.04 \times 10^{-3})(250 \times 10^9)}{(20 \times 10^{-3})} = 1500 \text{ kN/m}$$

$$k_3 = \frac{(5 \times 10^{-3})(0.04 \times 10^{-3})(250 \times 10^9)}{(20 \times 10^{-3})} = 2500 \text{ kN/m}$$

$$K_{eq1} = K_2 + K_3 + K_4 = 1500 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 2500 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 1500 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 5500 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=1000*[42000 -42000 0 0;-42000 42000 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]

k1 =

    42000000    -42000000         0         0
   -42000000     42000000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0

>> keq1=1000*[0 0 0 0; 0 5500 -5500 0; 0 -5500 5500 0; 0 0 0 0]

keq1 =

         0         0         0         0
         0     5500000    -5500000         0
         0    -5500000     5500000         0
         0         0         0         0

>> k5=1000*[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 42000 -42000; 0 0 -42000 42000]

k5 =

         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0    42000000   -42000000
         0         0   -42000000    42000000

>> K=k1+keq1+k5

K =

    42000000    -42000000         0         0
   -42000000     47500000    -5500000         0
         0    -5500000     47500000   -42000000
         0         0   -42000000    42000000

>> Y= [47500000 -5500000 0; -5500000 47500000 -42000000; 0 -42000000 42000000]

Y =

    47500000    -5500000         0
   -5500000     47500000   -42000000
         0    -42000000    42000000

>> F= [0; 0; 10000]

F =

         0
         0
    10000

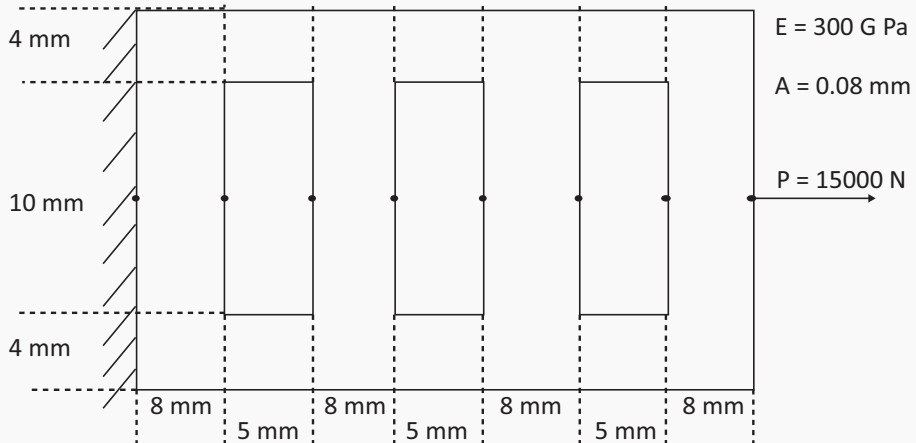
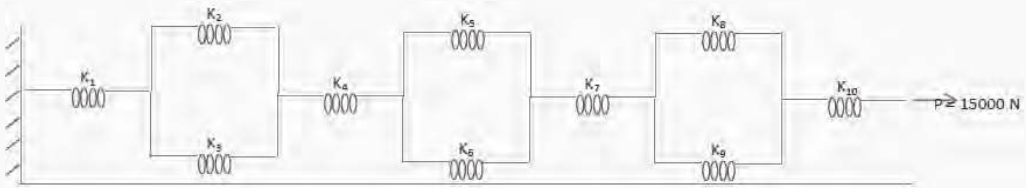
>> U=inv(Y)*F

U =

    0.0002
    0.0021
    0.0023
```

EJEMPLO 5

Resolver según el diagrama y los datos siguientes:

**A. Resolución**

Cálculo de K:

$$k_1 = k_4 = k_7 = k_{10} = \frac{(18 \times 10^{-3})(0.08 \times 10^{-3})(300 \times 10^9)}{(8 \times 10^{-3})} = 54000 \text{ KN/m}$$

$$k_2 = k_3 = k_5 = k_6 = k_8 = k_9 = \frac{(4 \times 10^{-3})(0.08 \times 10^{-3})(300 \times 10^9)}{(5 \times 10^{-3})} = 19200 \text{ KN/m}$$

Valores de K:

$$k_1 = k_4 = k_7 = k_{10} = 54000 \text{ KN/m}$$

$$k_{eq1} = k_{eq2} = k_{eq3} = 19200 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 19200 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 38400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>>k1=1000*[54000 -54000 0 0 0 0 0; -54000 54000 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

 $k_1 =$ [illegible]

```
>>keq1=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 384000 -38400 0 0 0 0; 0 -38400 38400 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

keq1 =

[illegible]

```
>>k4=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 54000 -54000 0 0 0; 0 0 -54000 54000 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

 $k_4 =$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	54000000	-54000000	0	0	0	0
0	0	-54000000	54000000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>>keq2=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 38400 -38400 0 0; 0 0 0 38400 38400 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

$$\text{keq2} =$$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	38400000	-38400000	0	0	0
0	0	0	-38400000	38400000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>>k7=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 54000
-54000 0 0; 0 0 0 0 -54000 54000 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

k7 =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	54000000	-54000000	0	0
0	0	0	0	-54000000	54000000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>>keq3=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 38400 -38400 0; 0 0 0 0 0 -38400 38400 0; 0 0 0 0 0 0 0]
```

keq3 =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	38400000	-38400000	0
0	0	0	0	0	-38400000	38400000	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>>k10=1000*[0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 54000 -54000; 0 0 0 0 0 -54000 54000]
```

k10 =

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	54000000	-54000000
0	0	0	0	0	0	-54000000	54000000

```
>> K= k1+keq1+k4+keq2+ k7+ keq3+ k10
```

K =

54000000	-54000000	0	0	0	0	0	0
-54000000	92400000	-38400000	0	0	0	0	0
0	-38400000	32400000	-54000000	0	0	0	0
0	0	-54000000	92400000	-38400000	0	0	0
0	0	0	-38400000	92400000	-54000000	0	0
0	0	0	0	-54000000	92400000	-38400000	0
0	0	0	0	0	-38400000	92400000	-54000000
0	0	0	0	0	0	-54000000	54000000

```
>>Y = [92400000 -38400000 0 0 0 0; -38400000 92400000 -54000000 0 0 0; 0 -54000000 92400000
-38400000 0 0; 0 0 -38400000 92400000 -54000000 0; 0 0 0 -54000000 92400000 -38400000; 0 0
0 0 -38400000 92400000 -54000000 0; 0 0 0 0 -54000000 54000000]
```

```
Y =
92400000 -38400000 0 0 0 0 0
-38400000 92400000 -54000000 0 0 0 0
0 -54000000 92400000 -38400000 0 0 0
0 0 -38400000 92400000 -54000000 0 0
0 0 0 -54000000 92400000 -38400000 0
0 0 0 0 -38400000 92400000 -54000000
0 0 0 0 0 -54000000 54000000

>> F = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 15000]

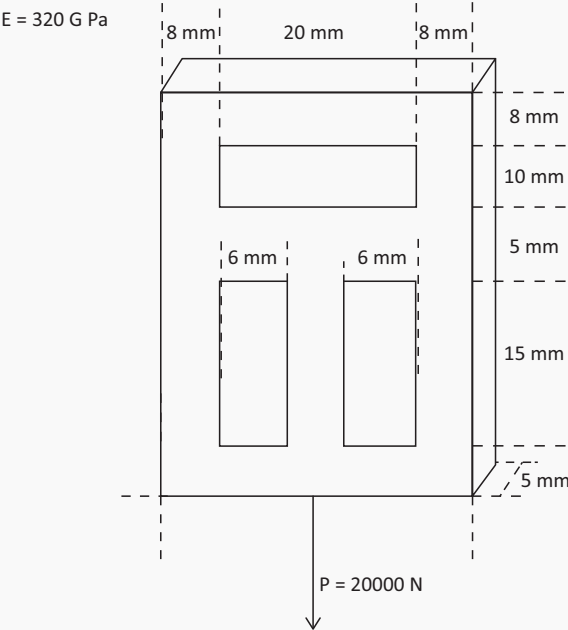
F =
0
0
0
0
0
0
15000

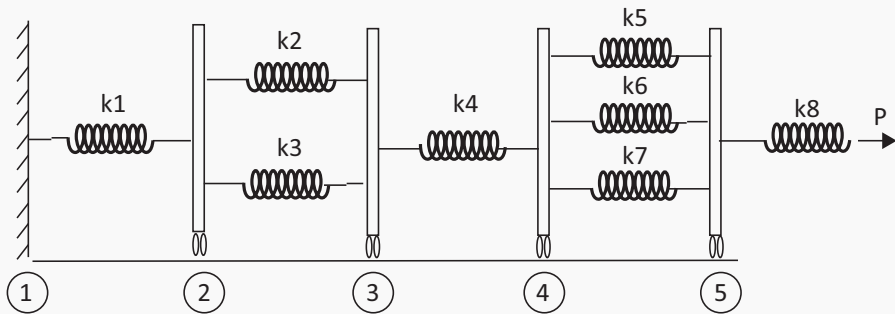
>> U= inv (Y)*F

U =
0.0003
0.0007
0.0009
0.0013
0.0016
0.0020
0.0023
```

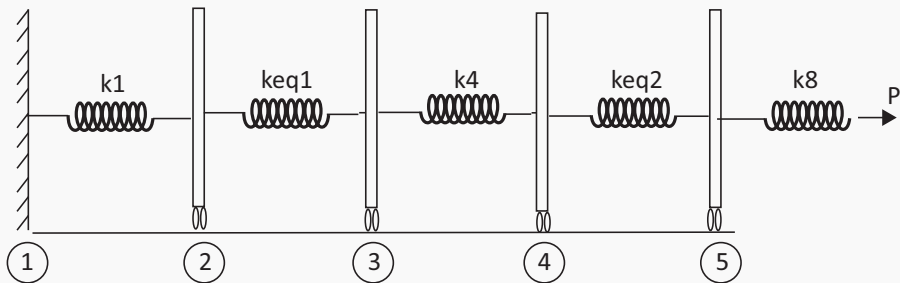
EJEMPLO 6

Resolver según el diagrama (en la parte superior el sistema está empotrado) y los datos siguientes:



A. Resolución

Redibujando:



Cálculo de K:

$$k_1 = \frac{(36 \times 10^{-3})(0.075 \times 10^{-3})(320 \times 10^9)}{(8 \times 10^{-3})} = 108000 \text{ KN/m}$$

$$k_2 = k_3 = \frac{(8 \times 10^{-3})(0.075 \times 10^{-3})(320 \times 10^9)}{(10 \times 10^{-3})} = 19200 \text{ KN/m}$$

$$k_4 = k_8 = \frac{(36 \times 10^{-3})(0.075 \times 10^{-3})(320 \times 10^9)}{(5 \times 10^{-3})} = 172800 \text{ KN/m}$$

$$k_5 = k_7 = \frac{(8 \times 10^{-3})(0.075 \times 10^{-3})(320 \times 10^9)}{(15 \times 10^{-3})} = 12800 \text{ KN/m}$$

$$k_6 = \frac{(8 \times 10^{-3})(0.075 \times 10^{-3})(320 \times 10^9)}{(15 \times 10^{-3})} = 12800 \text{ KN/m}$$

Valores de K:

$$k_1 = 108000 \text{ KN/m}$$

$$keq_1 = 19200 \text{ KN/m} + 19200 \text{ KN/m} = 38400 \text{ KN/m}$$

$$k_4 = k_8 = 172800 \text{ KN/m}$$

$$keq_2 = 12800 \text{ KN/m} + 320000 \text{ KN/m} + 12800 \text{ KN/m} = 38400 \text{ KN/m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=1000*[108000 -108000 0 0 0 0;-108000 108000 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 ]
```

```
k1 =
```

```
108000000 -108000000 0 0 0 0
-108000000 108000000 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

```
>> keq1=1000*[0 0 0 0 0; 0 38400 -38400 0 0 0;-38400 38400 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 ]
```

```
keq1 =
```

```
0 0 0 0 0 0
0 38400000 -38400000 0 0 0
0 -38400000 38400000 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

```
>> k4=1000*[0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 172800 -172800 0 0;0 0 -172800 172800 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 ]
```

```
k4 =
```

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 172800000 -172800000 0 0
0 0 -172800000 172800000 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

```
>> keq2=1000*[0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 83200 -83200 0;0 0 0 -83200 83200 0;0 0 0 0 0 0 ]
```

```
keq2 =
```

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 83200000 -83200000 0
0 0 0 -83200000 83200000 0
0 0 0 0 0 0
```

```
>> k=1000*[0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0;0 0 0 172800 -172800;0 0 0 -172800 172800 ]
```

```
k =
```

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 172800000 -172800000
0 0 0 -172800000 172800000
```

```
>> K=k1+keq1+k4+keq2+k
```

```
K =
```

```

108000000 -108000000      0      0      0      0
-108000000 146400000 -38400000      0      0      0
      0 -38400000 211200000 -172800000      0      0
      0      0 -172800000 256000000 -83200000      0
      0      0      0 -83200000 256000000 -172800000
      0      0      0      0 -172800000 172800000

```

```
>> Y = [1.4640 -0.3840 0 0 0;-0.3840 2.1120 -1.7280 0 0;0 -1.7280 2.5600 -0.8320
0;0 0 -0.8320 2.5600 -1.7280;0 0 0 -1.7280 1.7280]
```

```
Y =
```

```

1.4640 -0.3840      0      0      0
-0.3840 2.1120 -1.7280      0      0
      0 -1.7280 2.5600 -0.8320      0
      0      0 -0.8320 2.5600 -1.7280
      0      0      0 -1.7280 1.7280

```

```
>> F= [0; 0; 0; 0; 20000]
```

```
F =
```

```

      0
      0
      0
      0
20000

```

```
>> U=inv(Y)*F
```

```
U =
```

```

1.0e+005 *
      0.1852
      0.7060
      0.8218
      1.0621
      1.1779

```

PRINCIPIO DE HIPERESTATICIDAD

3.1. GRADOS DE INDETERMINACIÓN

En el análisis estructural, se consideran dos tipos de indeterminación: la estática y cinemática. La primera, tiene relación con las fuerzas y, la segunda, con los desplazamientos.

3.1.1. INDETERMINACIÓN ESTÁTICA

Se refiere a un exceso de reacciones y fuerzas internas desconocidas, comparadas con las ecuaciones de equilibrio de la estática. Esto da lugar a clasificar las estructuras como estáticamente determinadas y estáticamente indeterminadas. Las fuerzas internas o reacciones desconocidas que no se pueden obtener con las ecuaciones de equilibrio se denominan «fuerzas redundantes» y el número de fuerzas redundantes define el grado de indeterminación estática o hiperestaticidad.

Existen dos tipos de indeterminación estática: externa e interna. La **indeterminación externa** se refiere al número de reacciones redundantes de la estructura y la **indeterminación interna** al número de fuerzas de la estructura que no pueden conocerse con las ecuaciones de la estática. El grado total de indeterminación es la suma de ambas.

3.1.2. INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA

Se refiere al número de desplazamientos desconocidos o redundantes que describen el comportamiento de la estructura (movimiento) cuando esta se sujeta a acciones de carga.

3.2. CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS

Las estructuras se dividen, desde el punto de vista de los métodos de análisis, en isostáticas o estáticamente determinadas, hiperestáticas o estáticamente indeterminadas. Las **estructuras isostáticas** son aquellas que se pueden resolver utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio de la estática. Por el contrario, para analizar **estructuras hiperestáticas** es necesario plantear, además de las ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad de deformaciones entre los elementos de la estructura y los apoyos.

3.3. CÁLCULO DEL GRADO DE INDETERMINACIÓN O HIPERESTATICIDAD

Cuando una estructura es isostática, su grado de indeterminación $GH = 0$; ya que es estáticamente determinada. Las estructuras hiperestáticas pueden tener distintos grados de indeterminación $GH > 0$ si una estructura es inestable su grado de indeterminación es $GH < 0$.

Es decir:

$GH > 0$ Estructuras hiperestáticas

$GH = 0$ Estructuras isoestáticas

$GH < 0$ Estructuras inestables

En el caso de armaduras y marcos, pueden ser externas o internamente indeterminadas. Son **externamente indeterminadas** cuando el número de reacciones es mayor que el número de las ecuaciones de equilibrio más las ecuaciones de condición. La **indeterminación interna** ocurre cuando el número de miembros es mayor al mínimo necesario para que la estructura sea estable.

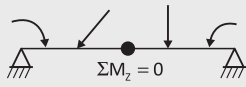
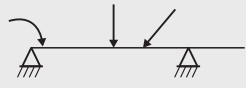
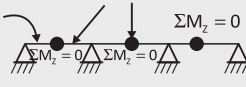
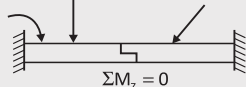
ELEMENTO	GRADO DE HIPERESTATICIDAD	GRADO DE LIBERTAD
Vigas	$GHT = NR - NEE - C$	$GL = 3NN - NR$
Armaduras	$GHT = GHE + GHI$	
	$GHE = NR - NEE$	$GL = 2NN - NR(2D)$
	$GHI = NE - 2NN + 3(2D)$	$GL = 3NN - NR(3D)$
	$GHI = NE - 3NN + 6(3D)$	
Marcos	$GHT = GHE + GHI$	
	$GHE = NR - NEE - C$	$GL = 3NN - NR(2D)$
	$GHI = 3NE - 3NN + NEE(2D)$	$GL = 6NN - NR(3D)$
	$GHI = 6NE - 6NN + NEE(3D)$	

Donde:

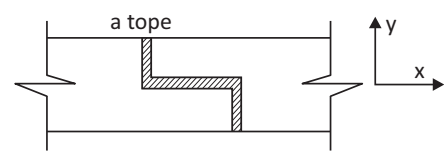
- GHT : Grado de hiperestaticidad total
- GHE : Grado de hiperestaticidad externa
- GHI : Grado de hiperestaticidad interna
- NR : Número de reacciones
- NEE : Número de ecuaciones de la estática
- NE : Número de elementos
- NN : Número de nodos
- C : Ecuaciones adicionales de condición
- GL : Grado de libertad o desplazamiento redundante

Determine el grado de hiperestaticidad de las siguientes vigas

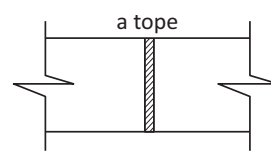
ESTRUCTURA	NN	NR	NEE	C	GH	GL	
	2	3	3	0	0	3	Isostática
	4	5	3	0	2	7	Hiperestática grado 2
	2	2	3	0	-1	4	Inestable

ESTRUCTURA	NN	NR	NEE	C	GH	GL	
	2	4	3	1	0	2	isostática
	2	3	3	0	0	3	isostática
	4	5	3	3	-1	7	Inestable
	2	6	3	1	2	0	Hiperestática grado 2

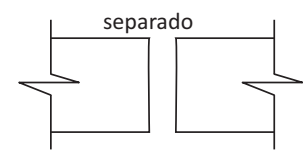
Ecuaciones de condición



$\Sigma F_x \neq 0$
 $\Sigma F_y \neq 0$
 $\Sigma M_z = 0$

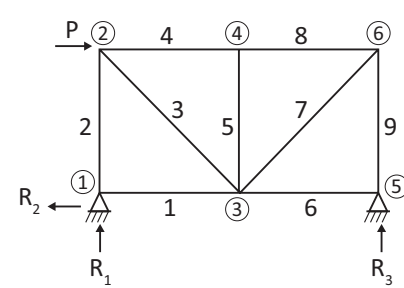


$\Sigma F_x \neq 0$
 $\Sigma F_y = 0$
 $\Sigma M_z = 0$



$\Sigma F_x = 0$
 $\Sigma F_y = 0$
 $\Sigma M_z = 0$

Determine el grado de hiperestaticidad de las siguientes armaduras



NN = 6
NE = 9
NR = 3
NEE = 3

a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

Grado de hiperestaticidad externo
 $GHE = NR - NEE = 3 - 3 = 0$

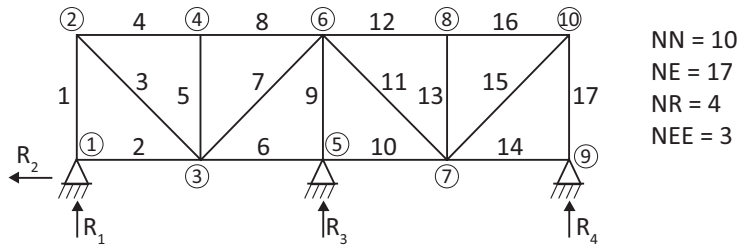
Grado de hiperestaticidad interno
 $GHI = NE - 2NN + NEE = 9 - 2(6) + 3 = 0$

Grado de hiperestaticidad total
 $GHT = 0$

Armadura estáticamente determinada externa e internamente (ISOSTÁTICA)

b) Cálculo del grado de libertad

$GL = 2NN - NR = 2(6) - 3 = 9$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NA - NEE = 4 - 3 = 1$$

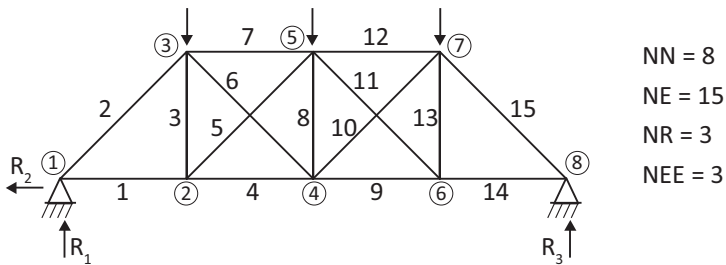
$$GHI = NE - 2NN + NEE = 17 - 2(10) + 3 = 0$$

$$GTH = 1 + 0 = 1$$

Armadura estáticamente indeterminada externamente de grado 1 y determinada internamente

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 2NN - NR = 2(10) - 4 = 16$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE = 3 - 3 = 0$$

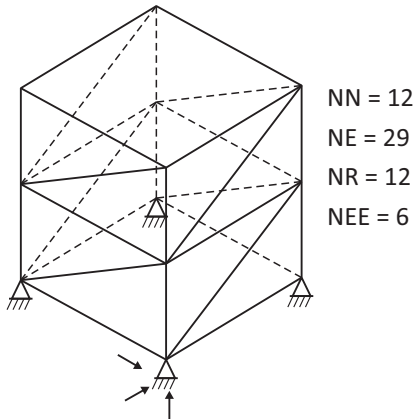
$$GHI = NE - 2NN + NEE = 15 - 2(8) + 3 = 2$$

$$GHT = GHE + GHI = 0 + 2 = 2$$

Armadura estáticamente determinada externamente e indeterminado internamente de grado 2

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 2NN - NR = 2(8) - 3 = 13$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE = 12 - 6 = 6$$

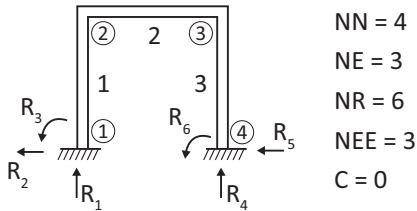
$$GHI = NE - 3NN + NEE = 29 - 3(12) + 6 = -2$$

Armadura estáticamente indeterminada externamente de grado 2 e inestable internamente

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 3NN - NR = 3(12) - 12 = 24$$

Determine el grado de hiperestaticidad (indeterminación) y de libertad de los siguientes marcos.



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE - C = 6 - 3 - 0 = 3$$

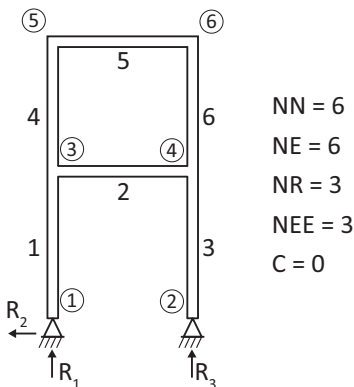
$$GHI = 3NE - 3NN + NEE = 3(3) - 3(4) + 3 = 0$$

$$GHT = GHE + GHI = 3$$

Marco estáticamente indeterminado externamente de grado 3 y determinado internamente (isostático)

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 3NN - NR = 3(4) - 6 = 6$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE - C = 3 - 3 - 0 = 0$$

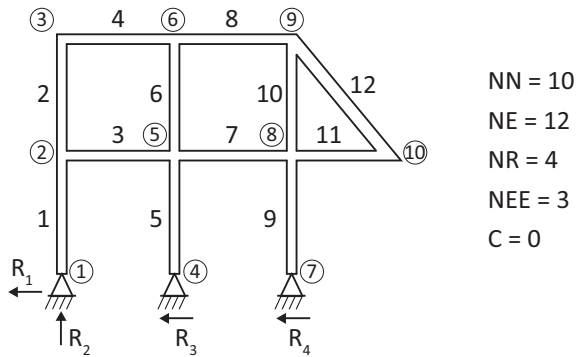
$$GHI = 3NE - 3NN + NEE = 3(6) - 3(6) + 3 = 3$$

$$GHT = GHE + GHI = 0 + 3 = 3$$

Marco estáticamente determinado externamente (isostático) e indeterminado internamente de grado 3

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 3NN - NR = 3(6) - 3 = 15$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE - C = 4 - 3 - 0 = 1$$

$$GHI = 3NE - 3NN + NEE = 3(12) - 3(10) + 3 = 9$$

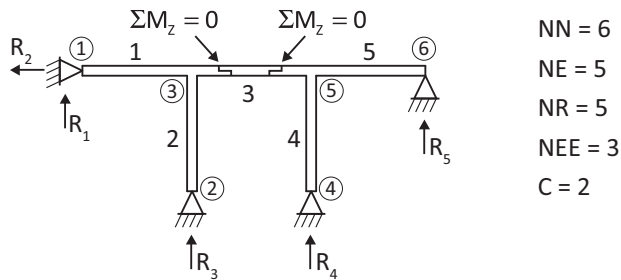
$$GHT = GHE + GHI = 1 + 9 = 10$$

Marco estáticamente indeterminado externamente de grado 1 e internamente de grado 9

Nota: Por cada crujía cerrada en los marcos, se tienen 3 grados de indeterminación interna.

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 3NN - NR = 3(10) - 4 = 26$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE - C = 5 - 3 - 2 = 0$$

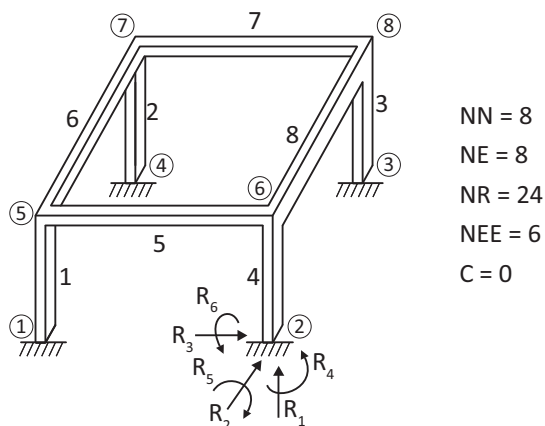
$$GHI = 3NE - 3NN + NEE = 3(5) - 3(6) + 3 = 0$$

$$GHT = 6GHE + 6GHI = 0 + 0 = 0$$

Marco estáticamente determinado externa e internamente

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 3NN - NR = 3(6) - 5 = 11$$



a) Cálculo del Grado de hiperestaticidad

$$GHE = NR - NEE - C = 24 - 6 = 18$$

$$GHI = 6NE - 6NN + NEE = 6(8) - 6(8) + 6 = 6$$

$$GHT = 6GHE + GHI = 18 + 6 = 24$$

Marco estáticamente indeterminado externamente de grado 18 e internamente de grado 6

b) Cálculo del grado de libertad

$$GL = 6NN - NR = 6(8) - 24 = 11$$

■ ■ ■ BARRA 1D

4.1. ANÁLISIS ESTÁTICO LINEAL

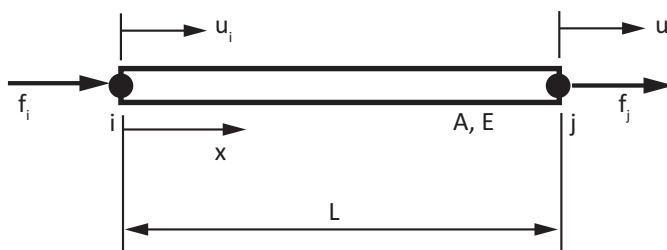
Más problemas del análisis estructural pueden tratarse como los problemas estáticos lineales, basado en las asunciones siguientes:

- Las deformaciones pequeñas (el modelo cargando no se cambia a la forma deformada).
- Los materiales elásticos (ninguna plasticidad).
- Las cargas estáticas (la carga se aplica a la estructura en un modo lento).

El análisis lineal puede proporcionar la mayoría de la información sobre la conducta de una estructura y puede ser una aproximación adecuada para muchos análisis. También, constituye la base de análisis no lineal en la mayoría de los casos.

4.1.1. CONSTRUIR EL ELEMENTO

Considere una barra prismática uniforme:



Donde:

L Longitud

A Área de la sección transversal

E Módulo de elasticidad

$u = u(x)$ Desplazamiento

$\epsilon = \epsilon(x)$ Deformación

$\sigma = \sigma(x)$ Esfuerzo

La relación de deformación-desplazamiento:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

La relación del esfuerzo-deformación:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2)$$

4.1.2. MATRIZ DE RIGIDEZ Y EL MÉTODO DIRECTO

Asumiendo que el desplazamiento $u_{(y)}$ está variando linealmente a lo largo del eje de la barra, es decir:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (3)$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\sigma = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L} \quad (\Delta = \text{Elongación}) \quad (4)$$

$$\sigma = E\epsilon = \frac{E\Delta}{L} \quad (5)$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (F = \text{Fuerza en la barra}) \quad (8)$$

Así, (5) y (6) lleva a:

$$F = \frac{EA}{L} \Delta = k \Delta \quad (7)$$

Donde:

$$k = \frac{EA}{L} \text{ es la rigidez de la barra}$$

En este caso, la barra está actuando como un resorte y se concluye que la matriz de rigidez de la barra es como sigue:

$$k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Esto puede verificarse considerando el equilibrio de las fuerzas a los dos nodos.

La ecuación de equilibrio del elemento estaría dada por la siguiente:

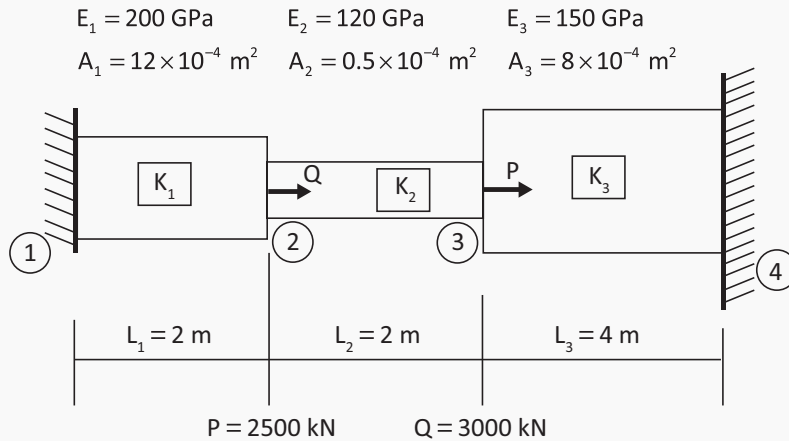
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

- El grado de libertad (dof)
- El número de componentes del vector del desplazamiento a un nodo
- Para 1D, el elemento de la barra: un dof a cada nodo.
- El significado físico de los coeficientes en k

La j-ésima columna de k (aquí j = 1 o 2) representa las fuerzas aplicadas a la barra para mantener una forma deformada con el desplazamiento de la unidad al nodo j y cero desplazamiento al otro nodo.

EJERCICIO 1

Hallar los desplazamientos nodales, los esfuerzos y las fuerzas en las paredes en el siguiente sistema de barras sometidas a cargas axiales:

**A. Resolución**

Paso 1: Calcule las rigideces de cada barra.

$$K_1 = \frac{E_1 \times A_1}{L_1} = \frac{\left(\frac{200 \times 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} \right) \times (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{2 \text{ m}} = 20 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_2 = \frac{E_2 \times A_2}{L_2} = \frac{\left(\frac{120 \times 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} \right) \times (0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{2 \text{ m}} = 3 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_3 = \frac{E_3 \times A_3}{L_3} = \frac{\left(\frac{150 \times 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} \right) \times (8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{4 \text{ m}} = 30 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Paso 2: Defina cada una de las rigideces.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 20 \times 10^6 & -20 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -20 \times 10^6 & 20 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \times 10^6 & -3 \times 10^6 & 0 \\ 0 & -3 \times 10^6 & 3 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \times 10^6 & -30 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -30 \times 10^6 & 30 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

La matriz ensamblada es como sigue.

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$K_T = \begin{pmatrix} 20 \times 10^6 & -20 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -20 \times 10^6 & 23 \times 10^6 & -3 \times 10^6 & 0 \\ 0 & -3 \times 10^6 & 33 \times 10^6 & -30 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -30 \times 10^6 & 30 \times 10^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ Q \\ P \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Como los nodos 1 y 4 están conectados a la pared, sus desplazamientos son cero; razón por la cual se pueden eliminar las filas y columnas 1 y 4, respectivamente; de tal manera que la matriz simplificada estaría dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 23 \times 10^6 & -3 \times 10^6 \\ -3 \times 10^6 & 33 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^6 \\ 3 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = 0.1220 \text{ m}$$

$$u_3 = 0.1020 \text{ m}$$

Paso 4: Por tanto, las fuerzas estarían dadas por los siguientes valores:

$$F_1 = -K_1 \times u_2 = -2.44 \times 10^6$$

$$F_4 = -K_3 \times u_3 = -3.06 \times 10^6$$

Paso 5: Calcule los esfuerzos introduciendo los datos en MATLAB y su procedimiento para cada uno, aplicando la fórmula siguiente:

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1-2} = \left(\frac{200 \times 10^9}{2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1220 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1-2} = 12.2 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{2-3} = \left(\frac{120 \times 10^9}{2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1220 \\ 0.1020 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{2-3} = -1.2 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{3-4} = \left(\frac{150 \times 10^9}{4} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1020 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{3-4} = -3.825 \text{ GPa}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 10^6*[23 -3; -3 33]

A =

    23000000    -3000000
   -3000000    33000000

>> f = 10^3*[2500; 3000]

f =

    2500000
    3000000

>> u = inv(A)*f

u =

    0.1220
    0.1020

>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> E1 = 200*10^9;
>> E2 = 120*10^9;
>> E3 = 150*10^9;
>> L1 = 2;
>> L2 = 2;
>> L3 = 4;
>> U1 = 0;
>> U2 = 0.1220;
>> U3 = 0.1023;
>> U4 = 0;
>> % ESFUERZO ENTRE 1 Y 2:
>> G12 = (E1/L1)*[-1 1]*[U1; U2]

G12 =

    1.2200e+010

>> % ESFUERZO ENTRE 2 Y 3:
>> G23 = (E2/L2)*[-1 1]*[U2; U3]

G23 =

   -1.2000e+009
```

```

>> % ESFUERZO ENTRE 3 Y 4:
>> G34 = (E3/L3)*[-1 1]*[U3; U4]

G34 =

-3.8250e+009

>> % LA MATRIZ ENSAMBLADA K ES:
>> K = [20*10^6 -20*10^6 0 0; -20*10^6 23*10^6 -3*10^6 0; 0 -3*10^6 33*10^6
-30*10^6; 0 0 -30*10^6 30*10^6]

K =

20000000 -20000000 0 0
-20000000 23000000 -3000000 0
0 -3000000 33000000 -30000000
0 0 -30000000 30000000

>> % EL VECTOR DESPLAZAMIENTO ES:
>> U = [0; 0.1220; 0.1020; 0]

U =

0
0.1220
0.1020
0

>> % CALCULO DE LAS FUERZAS EN LAS PAREDES:
>> F = K*U

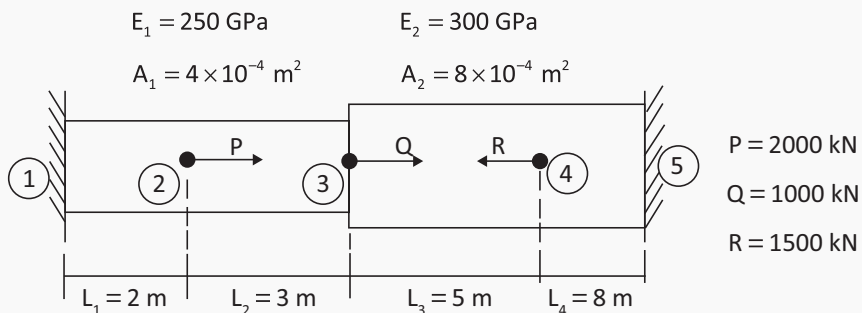
F =

-2440000
2500000
3000000
-3060000

```

EJERCICIO 2

Hallar los desplazamientos nodales, los esfuerzos y las fuerzas en las paredes en el siguiente sistema de barras sometidas a cargas axiales:



A. Resolución

$$K_1 = \frac{E_1 \times A_1}{L_1} = \frac{(250 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{2} = 50 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_2 = \frac{E_1 \times A_1}{L_2} = \frac{(250 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{3} = 33 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_3 = \frac{E_2 \times A_2}{L_3} = \frac{(300 \times 10^9)(8 \times 10^{-4})}{5} = 48 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_4 = \frac{E_2 \times A_2}{L_4} = \frac{(300 \times 10^9)(8 \times 10^{-4})}{8} = 30 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ P \\ R \\ -Q \\ F_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 83 \times 10^6 & -33 \times 10^6 & 0 \\ -33 \times 10^6 & 81 \times 10^6 & -48 \times 10^6 \\ 0 & -48 \times 10^6 & 78 \times 10^6 \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}}_\mu = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \times 10^6 \\ 1.5 \times 10^6 \\ -1 \times 10^6 \end{pmatrix}}_F$$

$$\mu_2 = 0.0523$$

$$\mu_3 = 0.0709$$

$$\mu_4 = 0.0629$$

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{250 \times 10^9}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0523 \end{bmatrix} = 6.5375 \text{ GPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{250 \times 10^9}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0523 \\ 0.0709 \end{bmatrix} = 1.55 \text{ GPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{300 \times 10^9}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0709 \\ 0.0629 \end{bmatrix} = -4.80 \text{ GPa}$$

$$\sigma_4 = \frac{300 \times 10^9}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0629 \\ 0 \end{bmatrix} = -2.3588 \text{ GPa}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 10^6*[83 -33 0; -33 81 -48; 0 -48 78]

A =

    83000000    -33000000         0
   -33000000     81000000   -48000000
         0   -48000000    78000000

>> f = 10^3*[2000; 1000; 1500]

f =

    2000000
    1000000
    1500000

>> u = inv(A)*f

u =

    0.0523
    0.0709
    0.0629

>> % LA MATRIZ ENSAMBLADA K ES:

>> K= [50*10^6 -50*10^6 0 0 0; -50*10^6 83*10^6 -33*10^6 0 0; 0 -33*10^6 81*10^6
-48*10^6 0; 0 0 -48*10^6 78*10^6 -30*10^6; 0 0 0 -30*10^6 30*10^6

K =

    50000000   -50000000         0         0         0
   -50000000    83000000   -33000000         0         0
         0   -33000000    81000000   -48000000         0
         0         0   -48000000    78000000   -30000000
         0         0         0   -30000000    30000000

>> % EL VECTOR DESPLAZAMIENTO ES:
>> U = [0; 0.0523; 0.0709; 0.0629; 0]

U =

         0
    0.0523
    0.0709
    0.0629
         0

>> % CALCULO DE LAS FUERZAS EN LAS PAREDES:
>> F = K*U

F =

   -2615000
    2001200
    997800
    1503000
   -1887000
```

```

>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> E1 = 250*10^9;
>> E2 = 250*10^9;
>> E3 = 300*10^9;
>> E4 = 300*10^9;
>> L1 = 2;
>> L2 = 3;
>> L3 = 5;
>> L4 = 8;
>> U1 = 0;
>> U2 = 0;0523;
>> U3 = 0.0709;
>> U4 = 0.0629;
>> U5 = 0;
>> % ESFUERZO ENTRE 1 Y 2:
>> G12 = (E1/L1)*[-1 1]*[U1; U2]

```

G12 =

6.5375e+009

```

>> % ESFUERZO ENTRE 2 Y 3:
>> G23 = (E2/L2)*[-1 1]*[U2; U3]

```

G23 =

1.5500e+009

```

>> % ESFUERZO ENTRE 3 Y 4:
>> G34 = (E3/L3)*[-1 1]*[U3; U4]

```

G34 =

-4.8000e+008

```

>> % ESFUERZO ENTRE 4 y 5:
>> G45 = (E4/L4)*[-1 1]*[U4; U5]

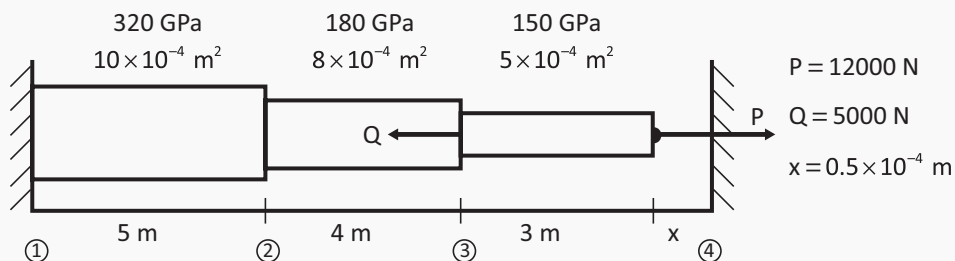
```

G45 =

-2.3588e+009

EJERCICIO 3

En el sistema estructural, mostrado determinar si la barra más pequeña choca con la pared y además calcular los esfuerzos en cada una de las barras.



A. Resolución**Paso 1:** Calcule las rigideces de cada barra.

$$k_1 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (10 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{5 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{180 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{4 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{150 \times 10^9 \text{ Pa} (5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{3 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz ensamblada sería la siguiente:

$$\Sigma k = 10^6 \times \begin{bmatrix} 64 & -64 & 0 & 0 \\ -64 & 100 & -36 & 0 \\ 0 & -36 & 61 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ -5000 \\ 12000 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Como solo hay una pared en el nodo 1, de ahí que solo se elimine la fila y columna perteneciente a ese nodo, es decir el 1, quedando lo siguiente:

$$k = 10^6 \times \begin{bmatrix} 100 & -36 & 0 \\ -36 & 61 & -25 \\ 0 & -25 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 12000 \end{bmatrix}$$

$$u = \text{inv}(k) \times F$$

Paso 3: Resolviendo se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$u_2 = 0.1094 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_3 = 0.3038 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_4 = 0.7838 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Paso 4: Para determinar si choca o no, se tienen que sumar todos los desplazamientos y verificar si es mayor o menor que "x" ($x = 0.5 \times 10^{-4} \text{ m}$)

$$\Sigma u = 1.197 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Se observa que el resultado final es mayor que "x", razón por la cual las barras sí chocan.

Paso 5: Calcule los esfuerzos:

$$\sigma_{1-2} = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa}}{5\text{m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1094 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 7001600 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{2-3} = \frac{180 \times 10^9 \text{ Pa}}{4\text{m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.1094 \times 10^{-3} \\ 0.3038 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 874800 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{3-4} = \frac{150 \times 10^9 \text{ Pa}}{3\text{m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3038 \times 10^{-3} \\ 0.7838 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 2.4 \times 10^7 \text{ Pa}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 10^6*[100 -36 0; -36 61 -25; 0 -25 25]

A =

    100000000    -36000000         0
   -36000000     61000000   -25000000
         0    -25000000    25000000

>> f = [0; -5000; 12000]

f =

         0
       -5000
       12000

>> u = inv(A)*f

u =

    1.0e-003 *

         0.1094
         0.3038
         0.7838

>> u1 = 0.1094;
>> u2 = 0.3038;
>> u3 = 0.7838;
>> U = u1+u2+u3

U =

    1.1970

>> % SE OBSERVA QUE EL DESPLAZAMIENTO TOTAL U ES MAYOR QUE X, POR LO TANTO LAS
BARRAS CHOCAN.

>> % CALCULO DE ESFUERZOS:
>> E1 = 320*10^9;
>> E2 = 180*10^9;
```

```
>> E2 = 150*10^9;
>> L1 = 5;
>> L2 = 4;
>> L3 = 3;
>> U1 = 0;
>> U2 = 0.1094*10^-3;
>> U3 = 0.3038*10^-3;
>> U4 = 0.7838*10^-3;
>> % ESFUERZO ENTRE 1 Y 2:
>> G12 = (E1/L1)*[-1 1]*[U1; U2]
```

G12 =

7001600

```
>> % ESFUERZO ENTRE 2 Y 3:
>> G23 = (E2/L2)*[-1 1]*[U2; U3]
```

G23 =

8748000

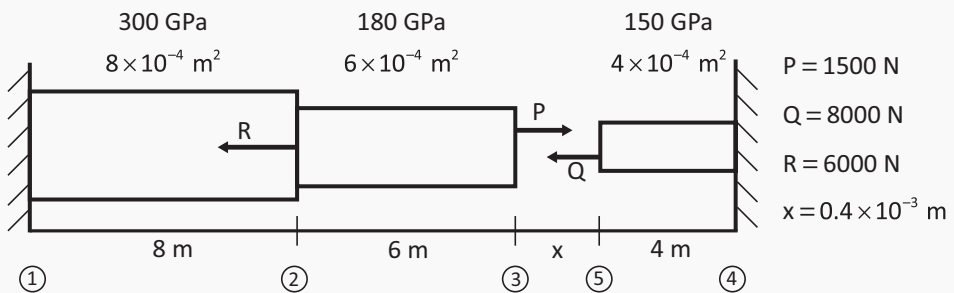
```
>> % ESFUERZO ENTRE 3 Y 4:
>> G34 = (E3/L3)*[-1 1]*[U3; U4]
```

G34 =

2.4000e+007

EJERCICIO 4

En el sistema estructural mostrado, determinar si la barra más pequeña choca con la pared y además calcular los esfuerzos en cada una de las barras.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las rigideces de las barras de la izquierda:

$$k_1 = \frac{300 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{8 \text{ m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{180 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{6 \text{ m}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma k = 10^6 \times \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 4.8 & -1.8 \\ 0 & -1.8 & 1.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -6000 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Como se tiene la pared en el nodo 1, se elimina fila y columna:

$$k \times u = F$$

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 4.8 & -1.8 \\ -1.8 & 1.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

$$u = \text{inv}(k) \times F$$

Paso 3: Una vez resuelto se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$u_2 = 0.0003 \text{ m}$$

$$u_3 = 0.0011 \text{ m}$$

Paso 4: Calcule la rigidez de la barra 3 de la derecha. Como se tiene la pared en el nodo 4, se elimina fila y columna:

$$k_3 = \frac{150 \times 10^9 \text{ Pa} (4 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{4 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k \times u = F$$

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_4 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene lo siguiente:

$$u_5 = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Paso 5: De ahí que los desplazamientos, estarían dados por:

$$u_1 = 0 \text{ m}$$

$$u_2 = 0.0003 \text{ m}$$

$$u_5 = 5.33 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Paso 6: Para determinar si choca o no, se tienen que sumar todos los desplazamientos y verificar si es mayor o menor que "x" ($x = 0.4 \times 10^{-3} \text{ m}$).

$$\Sigma u = 1.933 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Paso 7: Se observa que el resultado final es mayor que "x", razón por la cual las barras sí chocan.

$$\sigma_{1-2} = \frac{300 \times 10^9 \text{ Pa}}{8 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0003 \end{bmatrix} = 1.125 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{2-3} = \frac{180 \times 10^9 \text{ Pa}}{6 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0011 \end{bmatrix} = 2.4 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{4-5} = \frac{150 \times 10^9 \text{ Pa}}{4 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 5.33 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = 1.9988 \times 10^7 \text{ Pa}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = 10^6*[4.8 -1.8; -1.8 1.8]

A =

    4800000    -1800000
   -1800000     1800000

>> f = [-6000; 15000]

f =

   -6000
   15000

>> u = inv(A)*f

u =

    0.0030
    0.0113

>> solve('15*10^6*u5=8000','u5')

ans =

1/1875

>> e = 1/1875

e =

5.3333e-004

>> % EL DESPLAZAMIENTO TOTAL U ES IGUAL A LA SUMA DE LOS DESPLAZAMIENTOS PARCIALES
>> U1 = 0.0030;
>> U2 = 0.0113;
>> U3 = 5.3333*10^-4;
>> u = U1+U2+U3

u =

0.0148

>> % SE OBSERVA QUE EL DESPLAZAMIENTO TOTAL U ES MAYOR QUE X, POR LO TANTO LAS
BARRAS CHOCAN.
```

```
>> % CALCULO DE ESFUERZOS:
>> E1 = 300*10^9;
>> E2 = 180*10^9;
>> E3 = 150*10^9;
>> L1 = 8;
>> L2 = 6;
>> L3 = 4;
>> U1 = 0;
>> U2 = 0.0003;
>> U3 = 0.0011;
>> U4 = 0;
>> U5 = 5.33*10^-4;
>> % ESFUERZO ENTRE 1 Y 2:
>> G12 = (E1/L1)*[-1 1]*[U1; U2]

G12 =

    1.1250e+007

>> % ESFUERZO ENTRE 2 Y 3:
>> G23 = (E2/L2)*[-1 1]*[U2; U3]

G23 =

    2.4000e+007

>> % ESFUERZO ENTRE 4 Y 5:
>> G45 = (E3/L3)*[-1 1]*[U4; U5]

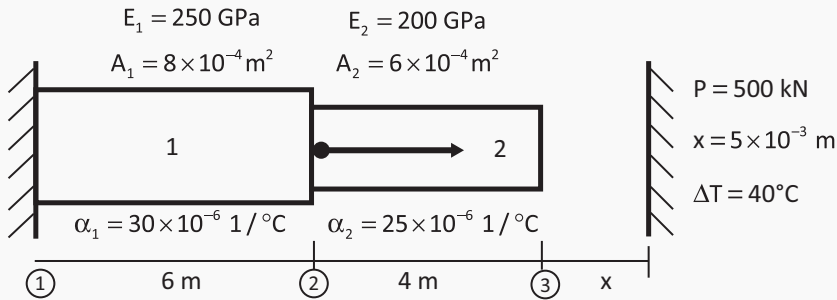
G45 =

    1.9988e+007
```

4.2. BARRA 1D CON EFECTOS TÉRMICOS

EJERCICIO 1

Calcular los desplazamientos nodales, los esfuerzos en cada una de las barras y analizar si choca o no con la pared.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las rigideces de cada barra.

$$k_1 = \frac{250 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{6 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{200 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{4 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Calcule las cargas térmicas.

$$\theta = E \times A \times \alpha \times \Delta T \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{1-2} = (250 \times 10^9 \text{ Pa}) (8 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \left(\frac{30 \times 10^{-6}}{^\circ\text{C}} \right) (40^\circ\text{C}) \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -240000 + 240000 \quad 0$$

$$\theta_{2-2} = (200 \times 10^9 \text{ Pa}) (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \left(\frac{25 \times 10^{-6}}{^\circ\text{C}} \right) (40^\circ\text{C}) \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-120000 + 120000}{-240000 + 120000 + 120000}$$

Paso 3: Calcule los desplazamientos.

$$k \times u = F + \theta$$

$$u = \text{inv}(k) \times (F + \theta)$$

$$\begin{bmatrix} 33333333.33 & -33333333.33 & 0 \\ -33333333.33 & 63333333.33 & -30000000 \\ 0 & -30000000 & 30000000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - 240000 \\ 500 \times 10^3 + 120000 \\ 0 + 120000 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$u_2 = 0.0222 \text{ m}$$

$$u_3 = 0.0262 \text{ m}$$

Paso 4: Para determinar si choca o no, se tiene que sumar todos los desplazamientos y verificar si es mayor o menor que "x" ($x = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$).

$$\Sigma u = 44.8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Se observa que el resultado final es mayor que "x", razón por la cual las barras sí chocarían.

Paso 5: Calcule los esfuerzos.

$$\sigma_{i-j} = \left[\frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \right] - E \times \alpha \times \Delta T$$

$$\sigma_{1-2} = \left[\frac{250 \times 10^9 \text{ Pa}}{6 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0222 \end{bmatrix} \right] - \left[(250 \times 10^9) \times \left(\frac{30 \times 10^{-6}}{^\circ\text{C}} \right) (40^\circ\text{C}) \right] = 62.5 \times 10^7$$

$$\sigma_{2-3} = \left[\frac{200 \times 10^9 \text{ Pa}}{4 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.0222 \\ 0.0262 \end{bmatrix} \right] - \left[(200 \times 10^9) \times \left(\frac{25 \times 10^{-6}}{^\circ\text{C}} \right) (40^\circ\text{C}) \right] = -1.1921 \times 10^{-7} \cong 0$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [63333333.33 -30000000; -30000000 30000000]
```

```
A =
```

```
1.0e+007 *
```

```
6.3333 -3.0000
-3.0000 3.0000
```

```
>> f = [500*10^3+120000; 120000]
```

```
f =
```

```
620000
120000
```

```
>> u = inv(A)*f
```

```
u =
```

```
0.0222
0.0262
```



```
>> % SE CALCULARA EL DESPLAZAMIENTO TOTAL U QUE VIENE A SER LA SUMA DE LOS  
DESPLAZAMIENTOS NADALES:
```

```
>> u1 = 0.0222;
```

```
>> u2 = 0.0262;
```

```
>> U = u1+u2
```

```
U =
```

```
0.0484
```

```
>> % EL VALOR OBTENIDO ES MAYOR QUE X, POR LO TANTO LA BARRA CHOCA EN LA PARED
```

```
>> % CALCULO DE ESFUERZOS:
```

```
>> E1 = 250*10^9;
```

```
>> E2 = 200*10^9;
```

```
>> L1 = 6;
```

```
>> L2 = 4;
```

```
>> U1 = 0;
```

```
>> U2 = 0.0222;
```

```
>> U3 = 0.0262;
```

```
>> a1 = 30*10^-6;
```

```
>> a2 = 25*10^-6;
```

```
>> dT = 40;
```

```
>> % ESFUERZO ENTRE 1 Y 2:
```

```
>> G12 = ((E1/L1)*[-1 1]*[U1; U2])-(E1*a1*dT)
```

```
G12 =
```

```
625000000
```

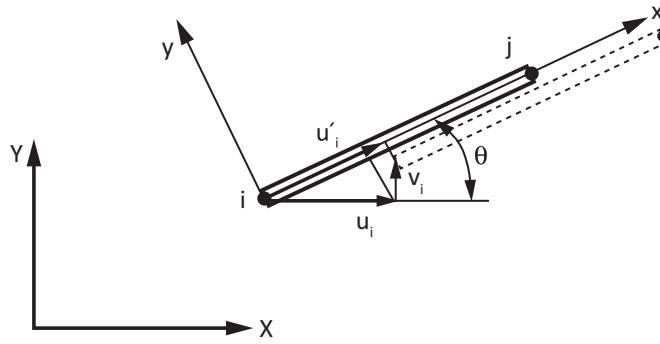
```
>> % ESFUERZO ENTRE 2 Y 3:
```

```
>> G23 = ((E2/L2)*[-1 1]*[U2; U3])-(E2*a2*dT)
```

```
G23 =
```

```
0
```

-
-
-
-
-



Local	Global
x, y	X, Y
u'_i, v'_i	u_i, v_i
En el nodo de 1, GDL	En el nodo de 2, GDL

Nota. El desplazamiento lateral v_i no contribuye al estiramiento de la barra, dentro de la teoría lineal.

5.1. TRANSFORMACIÓN

$$u'_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta = \begin{bmatrix} c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v'_i = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta = \begin{bmatrix} -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

Se tiene la siguiente forma de la matriz:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$u'_i = \tilde{T} u_i$$

Donde la matriz de transformación sería como sigue:

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Se observa que la matriz es ortogonal, es decir:

$$\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^T$$

Para los dos nodos del elemento de la barra, se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

$$u' = Tu \text{ con } T = \begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

Las fuerzas nodales se transforman de la misma manera:

$$f' = Tf$$

5.2. MATRIZ DE RIGIDEZ EN 2D

En el sistema de coordenadas local, se tiene lo siguiente:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{Bmatrix}$$

Aumentando esta ecuación, simplemente escriba lo siguiente:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k'u' = f'$$

Usando las transformaciones obtenidas, se tiene que:

$$k'Tu = Tf$$

Multipliéndose ambos lados por T^T y notando que $T^TT = I$ estaría dado por:

$$T^Tk'Tu = f$$

Así, la matriz de rigidez de elemento k en el sistema de la coordenada global sería $k = T^Tk'T$ que es una matriz simétrica de 4×4 . En forma explícita:

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & s^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

El cálculo de los cosenos direccionales l y m:

$$c = \cos\theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \quad m = \sin\theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

La matriz de rigidez de estructura se ensambla usando los elementos de la matriz de rigidez de la manera usual, como en el caso 1D.

5.3. ESFUERZO DEL ELEMENTO

$$\sigma = E\varepsilon = EB \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

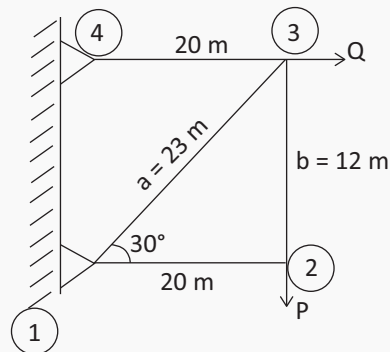
Es decir:

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO 1

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.

$E = 250 \text{ GPa}$
 $A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $P = 10000 \text{ kN}$
 $Q = 8000 \text{ kN}$



A. Resolución

Paso 1: Calcule las longitudes de a y b.

- Para el caso de a:

$$\cos 30^\circ = \frac{ca}{hip} \rightarrow 0.87 = \frac{20}{hip} \rightarrow hip = 22.98 \approx 23 \text{ m}$$

- Para el caso de b:

$$\tan 30^\circ = \frac{co}{ca} \rightarrow 0.58 = \frac{co}{20} \rightarrow co = 11.6 \approx 12 \text{ m}$$

Paso 2: Calcule los ángulos.

k	Barra	θ	C	S	C ²	S ²	CS	Longitud (m)
k ₁	1-2	0	1	0	1	0	0	20
k ₂	2-3	90	0	1	0	1	0	12
k ₃	1-3	30	0.86	0.5	0.74	0.25	0.43	23
k ₄	3-4	180	-1	0	1	0	0	30

Paso 3: Realice el cálculo para cada barra:

$$J_i = \frac{EA}{L}$$

$$J_1 = \frac{(5 \times 10^{-4})(250 \times 10^9)}{20} = 6250 \text{ kPa}$$

$$J_2 = \frac{(5 \times 10^{-4})(250 \times 10^9)}{12} = 10417 \text{ kPa}$$

$$J_3 = \frac{(5 \times 10^{-4})(250 \times 10^9)}{23} = 5435 \text{ kPa}$$

$$J_4 = \frac{(5 \times 10^{-4})(250 \times 10^9)}{20} = 6250 \text{ kPa}$$

Paso 4: Desarrolle las matrices.

$$k_{ij} = \frac{A \times E}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & s^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Barra 1-2:

$$k_1 = 6250 \text{ kPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

$$k_2 = 10417 \text{ kPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 1-3

$$k_3 = 5434 \text{ kPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0.74 & 0.43 & 0 & 0 & -0.74 & -0.43 & 0 & 0 \\ 0.43 & 0.25 & 0 & 0 & -0.43 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.74 & -0.43 & 0 & 0 & 0.74 & 0.43 & 0 & 0 \\ -0.43 & -0.25 & 0 & 0 & 0.43 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3-4

$$k_4 = 6250 \text{ kPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz ensamblada sería como sigue:

```
>> K = [ 10271160 2336620 -6250000 0 -4021160 -2336620 0 0; 2336620 1358500 0 0
-2336620 -1358500 0 0; -6250000 0 6250000 0 0 0 0 0; 0 0 0 10417000 0 -10417000 0
0; -4021160 -2336620 0 10271160 2336620 11775500 0 0; 0 0 0 0 -6250000 0 6250000
0; 0 0 0 0 0 0 0]
```


K =

Columns 1 through 6

10271160	2336620	-6250000	0	-4021160	-2336620
2336620	1358500	0	0	-2336620	-1358500
-6250000	0	6250000	0	0	0
0	0	0	10417000	0	-10417000
-4021160	-2336620	0	10271160	2336620	11775500
0	0	0	0	-6250000	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
6250000	0
0	0

Paso 5: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 4 (por ser articulaciones).

$$\begin{bmatrix}
 10271160 & -2336620 & -6250000 & 0 & -4021160 & -2336620 & 0 & 0 \\
 -2336620 & 1358500 & 0 & 0 & -2336620 & -1358500 & 0 & 0 \\
 -6250000 & 0 & 6250000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 10417000 & 0 & -10417000 & 0 & 0 \\
 -4021160 & -2336620 & 0 & 0 & 10271160 & 2336620 & -6250000 & 0 \\
 -2336620 & -1358500 & 0 & -10417000 & 2336620 & 11775500 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -6250000 & 0 & 6250000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_{x1} \\
 f_{y1} \\
 0 \\
 -10000 \text{ kN} \\
 8000 \text{ kN} \\
 0 \\
 f_{x4} \\
 f_{y4}
 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 0 \text{ m}$$

$$v_2 = -15.2537 \text{ m}$$

$$u_3 = 4.0306 \text{ m}$$

$$v_3 = -14.2937 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```

>> A = [6250000 0 0 0; 0 10417000 0 -10417000; 0 0 10271160 2336620; 0 -10417000
2336620 11775500]
A =
    6250000         0         0         0
         0    10417000         0   -10417000
         0         0    10271160    2336620
         0   -10417000    2336620    11775500
>> F = [0; -10000*10^3; 8000*10^3; 0]
F =
         0
   -10000000
    80000000
         0

```

```
>> u = inv(A)*F
u =
      0
 -15.2537
   4.0306
 -14.2937
```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

$$F_{x1} = -(4021160)(4.0306) - (2336620)(-14.2537) = -17098 \text{ kN}$$

$$F_{y1} = -(2336620)(4.0306) - (1358500)(-14.2537) = 9946 \text{ kN}$$

$$F_{x4} = -(6250000)(4.0306) = -25191 \text{ kN}$$

```
>> K = [10271160 2336620 -6250000 0 -4021160 -2336620 0 0; 2336620 1358500 0 0
-2336620 -1358500 0 0;...
-6250000 0 6250000 0 0 0 0 0; 0 0 0 10417000 0 -10417000 0 0; -4021160 -23366200
0 10271160 2336620 11775500 0 0;...
0 0 0 -6250000 0 6250000 0; 0 0 0 0 0 0 0 0]
K =
Columns 1 through 6
 10271160    2336620   -6250000         0   -4021160   -2336620
 2336620    1358500         0         0   -2336620   -1358500
 -6250000         0    6250000         0         0         0
         0         0         0    10417000         0   -10417000
 -4021160   -23366200         0    10271160    2336620    11775500
         0         0         0         0   -6250000         0
         0         0         0         0         0         0

Columns 7 through 8
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
 6250000         0
         0         0

>> U = [0; 0; 0; -15.2537; 4.0306; -14.2937; 0; 0]
U =
      0
      0
      0
 -15.2537
   4.0306
 -14.2937
      0
      0

>> F = K*U
F =
 1.0e+08 *
   0.1719
   0.1000
      0
  -0.1000
  -3.1557
  -0.2519
      0
```

Cálculo de los esfuerzos en cada barra

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = \frac{250 \times 10^9}{20} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15.2537 \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_{23} = \frac{250 \times 10^9}{12} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -15.2537 \\ 4.0306 \\ -14.2937 \end{bmatrix} = 19.9 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{13} = \frac{250 \times 10^9}{23} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.86 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.0306 \\ -14.2937 \end{bmatrix} = 39.7 \text{ GPa}$$

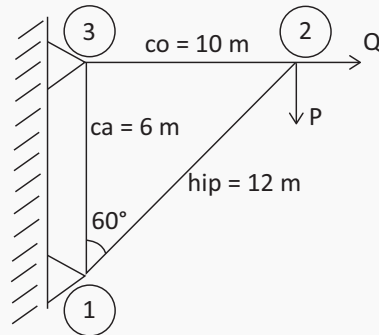
$$\sigma_{34} = \frac{250 \times 10^9}{20} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.0306 \\ -14.2937 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 50.3 \text{ GPa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E = (250*10^9/20)*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[0; 0; 0; -15.2537]
E =
    0
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E2 = (250*10^9/12)*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; -15.2537; 4.0306; -14.2937]
E2 =
    2.0000e+10
>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
>> E3 = (250*10^9/23)*[-1 1]*[0.86 0.5 0 0; 0 0 0.86 0.5]*[0; 0; 4.0306; -14.2937]
E3 =
   -4.0006e+10
>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> E4 = (250*10^9/20)*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[4.0306; -14.2937; 0; 0]
E4 =
    5.0383e+10
```

EJERCICIO 2

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos.

$$\begin{aligned} E &= 300 \text{ GPa} \\ A &= 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ P &= 5000 \text{ kN} \\ Q &= 8000 \text{ kN} \end{aligned}$$

**A. Resolución**

Paso 1: Calcule las longitudes de a y b.

- Para el caso de la hipotenusa:

$$\sin 60^\circ = \frac{co}{hip} \rightarrow 0.87 = \frac{10}{hip} \rightarrow hip = 11.49 \approx 12 \text{ m}$$

- Para el caso de ca:

$$\cos 60^\circ = \frac{ca}{hip} \rightarrow 0.50 = \frac{ca}{12} \rightarrow ca = 6 \text{ m}$$

Paso 2: Calcule los ángulos.

k	Barra	θ	C	S	C ²	S ²	CS	Longitud (m)
k ₁	1-2	30	0.86	0.5	0.75	0.25	0.43	12
k ₂	2-3	180	-1	0	1	0	0	10
k ₃	1-3	90	0	1	0	1	0	6

Paso 3: Realice los cálculos para cada barra.

$$J_i = \frac{EA}{L}$$

$$J_1 = \frac{(8 \times 10^{-4})(300 \times 10^9)}{12} = 20000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_2 = \frac{(8 \times 10^{-4})(300 \times 10^9)}{10} = 24000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$J_3 = \frac{(8 \times 10^{-4})(300 \times 10^9)}{6} = 40000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Paso 4: Desarrolle las matrices.

Barra 1-2

$$k_1 = 20000 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0.75 & 0.43 & -0.75 & -0.43 & 0 & 0 \\ 0.43 & 0.25 & -0.43 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.75 & -0.43 & 0.75 & 0.43 & 0 & 0 \\ -0.43 & -0.25 & 0.43 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

$$k_2 = 24000 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 1-3

$$k_3 = 40000 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz ensamblada sería así:

```
>> K = [15000000 860000 -15000000 -860000 0 0; 860000 45000000 -860000 -5000000 0
-40000000; -15000000 -860000 39000000 860000 -24000000 0; -860000 -5000000 860000
5000000 0 0; 0 0 -24000000 0 24000000 0; 0 -40000000 0 0 0 40000000]
```

K =

15000000	860000	-15000000	-860000	0	0
860000	45000000	-860000	-5000000	0	-40000000
-15000000	-860000	39000000	860000	-24000000	0
-860000	-5000000	860000	5000000	0	0
0	0	-24000000	0	24000000	0
0	-40000000	0	0	0	40000000

Paso 5: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 3 (por ser articulaciones).

$$\begin{bmatrix}
 -1500000 & -860000 & -15000000 & -860000 & 0 & 0 \\
 -860000 & 45000000 & -860000 & -5000000 & 0 & -40000000 \\
 -15000000 & -860000 & 39000000 & 860000 & -24000000 & 0 \\
 -860000 & -5000000 & 860000 & 5000000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -24000000 & 0 & 240000000 & 0 \\
 0 & -40000000 & 0 & 0 & 0 & 40000000
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -f_{x1} \\
 -f_{y1} \\
 8000 \text{ kN} \\
 -5000 \text{ kN} \\
 -f_{x4} \\
 -f_{y4}
 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 0.2280 \text{ m}$$

$$v_2 = -1.0392 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```

>> A = [39000000 860000; 860000 5000000]
A =
    39000000    860000
     860000    5000000
>> F = [8000*10^3; -5000*10^3]
F =
    8000000
   -5000000
>> U = inv(A)*F
U =
    0.2280
   -1.0392

```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

```

>> K = [15000000 860000 -15000000 -860000 0 0; 860000 45000000 -860000 -5000000 0
-40000000; -15000000 -860000 39000000 860000 -24000000 0; -860000 -5000000 860000
5000000 0 0; 0 0 -24000000 0 24000000 0; 0 -40000000 0 0 0 40000000]
K =
    15000000    860000   -15000000   -860000         0         0
     860000    45000000   -860000   -5000000         0   -40000000
   -15000000   -860000    39000000    860000   -24000000         0
   -860000   -5000000    860000    5000000         0         0
         0         0   -24000000         0    24000000         0
         0   -40000000         0         0         0    40000000
>> U = [0; 0; 0.2280; -1.0392; 0; 0]
U =
     0
     0
    0.2280
   -1.0392
     0
     0

```

```
>> F = K*U
F =
    1.0e+06 *
   -2.5263
    4.9999
    7.9983
   -4.9999
   -5.4720
         0
```

Cálculo de los esfuerzos en cada barra

$$\sigma_{12} = \frac{300 \times 10^9}{12} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.86 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8657 \\ -2.1794 \end{bmatrix} = -8.6299 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{23} = \frac{300 \times 10^9}{12} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8657 \\ -2.1794 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.59 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

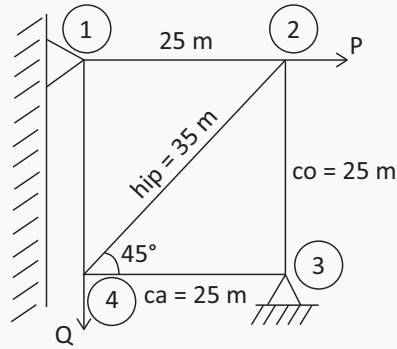
$$\sigma_{13} = \frac{300 \times 10^9}{6} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ Pa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = (300*10^9/12)*[-1 1]*[0.86 0.5 0 0; 0 0 0.86 0.5]*[0; 0; 0.8657; -2.1794]
E12 =
   -8.6299e+09
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23 = (300*10^9/10)*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[0.8657; -2.1794; 0; 0]
E23 =
   2.5971e+10
>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
>> E13 = (300*10^9/6)*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; 0; 0; 0]
E13 =
         0
```

EJERCICIO 3

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos.

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa} \\ A &= 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ P &= 3000 \text{ kN} \\ Q &= 6000 \text{ kN} \end{aligned}$$



A. Resolución

Paso 1: Calcule las longitudes de a y b.

- Para el caso de la hipotenusa:

$$\sin 45^\circ = \frac{co}{hip} \rightarrow 0.707 = \frac{25}{hip} \rightarrow hip = 35.35 \approx 35 \text{ m}$$

- Para el caso de ca:

$$\cos 45^\circ = \frac{ca}{hip} \rightarrow 0.707 = \frac{ca}{35} \rightarrow ca = 24.75 \approx 25 \text{ m}$$

Paso 2: Calcule los ángulos.

k	Barra	θ	C	S	C ²	S ²	CS	Longitud (m)
k ₁	1-2	0	1	0	1	0	0	25
k ₂	1-4	270	0	-1	0	1	0	25
k ₃	4-2	45	0.7	0.7	0.49	0.49	0.49	35
k ₄	4-3	0	1	0	1	0	0	25
k ₅	3-2	90	0	1	0	1	0	25

Paso 3: Calcule los valores para cada barra.

$$J_i = \frac{EA}{L}$$

Para las barras 1-2, 1-4, 4-3 y 3-2, se tiene las mismas longitudes, por lo tanto:

$$J_1 = \frac{(5 \times 10^{-4})(200 \times 10^9)}{25} = 4 \text{ MPa}$$

Para la barra 4-2, se tiene que:

$$J_2 = \frac{(5 \times 10^{-4})(200 \times 10^9)}{35} = 2.85 \text{ MPa}$$

Paso 4: Desarrolle las matrices.

Barra 1-2

$$k_1 = 4 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 1-4

$$k_2 = 4 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra 4-2

$$k_3 = 2.85 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.49 & 0.49 & 0 & 0 & -0.49 & -0.49 \\ 0 & 0 & 0.49 & 0.49 & 0 & 0 & -0.49 & -0.49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.49 & -0.49 & 0 & 0 & 0.49 & 0.49 \\ 0 & 0 & -0.49 & -0.49 & 0 & 0 & 0.49 & 0.49 \end{bmatrix}$$

Barra 4-3

$$k_4 = 4 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3-2

$$k_5 = 4 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz ensamblada estaría dado por lo siguiente:

```
>> K = [4000000 0 -4000000 0 0 0 0 0; 0 4000000 0 0 0 0 0 -4000000; -4000000 0
5396500 1396500 0 0 -1396500 -1396500; 0 0 1396500 5396500 0 -4000000 -1396500
-1396500; 0 0 0 4000000 0 -4000000 0; 0 0 0 -4000000 0 4000000 0 0; 0 0 -1396500
-1396500 -4000000 0 5396500 1396500; 0 -4000000 -1396500 -1396500 0 0 1396500
5396500]
```

K =

Columns 1 through 6

4000000	0	-4000000	0	0	0
0	4000000	0	0	0	0
-4000000	0	5396500	1396500	0	0
0	0	1396500	5396500	0	-4000000
0	0	0	0	4000000	0
0	0	0	-4000000	0	4000000
0	0	-1396500	-1396500	-4000000	0
0	-4000000	-1396500	-1396500	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	-4000000
-1396500	-1396500
-1396500	-1396500
-4000000	0
0	0
5396500	1396500
1396500	5396500

Paso 5: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 3 (por ser articulaciones).

$$\begin{bmatrix}
 4000000 & 0 & -4000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4000000 \\
 -4000000 & 0 & 5396500 & 1396500 & 0 & 0 & -1396500 & -1396500 \\
 0 & 0 & 1396500 & 5396500 & 0 & -4000000 & -1396500 & -1396500 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4000000 & 0 & -4000000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -4000000 & 0 & 4000000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1396500 & -1396500 & -4000000 & 0 & 5396500 & 1396500 \\
 0 & -4000000 & -1396500 & -1396500 & 0 & 0 & 1396500 & 5396500
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{x1} \\ -f_{y1} \\ 3000 \text{ kN} \\ 0 \\ -f_{x3} \\ -f_{y3} \\ 0 \\ -6000 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

Paso 6: Calcule los desplazamientos nodales:

$$u_2 = 0.8593$$

$$v_2 = 0.1093$$

$$u_4 = -0.1093$$

$$v_2 = 1.3907$$

```
>> A = [5396500 1396500 -1396500 -1396500; 1396500 5396500 -1396500 -1396500;
-1396500 -1396500 5396500 1396500; -1396500 -1396500 1396500 5396500]
```

```
A =
```

```
5396500    1396500   -1396500   -1396500
1396500    5396500   -1396500   -1396500
-1396500   -1396500    5396500    1396500
-1396500   -1396500    1396500    5396500
```

```
>> f = [3000*10^3; 0; 0; 6000*10^3]
```

```
f =
```

```
3000000
0
0
6000000
```

```
>> U = inv(A)*F
```

```
U =
```

```
0.8593
0.1093
-0.1093
1.3907
```

Paso 7: Calcule las fuerzas en cada articulación.

```
>> K = [4000000 0 -4000000 0 0 0 0; 0 4000000 0 0 0 0 -4000000; -4000000 0
5396500 1396500 0 0 -1396500 -1396500; 0 0 1396500 5396500 0 -4000000 -1396500
-1396500; 0 0 0 4000000 0 -4000000 0; 0 0 0 -4000000 0 4000000 0; 0 0 -1396500
-1396500 -4000000 0 5396500 1396500; 0 -4000000 -1396500 -1396500 0 0 1396500
5396500]
```

```

K =
Columns 1 through 6
    4000000    0   -4000000    0    0    0
    0    4000000    0    0    0    0
   -4000000    0    5396500    1396500    0    0
    0    0    1396500    5396500    0   -4000000
    0    0    0    0    4000000    0
    0    0    0   -4000000    0    4000000
    0    0   -1396500   -1396500   -4000000    0
    0   -4000000   -1396500   -1396500    0    0

Columns 7 through 8
    0    0
    0   -4000000
   -1396500   -1396500
   -1396500   -1396500
   -4000000    0
    0    0
    5396500    1396500
    1396500    5396500
>> U = [0; 0; 0.8593; 0.1093; 0; 0; -0.1093; 1.3907]
U =
    0
    0
    0.8593
    0.1093
    0
    0
   -0.1093
    1.3907

>> F = K*U
F =
    1.0e+06 *
   -3.4372
   -5.5628
    3.0004
    0.0004
    0.4372
   -0.4372
   -0.0004
    5.9996

```

Paso 8: Calcule los esfuerzos.

```

>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = ((200*10^9)/25)*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[0; 0; 0.8593; 0.1093]

E12 =

    6.8744e+009

>> % ESFUERZO DE 1 A 4:
>> E14 = ((200*10^9)/25)*[-1 1]*[0 -1 0 0; 0 0 0 -1]*[0; 0; -0.1093; 1.3907]

E14 =

   -1.1126e+010

```

```

>> % ESFUERZO DE 4 A 2:
>> E42 = ((200*10^9)/35)*[-1 1]*[0.7 0.7 0 0; 0 0 0.7 0.7]*[-0.1093; 1.3907;
0.8593; 0.1093]

E42 =

-1.2512e+009

>> % ESFUERZO DE 4 A 3:
>> E14 = ((200*10^9)/25)*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[-0.1093; 1.3907; 0: 0]

E14 =

874400000

>> % ESFUERZO DE 3 A 2:
>> E32 = ((200*10^9)/25)*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; 0; 0.8593; 0.1093]

E32 =

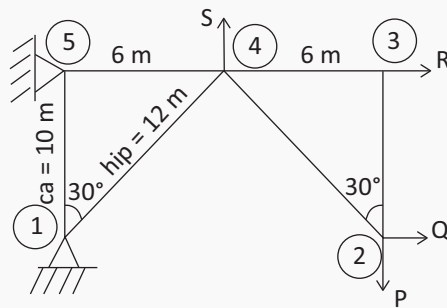
874400000

```

EJERCICIO 4

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.

$E = 200 \text{ GPa}$
 $A = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $P = 12000 \text{ kN}$
 $Q = 10000 \text{ kN}$
 $R = 8000 \text{ kN}$
 $S = 5000 \text{ kN}$



A. Resolución

Paso 1: Calcule las longitudes de a y b.

- Para el caso de ca:

$$\cos 30^\circ = \frac{ca}{hip} \rightarrow 0.87 = \frac{ca}{12} \rightarrow ca = 10.4 \approx 10 \text{ m}$$

- Para el caso de la hipotenusa:

$$\sin 30^\circ = \frac{co}{hip} \rightarrow 0.5 = \frac{6}{hip} \rightarrow hip = 12 \text{ m}$$

Paso 5: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 3 (por ser articulaciones).

$$\begin{bmatrix}
 -1250000 & -2175000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1250000 & -2175000 & 0 & 0 \\
 -2175000 & -9785000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2175000 & -3785000 & 0 & -5000000 \\
 0 & 0 & 1280000 & -2150000 & 0 & 0 & -1250000 & 2180000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2150000 & 9750000 & 0 & -6000000 & 2150000 & -3750000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 10000000 & 0 & -10000000 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -6000000 & 0 & 6000000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1250000 & -2175000 & -1250000 & 2150000 & -10000000 & 0 & 22500000 & 25000 & -10000000 & 0 \\
 -2175000 & -3785000 & 2150000 & -3750000 & 0 & 0 & 25000 & 7535000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10000000 & 0 & 10000000 & 0 \\
 0 & -6000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6000000
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 u_5 \\
 v_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -f_{x1} \\
 -f_{y1} \\
 10000 \text{ kN} \\
 -12000 \text{ kN} \\
 8000 \text{ kN} \\
 0 \\
 0 \\
 5000 \text{ kN} \\
 -f_{x5} \\
 -f_{y5}
 \end{bmatrix}$$

Paso 6: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 182.2022 \text{ m}$$

$$v_2 = 96.8851 \text{ m}$$

$$u_3 = 3.0022 \text{ m}$$

$$v_3 = 96.8851 \text{ m}$$

$$u_4 = 2.2022 \text{ m}$$

$$v_4 = -3.1149 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [1250000 -2150000 0 0 -1250000 2150000; -2150000 9750000 0 -6000000 2150000
-3750000; 0 0 10000000 0 -10000000 0; 0 -6000000 0 6000000 0 0; -1250000 2150000
-10000000 0 22500000 25000; 2150000 -3750000 0 0 25000 7535000]
```

```
A =
1250000    -2150000         0         0   -1250000    2150000
-2150000    9750000         0   -6000000    2150000   -3750000
         0         0  10000000         0   -10000000         0
         0   -6000000         0   6000000         0         0
-1250000    2150000  -10000000         0   22500000    25000
2150000   -3750000         0         0    25000    7535000
```

```
>> F = [10000*10^3; -12000*10^3; 8000*10^3; 0; 0; 5000*10^3]
```

```
F =
10000000
-12000000
8000000
         0
         0
5000000
```

```
>> U = inv(A)*F
```

```
U =
182.2022
96.8851
3.0022
96.8851
2.2022
-3.1149
```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

$$F_{x1} = -1250000(2.2022) - (2175000)(-3.1149) = 4022157.5 \text{ N}$$

$$F_{v1} = -2175000(2.2022) - (3785000)(-3.1149) = 7000111.5 \text{ N}$$

$$F_{v5} = -10000000(2.2022) = -22022000 \text{ N}$$

$$F_{v5} = 0 \text{ N}$$

```
>> K= [1250000 2175000 0 0 0 0 -1250000 -2175000 0 0; 2175000 9785000 0 0 0 0  
-2175000 -3785000 0 -6000000; 0 0 1250000 -2150000 0 0 -1250000 2150000 0 0; 0 0  
-2150000 9750000 0 -6000000 2150000 -3750000 0 0; 0 0 0 10000000 0 -10000000 0  
0 0; 0 0 0 -6000000 0 6000000 0 0 0; -1250000 -2175000 -1250000 2150000 -1000000  
0 22500000 25000 -1000000 0; -2175000 -3785000 2150000 -3750000 0 0 250000 7535000  
0 0; 0 0 0 0 -10000000 0 10000000 0; 0 -6000000 0 0 0 0 0 6000000]
```

$$K =$$
[illegible]

```
>> U = [0; 0; 182.2022; 96.8851; 3.0022; 96.8851; 2.2022; -3.1149; 0; 0]
```

$$U =$$

0
0
182.2022
96.8851
3.0022
96.8851
2.2022
-3.1149
0
0

$$\gg F = K * U$$
$$F =$$

1.0e+007 *

0.4022
0.7000
1.0000
-1.2000
0.8000
0
-0.0000
0.5000
-2.2022
0

Cálculo de los esfuerzos

$$\sigma_{14} = \frac{200 \times 10^9}{12} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0.5 & 0.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.2022 \\ -3.1149 \end{bmatrix} = -2.7 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{15} = \frac{200 \times 10^9}{10} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{54} = \frac{200 \times 10^9}{6} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.2022 \\ -3.1149 \end{bmatrix} = 7.27 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{43} = \frac{200 \times 10^9}{6} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2022 \\ -3.1149 \\ 3.0022 \\ 96.851 \end{bmatrix} = 2.64 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{24} = \frac{200 \times 10^9}{12} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} -0.5 & 0.86 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 182.2022 \\ 96.8851 \\ 2.2022 \\ -3.1149 \end{bmatrix} = 6.8 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{23} = \frac{200 \times 10^9}{10} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 182.2022 \\ 96.8851 \\ 3.0022 \\ 96.851 \end{bmatrix} = -682 \text{ MPa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 4:
>> E14 = ((200*10^9)/12)*[-1 1]*[0.5 0.87 0 0; 0 0 0.5 0.87]*[0; 0; 2.2022;
-3.1149]

E14 =

-2.6814e+010

>> % ESFUERZO DE 1 A 5:
>> E15 = ((200*10^9)/10)*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; 0; 0; 0]

E15 =

0
```

```
>> % ESFUERZO DE 5 A 4:
>> E54 = ((200*10^9)/6)*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[0; 0; 2.2022; -3.1149]

E54 =

    7.3407e+010

>> % ESFUERZO DE 4 A 3:
>> E43 = ((200*10^9)/6)*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[2.2022; -3.1149; 3.0022; 96.851]

E43 =

    2.6667e+010

>> % ESFUERZO DE 2 A 4:
>> E14 = ((200*10^9)/12)*[-1 1]*[-0.5 0.86 0 0; 0 0 -0.5 0.86]*[182.2022; 96.8851; 3.0022; 96.851]

E24 =

   -6.6667e+010

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23 = ((200*10^9)/10)*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[182.2022; 96.8851; 3.0022; 96.851]

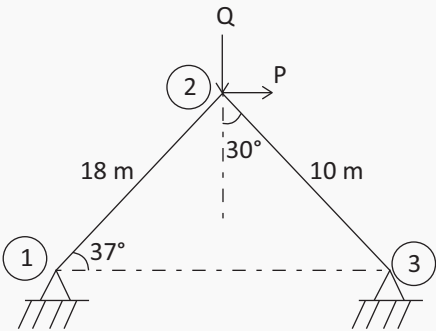
E23 =

  -682000000
```

EJERCICIO 5

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.

E = 320 GPa
A = 5 × 10⁻⁴ m²
P = 7000 kN
Q = 9000 kN



A. Resolución

Paso 1: Calcule los ángulos.

k	Barra	θ	C	S	C ²	S ²	CS	Longitud (m)
k ₁	1-2	37	0.8	0.60	0.64	0.36	0.48	18
k ₂	2-3	300	0.5	-0.87	0.25	0.76	-0.44	10

Paso 2: Calcule los valores para cada barra.

$$J_i = \frac{EA}{L}$$

$$J_1 = \frac{(5 \times 10^{-4})(320 \times 10^9)}{18} = 8.8 \text{ MPa}$$

$$J_2 = \frac{(5 \times 10^{-4})(320 \times 10^9)}{10} = 16 \text{ MPa}$$

Paso 3: Desarrolle las matrices.

Barra 1-2

$$k_1 = 8.8 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 & 0 & 0 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 & 0 & 0 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 2-3

$$k_2 = 16 \text{ MPa} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & -0.44 & -0.25 & 0.44 \\ 0 & 0 & -0.44 & 0.76 & 0.44 & -0.76 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.44 & 0.25 & -0.44 \\ 0 & 0 & 0.44 & -0.76 & -0.44 & 0.76 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz ensamblada estaría dada por:

```
>> K = [5632000 4224000 -5632000 -4224000 0 0; 4224000 3168000 -4224000 -3168000 0 0;
-5632000 -4224000 9362000 -2816000 -4000000 7040000; -4224000 -3168000 -2816000
15328000 7040000 -12160000; 0 0 -4000000 7040000 4000000 -7040000; 0 0 7040000
-12160000 -7040000 12160000]
```

K =

5632000	4224000	-5632000	-4224000	0	0
4224000	3168000	-4224000	-3168000	0	0
-5632000	-4224000	9362000	-2816000	-4000000	7040000
-4224000	-3168000	-2816000	15328000	7040000	-12160000
0	0	-4000000	7040000	4000000	-7040000
0	0	7040000	-12160000	-7040000	12160000

Paso 4: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 3 (por ser articulaciones).

$$\begin{bmatrix} -5632000 & -4224000 & -5632000 & -4224000 & 0 & 0 \\ -422400 & -3168000 & -4224000 & -3168000 & 0 & 0 \\ -5632000 & -4224000 & 9632000 & -2816000 & -4000000 & 7040000 \\ -4224000 & -3168000 & -2816000 & 15328000 & 7040000 & -12160000 \\ 0 & 0 & -4000000 & 7040000 & 4000000 & -7040000 \\ 0 & 0 & 7040000 & -12160000 & -7040000 & 12160000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 7000 \text{ kN} \\ -9000 \text{ kN} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix}$$

Paso 5: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 0.5866 \text{ m}$$

$$v_2 = -0.4794 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [9632000 -2816000; -2816000 15328000]
```

```
A =
```

```
    9632000    -2816000
   -2816000    15328000
```

```
>> F = [7000-10^3; -9000*10^3]
```

```
F =
```

```
    7000000
   -9000000
```

```
>> U = inv(A)*F
```

```
U =
```

```
    0.5866
   -0.4794
```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

$$F_{x1} = -5632000(0.5866) - (4224000)(-0.4794) = -1278746 \text{ N}$$

$$F_{y1} = -4224000(0.5866) - (3168000)(-0.4794) = 12709594 \text{ N}$$

$$F_{x3} = -4000000(0.5866) + (7040000)(-0.4794) = -5721376 \text{ N}$$

$$F_{y3} = -7040000(0.5866) + (12160000)(-0.4794) = 9959168 \text{ N}$$

```
>> K = [5632000 4224000 -5632000 -4224000 0 0; 4224000 3168000 -4224000 -3168000 0 0;
-5632000 -4224000 9632000 -2816000 -4000000 7040000; -4224000 -3168000 -2816000
15328000 7040000 -12160000; 0 0 -4000000 7040000 4000000 -7040000; 0 0 7040000
-12160000 -7040000 12160000]
```

```
K =
      5632000      4224000     -5632000     -4224000           0           0
      4224000      3168000     -4224000     -3168000           0           0
     -5632000     -4224000      9632000     -2816000    -4000000      7040000
     -4224000     -3168000     -2816000      15328000      7040000    -12160000
           0           0     -4000000      7040000      4000000     -7040000
           0           0      7040000     -12160000     -7040000      12160000
```

```
>> U = [ 0; 0; 0.5866; -0.4794; 0; 0]
```

```
U =
      0
      0
     0.5866
    -0.4794
      0
      0
```

```
>> F = K*U
```

```
F =
      1.0e+007 *
     -0.1279
      1.2710
      0.7000
     -0.9000
     -0.5721
      0.9959
```

Cálculo de los esfuerzos

$$\sigma_{12} = \frac{320 \times 10^9}{18} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5866 \\ -0.4794 \end{bmatrix} = 3.3 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\sigma_{23} = \frac{320 \times 10^9}{10} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5866 \\ -0.4794 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -2.3 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = ((320*10^9)/18)*[-1 1]*[0.8 0.6 0 0; 0 0 0.8 0.6]*[0; 0; 0.5866; -0.4794]

E12 =
      3.2292e+009

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23 = ((320*10^9)/10)*[-1 1]*[0.5 -0.87 0 0; 0 0 0.5 -0.87]*[0.5866; -0.4794; 0; 0]

E23 =
     -2.2732e+010
```


B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=4000*[1 0 -1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;-1 0 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0
0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0
0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
k1 =
Columns 1 through 6
    4000         0    -4000         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
   -4000         0    4000         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
Columns 7 through 10
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
k2 =
Columns 1 through 6
         0         0         0         0         0         0
         0    4000         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0   -4000         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
Columns 7 through 10
         0         0         0         0
         0   -4000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0    4000         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
>> k3=4000*[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 1 0
-1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 -1 0
1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
k3 =
Columns 1 through 6
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0    4000         0   -4000
```

```

0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      -4000    0      4000
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
Columns 7 through 10
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
0      0      0      0
>> k4=2828.85*[0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0.50 0.50 0 0 -0.50
-0.50 0 0;0 0 0.50 0.50 0 0 -0.50 -0.50 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0
0;0 0 -0.50 -0.50 0 0 0.50 0.50 0 0;0 0 -0.50 -0.50 0 0 0.50 0.50 0 0;0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0]
k4 =
1.0e+03 *
Columns 1 through 7
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      1.4144 1.4144 0      0      -1.4144
0      0      1.4144 1.4144 0      0      -1.4144
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
0      0      -1.4144 -1.4144 0      0      1.4144
0      0      -1.4144 -1.4144 0      0      1.4144
0      0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0      0
Columns 8 through 10
0      0      0
0      0      0
-1.4144 0      0
-1.4144 0      0
0      0      0
0      0      0
1.4144 0      0
1.4144 0      0
0      0      0
0      0      0
>> k5=4000*[0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0
0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0
0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0]
k5 =
Columns 1 through 6
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      4000    0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      -4000   0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0

```

```

Columns 7 through 10
    0      0      0      0
    0      0      0      0
    0      0      0      0
    0      0      0      0
   -4000    0      0      0
    0      0      0      0
   4000    0      0      0
    0      0      0      0
    0      0      0      0
    0      0      0      0
>> K=k1+k2+k3+k4+k5
K =
   1.0e+03 *
Columns 1 through 7
   4.0000    0   -4.0000    0      0      0      0
    0    4.0000    0      0      0      0      0
  -4.0000    0    5.4144    1.4144    0      0   -1.4144
    0      0    1.4144    5.4144    0   -4.0000   -1.4144
    0      0      0      0    4.0000    0   -4.0000
    0      0      0      0      0      0      0
    0      0   -1.4144   -1.4144   -4.0000    0    5.4144
    0   -4.0000   -1.4144   -5.4144    0    4.0000    1.4144
    0      0      0      0      0      0      0
    0      0      0      0      0      0      0
Columns 8 through 10
    0      0      0
  -4.0000    0      0
  -1.4144    0      0
  -1.4144    0      0
    0      0      0
    0      0      0
    1.4144    0      0
    5.4144    0      0
    0      0      0
    0      0      0

```

Cálculos de los esfuerzos

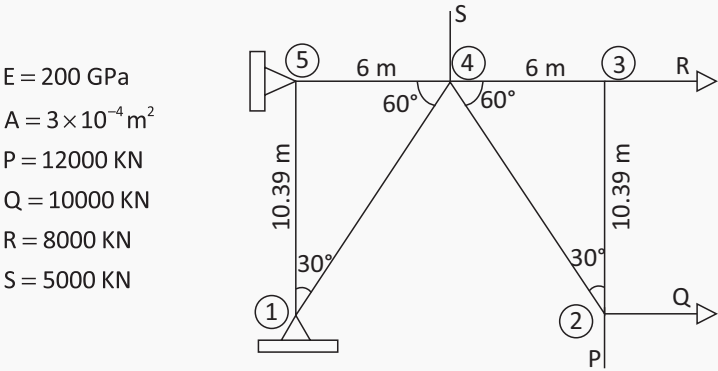
```

>> % CALCULOS DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> G12= 8000000*[-1 1]*[1 0 0 0; 0 0 1 0]*[0; 0; 0.3639; -0.3861]
G12 =
    2911200
>> % ESFUERZO DE 1 A 4:
>> G14 = 8000000* [-1 1] * [0 -1 0 0; 0 0 0 -1] * [0; 0; 0.3639; -0.3861]
G14 =
    3088800
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> G23 = 8000000*[-1 1]*[0 -1 0 0; 0 0 0 -1]*[ 0.3639; -0.3861; 0; 0]
G23 =
   -3088800
>> % ESFUERZO DE 2 A 4:
>> G24 = 5657708628* [-1 1] * [-0.71 -0.71 0 0; 0 0 -0.71 -0.71] * [0.3861;
-1.5000; 0; 0]
G24 =
  -4.4745e+09
>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> G34 = 8000000*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[0; 0; 0.3861;-1.5]
G34 =
   -3088800

```

EJERCICIO 7

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.



A. Resolución

Calcule las rigideces de cada barra.

$$K_1 = \frac{(200 \times 10^9)(3 \times 10^{-4})}{12} = 5000 \frac{\text{KN}}{\text{m}} = K_4$$
$$K_2 = \frac{(200 \times 10^9)(3 \times 10^{-4})}{10.39} = 5774.78 \frac{\text{KN}}{\text{m}} = K_3$$
$$K_5 = \frac{(200 \times 10^9)(3 \times 10^{-4})}{6} = 10000 \frac{\text{KN}}{\text{m}} = K_6$$

k	Barra	θ	C	S	C²	S²	CS
k ₁	2-3	90	0	1	0	1	0
k ₂	2-4	120	0.5	0.87	0.25	0.7569	0.1892
k ₃	1-4	60	0.5	0.87	0.25	0.7569	0.1892
k ₄	4-5	180	-1	0	1	0	0
k ₅	3-4	180	-1	0	1	0	0
k ₆	1-5	90°	0	1	0	1	0

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=5000*[0.25 0.435 0 0 0 0 -0.25 -0.435 0 0 0 0; 0.435 0.75 0 0 0 0 -0.435  
-0.75 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
0 0 0 0; 0 0 0 0 0.435 0.75 0 0 0 0;-0.25 -0.435 0 0 0 0 0.25 0.435 0 0 0 0; -0.435  
-0.75 0 0 0 0.435 0.75 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]  
k1 =  
Columns 1 through 6  
1250      2175      0      0      0      0  
2175      3750      0      0      0      0  
0      0      0      0      0      0
```



```

k3 =
1.0e+03 *
Columns 1 through 7
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0     5.7748         0    -5.7748         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0    -5.7748         0     5.7748         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
Columns 8 through 12
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
>> k4=5000*[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0.25 -0.435 0
0 -0.25 0.435 0 0 0 0; 0 0 -0.435 0.75 0 0 0.435 -0.75 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 -0.25 0.435 0 0 0.25;-0.435 0 0 0 0; 0 0
0.435 -0.75 0 0 -0.435 0.75 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
k4 =
Columns 1 through 6
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0     1250    -2175         0         0
    0         0    -2175     3750         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0    -1250     2175         0         0
    0         0     2175    -3750         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
Columns 7 through 12
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
   -1250     2175         0         0         0         0
    2175    -3750         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    1250    -2175         0         0         0         0
   -2175     3750         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0

```

```
>> K5=10000*[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K5 =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	10000	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-10000	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-10000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
10000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

```
>> K6=10000*[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 1 0 -1 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K6 =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
10000	0	-10000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-10000	0	10000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

```
>> KT=k1+k2+k3+k4+k5+k6
```

```
KT =
```

```
1.0e+04 *
```

```
Columns 1 through 7
```

```
0.1250    0.2175         0         0         0         0    -0.1250
0.2175    0.9525         0         0         0         0    -0.2175
0         0         0.1250    -0.2175         0         0    -0.1250
0         0        -0.2175    0.9525         0        -0.5775    0.2175
0         0         0         0         1.0000         0    -1.0000
0         0         0         -0.5775         0         0.5775         0
-0.1250   -0.2175   -0.1250    0.2175   -1.0000         0    2.2500
-0.2175   -0.3750    0.2175   -0.3750         0         0         0
0         0         0         0         0         0        -1.0000
0        -0.5775         0         0         0         0         0
0         0         0         0         0         0         0
0         0         0         0         0         0         0
```

```
Columns 8 through 12
```

```
-0.2175         0         0         0         0
-0.3750         0        -0.5775         0         0
0.2175         0         0         0         0
-0.3750         0         0         0         0
0         0         0         0         0
0         0         0         0         0
0        -1.0000         0         0         0
0.7500         0         0         0         0
0        1.0000         0         0         0
0         0         0.5775         0         0
0         0         0         0         0
0         0         0         0         0
```

```
-0.1250  -0.2175  -0  -0  -0  -0  -0.1250  -0.2175  -0  -0  -0  -0
-0.2175  -0.9525  -0  -0  -0  -0  -0.2175  -0.3750  -0  -0.5775  -0  -0
0  0  0.1250  -0.2175  0  0  -0.1250  0.2175  0  0  0  0
0  0  -0.2175  0.9525  0  -0.5775  0.2175  -0.3750  0  0  0  0
0  0  0  0  1.0000  0  -1.0000  0  0  0  0  0
0  0  0  -0.5775  0  0.5775  0  0  0  0  0  0
-0.1250  -0.2175  -0.1250  0.2175  -1.0000  0  2.2500  0  -1.0000  0  0  0
-0.2175  -0.3750  0.2175  -0.3750  0  0  0  0.7500  0  0  0  0
-0  -0  -0  -0  -0  -0  -1.0000  -0  -1.0000  -0  -0  -0
-0  -0.5775  -0  -0  -0  -0  -0  -0  -0  -0.5775  -0  -0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

```
>> Y= 1.0e+004 * [0.1250 -0.2175 0 0 -0.1250 0.2175 ; -0.2175 0.9525 0 -0.5775
0.2175 -0.3750; 0 0 1.0000 0 -1.0000 0 ; 0 -0.5775 0 0.5775 0 0; -0.1250 0.2175
-1.0000 0 2.2500 0; 0.2175 -0.3750 0 0 0 0.7500]
```

```
Y =
```

```
1250      -2175         0         0      -1250      2175
-2175      9525         0      -5775      2175     -3750
0         0      10000         0     -10000         0
0        -5775         0      5775         0         0
-1250      2175     -10000         0     22500         0
2175     -3750         0         0         0      7500
```



```
>> M=[10000; -12000 ; 8000; 0; 0 ; 5000]
```

```
M =
```

```
    10000
   -12000
    8000
         0
         0
    5000
```

```
>> U=inv(Y)*M
```

```
U =
```

```
   -262.1393
  -159.6694
    3.0085
  -159.6694
    2.2085
   -3.1476
```

Cálculo de los esfuerzos

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
```

```
>> % ESFUERZO DE 1 A 4:
```

```
>> G14 = 16666666.67*[-1 1]*[0.5 0.87 0 0; 0 0 0.5 0.87]*[0; 0; 2.2085; -3.1476]
```

```
G14 =
```

```
   -2.7236e+07
```

```
>> % ESFUERZO DE 1 A 5:
```

```
>> G15 = 19249278*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; 0; 0; 0]
```

```
G15 =
```

```
    0
```

```
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
```

```
>> G23 = 19249278*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[-262.1393; -159.6694; 3.0085; -159.6694]
```

```
G23 =
```

```
    0
```

```
>> % ESFUERZO DE 2 A 4:
```

```
>> G24 = 16666666.67*[-1 1]*[-0.5 0.87 0 0; 0 0 -0.5 0.87]*[-262.1393; -159.6694; 2.2085; -3.1476]
```

```
G24 =
```

```
   6.6668e+07
```

```
>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
```

```
>> G34 = 33333333.33*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[3.0085; -159.6694; 2.2085; -3.1476]
```

```
G34 =
```

```
   2.6667e+07
```

```
>> % ESFUERZO DE 4 A 5:
```

```
>> G45 = 33333333.33*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[2.2085; -3.1476; 0; 0]
```

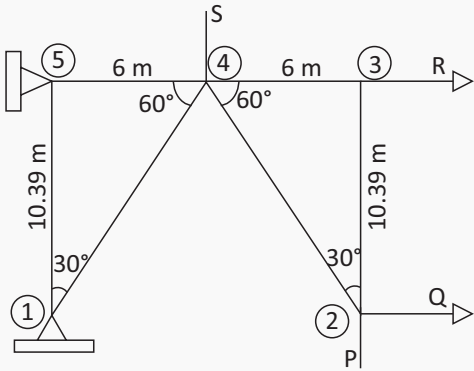
```
G45 =
```

```
   7.3617e+07
```

EJERCICIO 8

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.

E = 200 GPa
A = 3 × 10⁻⁴ m²
P = 12000 KN
Q = 10000 KN
R = 8000 KN
S = 5000 KN



A. Resolución

Paso 1: Calcule las rigideces de cada barra.

$$K_1 = \frac{(320 \times 10^9)(5 \times 10^{-4})}{18} = 8888.89 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_2 = \frac{(320 \times 10^9)(5 \times 10^{-4})}{10} = 16000 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

k	Barra	θ	C	S	C ²	S ²	CS
k ₁	1-2	37	0.80	0.6	0.64	0.36	0.48
k ₂	2-3	300	0.5	-0.87	0.25	0.75	-0.435

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1 = 8888.89*[0.64 0.48 -0.64 -0.48 0 0;0.48 0.36 -0.48 -0.36 0 0; -0.64 -0.48 0.64 0.48 0 0; -0.48 -0.36 0.48 0.36 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0]
k1 =
1.0e+03 *
  5.6889    4.2667   -5.6889   -4.2667         0         0
  4.2667    3.2000   -4.2667   -3.2000         0         0
 -5.6889   -4.2667    5.6889    4.2667         0         0
 -4.2667   -3.2000    4.2667    3.2000         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0

>> k2 = 16000*[0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0.25 -0.44 -0.25 0.44; 0 0 -0.44 0.75 0.44 -0.75; 0 0 -0.25 0.44 0.25 -0.44; 0 0 0.44 -0.75 -0.44 0.75]
k2 =
         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0
         0         0        4000       -7040       -4000        7040
         0         0       -7040       12000        7040       -12000
         0         0      -4000        7040        4000       -7040
         0         0        7040      -12000       -7040       12000
```

```

>> kT = k1 + k2
KT =
    1.0e+04 *
    0.5689    0.4267   -0.5689   -0.4267         0         0
    0.4267    0.3200   -0.4267   -0.3200         0         0
   -0.5689   -0.4267    0.9689   -0.2773   -0.4000    0.7040
   -0.4267   -0.3200   -0.2773    1.5200    0.7040   -1.2000
         0         0   -0.4000    0.7040    0.4000   -0.7040
         0         0    0.7040   -1.2000   -0.7040    1.2000

>> Y = 1.0e+004*[0.9689   -0.2773; -0.2773    1.5200]
Y =
    9689    -2773
   -2773    15200
>> F = [7000; -9000]
F =
    7000
   -9000
>> U = inv (Y) * F
U =
    0.5835
   -0.4857

```

Cálculo de los esfuerzos

```

>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> G12 = 17777777.78 * [-1 1] * [0.8 0.6 0 0; 0 0 0.8 0.6] * [0; 0; 0.5835; -0.4857]

G12 =

    3.1179e+006

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> G23 = 32000000 * [-1 1] * [0.5 -0.87 0 0; 0 0 0.5 -0.87] * [0.5835; -0.4857;
0; 0]

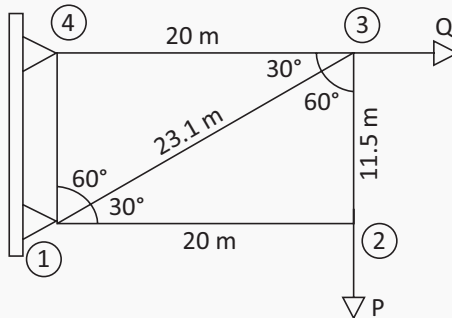
G23 =

   -22857888

```

EJERCICIO 9

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.



$E = 250 \text{ GPa}$
 $A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $P = 10000 \text{ KN}$
 $Q = 8000 \text{ KN}$

A. Resolución

Paso 1: Calcule las rigideces de cada barra.

$$K_1 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(250 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{20 \text{ m}} = 62500 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_2 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(250 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{11.5 \text{ m}} = 10822 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_3 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(250 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{23.1 \text{ m}} = 5411 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_4 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(250 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{20 \text{ m}} = 62500 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

k	Barra	θ	C	S	C^2	S^2	CS
k_1	1-2	0	1	0	1	0	0
k_2	2-3	90°	0	1	0	1	0
k_3	1-3	30°	0.87	0.5	0.76	0.25	0.44
k_4	3-4	180°	-1	0	1	0	0

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=62500*1000*[1 0 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0;1 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0]
k1 =
Columns 1 through 6
62500000      0      62500000      0      0
0      0      0      0      0
62500000      0      62500000      0      0
```

```

0      0      0      0      0
0      0      0      0      0
0      0      0      0      0
0      0      0      0      0
0      0      0      0      0
Columns 7 through 8
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0

>> k2=10822*1000*[0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 1 0
0;0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 1 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0]
k2 =
Columns 1 through 6
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
0      0      0      10822000      0      10822000
0      0      0      0      0      0
0      0      0      10822000      0      10822000
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
Columns 7 through 8
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0

>> k3=5411*1000*[0.76 0.44 0 0 -0.76 -0.44 0 0; 0.44 0.25 0 0 -0.44 -0.25 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;-0.76 -0.44 0 0 0.76 0.44 0 0;-0.44 -0.25 0 0 0.44
0.25 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0]
k3 =
Columns 1 through 6
4112360      2380840      0      0      -4112360      -2380840
2380840      1352750      0      0      -2380840      -1352750
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
-4112360      -2380840      0      0      4112360      2380840
-2380840      -1352750      0      0      2380840      1352750
0      0      0      0      0      0
0      0      0      0      0      0
Columns 7 through 8
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0
0      0

```

```

>> k4=62500*1000*[0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 1 0 -1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 -1 0 1 0;0 0 0 0 0 0 0 0]
k4 =
Columns 1 through 6
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0        62500000      0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0       -62500000      0
    0         0         0         0         0         0
Columns 7 through 8
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
   -62500000      0
    0         0
    62500000      0
    0         0

>> K=k1+k2+k3+k4
K =
Columns 1 through 6
    66612360    2380840    62500000         0    -4112360    -2380840
    2380840    1352750         0         0    -2380840    -1352750
    62500000         0    62500000         0         0         0
         0         0         0    10822000         0    10822000
   -4112360    -2380840         0         0    66612360    2380840
   -2380840    -1352750         0    10822000    2380840    12174750
         0         0         0         0    -62500000         0
         0         0         0         0         0         0
Columns 7 through 8
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
   -62500000      0
    0         0
    62500000      0
    0         0

>> Y = [62500000 0 0 0; 0 10822000 0 10822000; 0 0 66612360 2380840; 0 10822000
2380840 12174750]
Y =
    62500000         0         0         0
         0    10822000         0    10822000
         0         0    66612360    2380840
         0    10822000    2380840    12174750

>> F = 1000*[0;-10000; 8000;0]
F =
         0
   -10000000
    8000000
         0

>> U=inv(Y)*F
U =
         0
    -8.5871
    -0.1538
     7.6630

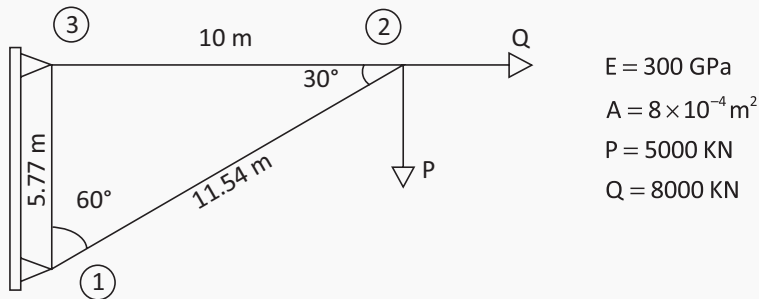
```

Cálculo de los esfuerzos

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> G12 = 12500000*[-1 1]*[1 0 0; 0 0 1 0]*[0; 0; 0; -8.5871]
G12 =
    0
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> G23 = 21645021*[-1 1]*[0 1 0 0; 0 0 0 1]*[0; -8.5871; -0.1538; 7.6630]
G23 =
    3.5173e+08
>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
>> G13 = 10822510.82*[-1 1]*[0.87 0.5 0 0; 0 0 0.87 0.5]*[0; 0; -0.1538; 7.6630]
G13 =
    4.0018e+07
>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> G34 = 12500000*[-1 1]*[-1 0 0 0; 0 0 -1 0]*[-0.1538; 7.6630; 0; 0]
G34 =
   -1922500
```

EJERCICIO 10

Hallar los desplazamientos, fuerzas y esfuerzos en cada caso.



A. Resolución

Paso 1: Calcule los siguientes valores.

k	Barra	θ	C	S	C^2	S^2	CS
k_1	1-2	30°	0.87	0.5	0.75	0.25	0.44
k_2	2-3	180°	-1	0	1	0	0
k_3	1-3	90°	0	1	0	1	0

Paso 2: Calcule las rigideces de cada barra.

$$K_1 = \frac{(300 \times 10^9)(8 \times 10^{-4})}{11.5} = 20779.22 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_2 = \frac{(300 \times 10^9)(8 \times 10^{-4})}{10} = 24000 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K_3 = \frac{(300 \times 10^9)(8 \times 10^{-4})}{5.77} = 41594.45 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1= 20779.22 * 1000 * [ 0.75 0.44 -0.75 -0.44 0 0 ; 0.44 0.25 -0.44 -0.25 0 0 ;
-0.75 -0.44 0.75 0.44 0 0 ; -0.44 -0.25 0.44 0.25 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 ]
```

```
k1 =
```

```
1.0e+007 *
```

```
1.5584    0.9143   -1.5584   -0.9143         0         0
0.9143    0.5195   -0.9143   -0.5195         0         0
-1.5584   -0.9143    1.5584    0.9143         0         0
-0.9143   -0.5195    0.9143    0.5195         0         0
0          0          0          0         0         0
0          0          0          0         0         0
```

```
>> k2= 24000 * 1000 * [ 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 1 0 -1 0 ; 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 -1 0 1 0 ; 0 0 0 -1 0 1 ]
```

```
k2 =
```

```
0          0          0          0          0          0
0          0          0          0          0          0
0          0    24000000         0   -24000000         0
0          0          0          0          0          0
0          0   -24000000         0    24000000         0
0          0          0   -24000000         0    24000000
```

```
>> k3= 41594.45 * 1000 * [ 0 0 0 0 0 0 ; 0 1 0 0 0 -1 ; 0 0 0 0 0 0 ; ...
0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 ; 0 -1 0 0 0 1 ]
```

```
k3 =
```

```
0          0          0          0          0          0
0    41594450         0          0          0   -41594450
0          0          0          0          0          0
0          0          0          0          0          0
0          0          0          0          0          0
0   -41594450         0          0          0    41594450
```

```
>> KT= k1+k2+k3
```

```
KT =
```

```
1.0e+007 *
```

```
1.5584    0.9143   -1.5584   -0.9143         0         0
0.9143    4.6789   -0.9143   -0.5195         0   -4.1594
-1.5584   -0.9143    3.9584    0.9143   -2.4000         0
-0.9143   -0.5195    0.9143    0.5195         0         0
0          0   -2.4000         0    2.4000         0
0   -4.1594         0   -2.4000         0    6.5594
```



```

-1.5584 -0.9143 -1.5584 -0.9143 0 0
-0.9143 4.6789 -0.9143 -0.5195 0 -4.1594
-1.5584 -0.9143 3.9584 0.9143 -2.4000 0
-0.9143 -0.5195 0.9143 0.5195 0 0
0 0 -2.4000 0 2.4000 0
0 -4.1594 0 -2.4000 0 6.5594

```

```
>> Y= [ 3.9584 0.9143 ; 0.9143 0.5195 ]
```

```
Y =
```

```

3.9584 0.9143
0.9143 0.5195

```

```
>> F= 1000 * [ 8000 ; -5000 ]
```

```
F =
```

```

8000000
-5000000

```

```
>> U= inv(Y)*F
```

```
U =
```

```

1.0e+007 *
0.7151
-2.2210

```

Cálculo de los esfuerzos

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
```

```
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
```

```
>> G12 = 2.60e+010 * [-1 1] * [0.87 0.5 0 0; 0 0 0.87 0.5] * [0; 0; 0.7151; -2.2210]
```

```
G12 =
```

```
-1.2697e+010
```

```
>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
```

```
>> G23 = 3.0e+010 * [-1 1] * [-1 0 0 0; 0 0 -1 0] * [0.7151; -2.2210; 0; 0]
```

```
G23 =
```

```
2.1453e+010
```

```
>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
```

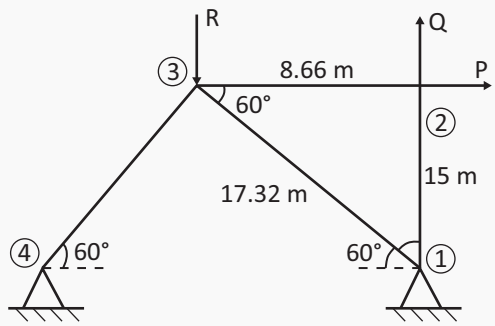
```
>> 5.19e+010 * [-1 1] * [0 1 0 0; 0 0 0 1] * [0; 0; 0; 0]
```

```
ans =
```

```
0
```

EJERCICIO 11

Hallar los desplazamientos nodales, esfuerzos y las fuerzas en los siguientes sistemas estructurales:



$E_1 = 320 \text{ GPa}$
 $A_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $P = 2000 \text{ KN}$
 $Q = 2300 \text{ KN}$
 $R = 2500 \text{ KN}$

A. Resolución

Paso 1: Calcule los ángulos.

Elemento	Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	CS
1	1 – 2	90°	0	1	0	1	0
2	2 – 3	180°	-1	0	1	0	0
3	3 – 4	240°	-0.5	-0.87	0.25	0.76	0.44
4	1 – 3	120°	-0.5	0.87	0.25	0.76	-0.44

Paso 2: Calcule las matrices de rigidez de cada barra.

$$k_1 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{15 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 \times 10^5 & 0 & -128 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -128 \times 10^5 & 0 & 128 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{8.66 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2171 \times 10^7 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 2.2171 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{17.32 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.44 & -0.25 & -0.44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.76 & -0.44 & -0.76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.44 & 0.25 & 0.44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.44 & -0.76 & 0.44 & 0.76 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (6 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{17.32 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 & 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 & 2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 & -4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.44 & 0 & 0 & -0.25 & 0.44 & 0 & 0 \\ -0.44 & 0.76 & 0 & 0 & 0.44 & -0.76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.44 & 0 & 0 & 0.25 & -0.44 & 0 & 0 \\ 0.44 & -0.76 & 0 & 0 & -0.44 & 0.76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz de rigidez:

$$K_T = \begin{bmatrix} 2.77 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.77 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 4.8832 \times 10^6 & 2.1235 \times 10^7 & 0 & 128 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2171 \times 10^7 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 \times 10^5 & 0 & -128 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.7746 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 2.7720 \times 10^7 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 \\ 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 16.8694 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz ensamblada:

$$K = \begin{bmatrix} 2.77 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.77 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 4.8832 \times 10^6 & 2.1235 \times 10^7 & 0 & 128 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2171 \times 10^7 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 \times 10^5 & 0 & -128 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.7746 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 2.7720 \times 10^7 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 \\ 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 16.8694 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{3x} \\ v_{3y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 2000 \times 10^3 \\ 2300 \times 10^3 \\ 0 \\ -2500 \times 10^3 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 4 (por ser articulaciones).

$$K = \begin{bmatrix} -2.77 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.77 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -4.8832 \times 10^6 & 2.1235 \times 10^7 & 0 & 128 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2171 \times 10^7 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 \times 10^5 & 0 & -128 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.7746 \times 10^5 & 4.8832 \times 10^6 & -2.2171 \times 10^7 & 0 & 2.7720 \times 10^7 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 \\ 4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 16.8694 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.7746 \times 10^6 & -4.8832 \times 10^6 & 2.7746 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.8832 \times 10^6 & -8.4347 \times 10^6 & 4.8832 \times 10^6 & 8.4347 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{3x} \\ v_{3y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{1x} \\ -F_{1y} \\ 2000 \times 10^3 \\ 2300 \times 10^3 \\ 0 \\ -2500 \times 10^3 \\ -F_{4x} \\ -F_{4y} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.2171 \times 10^7 & 0 & -2.2171 \times 10^7 & 0 \\ 0 & -128 \times 10^7 & 0 & 0 \\ -2.2171 \times 10^7 & 0 & 2.7720 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 16.8694 \times 10^6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{3x} \\ v_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \times 10^3 \\ 2300 \times 10^3 \\ 0 \\ -2500 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 0.4506 \text{ m}$$

$$v_2 = -0.0018 \text{ m}$$

$$u_3 = 0.3604 \text{ m}$$

$$v_3 = -0.1482 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [2.2171*10^7 0 -2.2171*10^7 0; 0 -128*10^7 0 0; -2.217*10^7 0 2.7720*10^7 0;
0 0 0 16.8694*10^6]
```

```
A =
```

```
1.0e+009 *
```

```
0.0222      0    -0.0222      0
      0    -1.2800      0      0
-0.0222      0    0.0277      0
      0      0      0    0.0169
```

```
>> F = [2000*10^3; 2300*10^3; 0; -2500*10^3]
```

```
F =
```

```
2000000
2300000
      0
-2500000
```

```
>> U = inv(A)*F
```

```
U =
```

```
0.4506
-0.0018
0.3603
-0.1482
```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

$$F_{1x} = (-2.7746 \times 10^6)(0.3604) + (4.8832 \times 10^6)(-0.1482)$$

$$F_{1x} = -1724211 \text{ N}$$

$$F_{1y} = (128 \times 10^5)(0.1797) + (4.8832 \times 10^6)(0.3604)$$

$$F_{1y} = 2.9869 \times 10^6 \text{ N}$$

$$F_{4x} = (-2.7746 \times 10^6)(0.3604) + (-4.8832 \times 10^6)(-0.1482)$$

$$F_{4x} = -2.7628 \times 10^5 \text{ N}$$

$$F_{4y} = (-4.8832 \times 10^6)(0.3604) + (-8.4347 \times 10^6)(-0.1482)$$

$$F_{4y} = -5.0988 \times 10^5 \text{ N}$$

```
>> K = [2.77*10^6 -4.8832*10^6 0 0 -2.77*10^6 4.8832*10^6 0 0; 4.8832*10^6 2.1235*10^7
0 128*10^5 4.8832*10^6 -8.4347*10^6 0 0; 0 0 2.2171*10^7 0 -2.2171*10^7 0 0 0; 0
128*10^5 0 -128*10^7 0 0 0 0; -2.7746*10^5 4.8832*10^6 -2.2171*10^7 0 2.7720*10^7 0
-2.7764*10^6 -4.8832*10^6; 4.8832*10^6 -8.4347*10^6 0 0 0 16.8694*10^6 -4.8832*10^6
-8.4347*10^6; 0 0 0 0 -2.7746*10^6 -4.8832*10^6 2.7746*10^6 4.8832*10^6; 0 0 0 0
-4.8832*10^6 -8.4347*10^6 4.8832*10^6 8.4347*10^6]
```

K =

1.0e+009 *

0.0028	-0.0049	0	0	-0.0028	0.0049	0	0
0.0049	0.0212	0	0.0128	0.0049	-0.0084	0	0
0	0	0.0222	0	-0.0222	0	0	0
0	0.0128	0	-1.2800	0	0	0	0
-0.0003	0.0049	-0.0222	0	0.0277	0	-0.0028	-0.0049
0.0049	-0.0084	0	0	0	0.0169	-0.0049	-0.0084
0	0	0	0	-0.0028	-0.0049	0.0028	0.0049
0	0	0	0	-0.0049	-0.0084	0.0049	0.0084

```
>> U = [0; 0; 0.4506; -0.0018; 0.3604; -0.1482; 0; 0]
```

U =

0
0
0.4506
-0.0018
0.3604
-0.1482
0
0

```
>> F = K*U
```

F =

1.0e+009 *

-1.7220
2.9869
1.9998
2.3040
0.0000
-2.5000
-0.2763
-0.5099

Cálculo de los esfuerzos

$$\sigma_{i-j} = \left[\frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} -C & -S & C & S \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \right]$$

$$\sigma_{1-2} = \left[\frac{320 \times 10^9 \text{ Pa}}{15 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4506 \\ -0.0018 \end{bmatrix} \right] = 3.84 \times 10^7$$

$$\sigma_{2-3} = \left[\frac{320 \times 10^9 \text{ Pa}}{8.66 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4506 \\ -0.0018 \\ 0.3604 \\ -0.1482 \end{bmatrix} \right] = 3.3330 \times 10^9$$

$$\sigma_{3-4} = \left[\frac{320 \times 10^9 \text{ Pa}}{17.32 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0.87 & -0.5 & -0.87 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3604 \\ -0.1482 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 9.4718 \times 10^8$$

$$\sigma_{1-3} = \left[\frac{320 \times 10^9 \text{ Pa}}{17.32 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 & -0.5 & 0.87 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3604 \\ -0.1482 \end{bmatrix} \right] = -5.7115 \times 10^9$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = ((320*10^9)/15)*10^-1 0 1*[0; 0; 0.4506; -0.0018]

E12 =

-38400000

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23 = ((320*10^9)/8.66)*[1 0 -1 0]*[0.4506; -0.0018; 0.3604; -0.1482]

E23 =

3.3330e+009

>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> E34 = ((320*10^9)/17.32)*[0.5 0.87 -0.5 -0.87]*[0.3604; -0.1482; 0; 0]

E34 =

9.4718e+008

>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
>> E34 = ((320*10^9)/17.32)*[0.5 0.87 -0.5 -0.87]*[0; 0; 0.3604; -0.1482]

E34 =

-9.4718e+008

>> % ESFUERZO DE 1 A 3:
>> E13 = ((320*10^9)/17.32)*[0.5 -0.87 -0.5 0.87]*[0; 0; 0.3604; -0.1482]

E13 =

-5.7115e+009
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$k_7 = \frac{350 \times 10^9 \text{ Pa} (5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{10\sqrt{2} \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 4 (por ser articulaciones).

$$\sum_{k=10^6} \begin{bmatrix} 17500000 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -17500000 \\ -0 & -17500000 & -0 & -17500000 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 23685000 & 6185000 & -17500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 \\ 0 & -17500000 & 6185000 & 23685000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 \\ 0 & 0 & -17500000 & 0 & -17500000 & 6185000 & -17500000 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6185000 & 23685000 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & -17500000 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & -6185000 & -23685000 & -0 & -0 & -6185000 & -6185000 & -0 & -17500000 & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & -17500000 & -0 & -17500000 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & 0 & 23685000 & 6185000 & -17500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & -17500000 & 6185000 & 23685000 & 0 & 0 & 0 \\ 17500000 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17500000 & 0 & 41185000 & 6185000 & 0 \\ 0 & 0 & -6185000 & -6185000 & 0 & -17500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6185000 & 23685000 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{3x} \\ v_{3y} \\ 0 \\ 0 \\ u_{5x} \\ v_{5y} \\ u_{6x} \\ v_{6y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 2.8 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \times 10^6 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ 0 \\ -2.5 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 23685000 & 6185000 & -17500000 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 \\ 6185000 & 23685000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6185000 & -6185000 \\ -17500000 & 0 & 41185000 & 6185000 & -6185000 & 6185000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6185000 & 23685000 & -6185000 & -6185000 & 0 & -17500000 \\ 0 & 0 & -6185000 & 6185000 & 23685000 & 6185000 & -17500000 & 0 \\ 0 & 0 & 6185000 & -6185000 & 6185000 & 23685000 & 0 & 0 \\ -6185000 & -6185000 & 0 & 0 & -17500000 & 0 & 41185000 & -6185000 \\ -6185000 & -6185000 & 0 & -17500000 & 0 & 0 & 6185000 & 23685000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{3x} \\ v_{3y} \\ u_{5x} \\ v_{5y} \\ u_{6x} \\ v_{6y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \times 10^6 \\ 0 \\ -2.5 \times 10^6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Calcule los desplazamientos nodales.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ m} \\ v_1 &= 0 \text{ m} \\ u_2 &= 0.3890 \text{ m} \\ v_2 &= -0.1217 \text{ m} \\ u_3 &= 0.3507 \text{ m} \\ v_3 &= -0.3851 \text{ m} \\ u_4 &= 0 \text{ m} \\ v_4 &= 0 \text{ m} \\ u_5 &= 0.4375 \text{ m} \\ v_5 &= -0.4119 \text{ m} \\ u_6 &= 0.1865 \text{ m} \\ v_6 &= -0.2634 \text{ m} \end{aligned}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [23685000 6185000 -17500000 0 0 0 -6185000 -6185000; 6185000 23685000 0 0 0 0
0 -6185000 -6185000; -17500000 0 41185000 6185000 -6185000 6185000 0 0; 0 0 6185000
23685000 -6185000 -6185000 0 -17500000; 0 0 -6185000 6185000 23685000 6185000
-17500000 0; 0 0 6185000 -6185000 6185000 23685000 0 0; -6185000 -6185000 0 0
-17500000 0 41185000 -6185000; -6185000 -6185000 0 -17500000 0 0 6185000 23685000]
```

A =

```
23685000    6185000   -17500000         0         0         0   -6185000   -6185000
 6185000    23685000         0         0         0         0   -6185000   -6185000
-17500000         0   41185000    6185000   -6185000    6185000         0         0
         0         0    6185000    23685000   -6185000   -6185000         0   -17500000
```

```

      0      0      -6185000      6185000      23685000      6185000      -17500000      0
      0      0      6185000      -6185000      6185000      23685000      0      0
-6185000      -6185000      0      0      -17500000      0      41185000      -6185000
-6185000      -6185000      0      -17500000      0      0      6185000      23685000

>> F = [2.8*10^6; 0; 0; -2.5*10^6; 0; -2.5*10^6; 0; 0]

F =

      2800000
           0
           0
     -2500000
           0
     -2500000
           0
           0

>> U = inv(A)*F

U =

      0.3890
     -0.1217
      0.3507
     -0.3851
      0.4375
     -0.4119
      0.1865
     -0.2634

```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

$$F_{1x} = 0.3264 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{1y} = -0.2130 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{2x} = 0.2799 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{2y} = -0.0001 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{3x} = -1.5485 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{3y} = -0.2501 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{4x} = -0.2501 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{4y} = -0.6137 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{5x} = -0.4767 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{5y} = -0.6837 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{6x} = -0.3258 \times 10^7 \text{ N}$$

$$F_{6y} = 0.0001 \times 10^7 \text{ N}$$


```
>> K = [17500000 0 0 0 0 0 0 0 0 17500000 0; 0 17500000 0 17500000 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 23685000 6185000 -17500000 0 0 0 0 -6185000 -6185000; 0 -17500000 6185000
23685000 0 0 0 0 0 -6185000 -6185000; 0 0 -17500000 0 -17500000 6185000
-17500000 0 -6185000 -6185000 0 0; 0 0 0 6185000 23685000 0 0 -6185000 -6185000
0 -17500000; 0 0 0 6185000 23685000 0 0 -6185000 -6185000 0 -17500000; 0 0 0
-17500000 0 17500000 0 0 0 0; 0 0 0 0 -61850000 -6185000 0 0 23685000 6185000
-17500000 0; 0 0 0 0 -6185000 -6185000 0 -17200000 6185000 23685000 0 0; 17500000
0 -6185000 -6185000 0 0 0 -17500000 0 41185000 6185000; 0 0 -6185000 -6185000 0
-17500000 0 0 0 6185000 23685000]
```

K =

Columns 1 through 10

17500000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	17200000	0	17500000	0	0	0	0	0	0
0	0	23685000	6185000	-17500000	0	0	0	0	0
0	-17500000	6185000	23685000	0	0	0	0	0	0
0	0	-17500000	0	-17500000	6185000	-17500000	0	-6185000	-6185000
0	0	0	0	6185000	23685000	0	0	-6185000	-6185000
0	0	0	0	6185000	23685000	0	0	-6185000	-6185000
0	0	0	0	-17500000	0	17500000	0	0	0
0	0	0	0	-6185000	-6185000	0	0	23685000	6185000
0	0	0	0	-6185000	-6185000	0	-17200000	6185000	23685000
17500000	0	-6185000	-6185000	0	0	0	0	-17500000	0
0	0	-6185000	-6185000	0	-17500000	0	0	0	0

Columns 11 through 12

17500000	0
0	0
-6185000	-6185000
-6185000	-6185000
0	0
0	-17500000
0	-17500000
0	0
-17500000	0
0	0
41185000	6185000
6185000	23685000

```
>> U = [0; 0; 0.3890; -0.1217; 0.3507; -0.3851; 0; 0; 0.4375; -0.4119; 0.1865;
-0.2634]
```

U =

0
0
0.3890
-0.1217
0.3507
-0.3851
0
0
0.4375
-0.4119
0.1865
-0.2634

```
>> F = K*U
```

```
F =
```

```
1.0e+007 *
```

```
0.3264
```

```
-0.2130
```

```
0.2799
```

```
-0.0001
```

```
-1.5485
```

```
-0.2501
```

```
-0.2501
```

```
-0.6137
```

```
0.4764
```

```
-0.6837
```

```
-0.3258
```

```
0.0001
```

Cálculo de los esfuerzos

$$\sigma_{i-j} = \left[\frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} -C & -S & C & S \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \right]$$

$$\sigma_{1-2} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3890 \\ -0.1217 \end{bmatrix} \right] = -4.2595 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{2-3} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3890 \\ -0.1217 \\ 0.3507 \\ -0.3851 \end{bmatrix} \right] = 1.3405 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{3-4} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3507 \\ -0.3851 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 1.2275 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{4-5} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4375 \\ -0.4119 \end{bmatrix} \right] = 1.4417 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{5-6} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4375 \\ -0.4119 \\ 0.1865 \\ -0.2634 \end{bmatrix} \right] = -8.7850 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{1-6} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1865 \\ -0.2634 \end{bmatrix} \right] = -6.5275 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{2-6} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10\sqrt{2} \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 & -0.71 & -0.71 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3890 \\ -0.1217 \\ 0.1865 \\ -0.2634 \end{bmatrix} \right] = 8.5534 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{3-5} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10\sqrt{2} \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 & -0.71 & -0.71 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3507 \\ -0.3851 \\ 0.4375 \\ -0.4119 \end{bmatrix} \right] = -1.4910 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{3-6} = \left[\frac{350 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3507 \\ -0.3851 \\ 0.1865 \\ -0.2634 \end{bmatrix} \right] = -4.2595 \text{ GPa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = ((350*10^9)/10)*[0 -1 0 1]*[0; 0; 0.3890; -0.1217]

E12 =

-4.2595e+009

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23=((350*10^9)/10)*[1 0 -1 0]*[0.3890; -0.1217; 0.3507; -0.3851]

E23 =

1.3405e+009

>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> E34 = ((350*10^9)/10)*[1 0 -1 0]*[0.3507; -0.3851; 0; 0]
```

E34 =

1.2275e+010

>> % ESFUERZO DE 4 A 5:

>> E45 = ((350*10^9)/10)*[0 1 0 -1]*[0; 0; 0.4375; -0.4119]

E45 =

1.4417e+010

>> % ESFUERZO DE 1 A 2:

>> E56 = ((350*10^9)/10)*[-1 0 1 0]*[0.4375; -0.4119; 0.1865; -0.2634]

E56 =

-8.7850e+009

>> % ESFUERZO DE 1 A 6:

>> E16 = ((350*10^9)/10)*[1 0 -1 0]*[0; 0; 0.1865; -0.2634]

E16 =

-6.5275e+009

>> % ESFUERZO DE 2 A 6:

>> E26 = ((350*10^9)/(10*(2^1/2)))*[0 71 0.71 -0.71 -0.71]*[0.3890; -0.1217; 0.1865; -0.2634]

E26 =

8.5534e+009

>> % ESFUERZO DE 3 A 5:

>> E26 = ((350*10^9)/(10*(2^1/2)))*[0.71 0.71 -0.71 -0.71]*[0.3507; -0.3851; 0.4375; -0.4119]

E26 =

-1.4910e+009

>> % ESFUERZO DE 3 A 6:

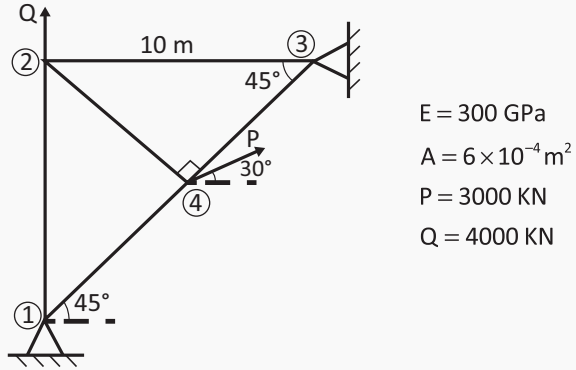
>> E36 = ((350*10^9)/10)*[0 1 0 -1]*[0.3507; -0.3851; 0.1865; -0.2634]

E36 =

-4.2595e+009

EJERCICIO 13

Hallar los desplazamientos nodales, los esfuerzos y las fuerzas en los siguientes sistemas estructurales:



A. Resolución

Paso 1: Calcule los ángulos.

Elemento	Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	CS
1	1-2	90°	0	1	0	1	0
2	2-3	0°	1	0	1	0	0
3	3-4	225°	-0.707	-0.707	0.499849	0.499849	0.499849
4	1-4	45°	0.707	0.707	0.499849	0.499849	0.499849

Paso 2: Calcule las matrices de rigidez de cada barra.

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22400000 & 0 & -22400000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22400000 & 0 & 22400000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22400000 & 0 & -22400000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22400000 & 0 & 22400000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 15834408.46 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} 15834408.46 & 15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 15834408.46 & 15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz de rigidez:

$$\sum_{k=10^6} = \begin{bmatrix} 15834408.46 & 15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 15834408.46 & 38234408.46 & 0 & -22400000 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 38234408.46 & -15834408.46 & -22400000 & 0 & -15834408.46 & 15834408.46 \\ 0 & -22400000 & -15834408.46 & 38234408.46 & 0 & 0 & 15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 22400000 & 0 & 38234408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 47503225.39 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 15834408.46 & 47503225.39 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz ensamblada:

$$\sum_{k=10^6} = \begin{bmatrix} 15834408.46 & 15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 15834408.46 & 38234408.46 & 0 & -22400000 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 38234408.46 & -15834408.46 & -22400000 & 0 & -15834408.46 & 15834408.46 \\ 0 & -22400000 & -15834408.46 & 38234408.46 & 0 & 0 & 15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 22400000 & 0 & 38234408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 47503225.39 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 15834408.46 & 47503225.39 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{ix} \\ v_{iy} \\ 0 \\ u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \\ 4000000 \\ F_{ix} \\ F_{iy} \\ 2598076.211 \\ 1500000 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas en los nodos 1 y 3 (por ser articulaciones).

$$\sum_{k=10^6} = \begin{bmatrix} -15834408.46 & -15834408.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 0 & -22400000 & 0 & 0 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 38234408.46 & -15834408.46 & -22400000 & 0 & -15834408.46 & 15834408.46 \\ 0 & -22400000 & -15834408.46 & 38234408.46 & 0 & 0 & 15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 22400000 & 0 & 38234408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 47503225.39 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 15834408.46 & 47503225.39 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{ix} \\ v_{iy} \\ 0 \\ u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \\ 4000000 \\ F_{ix} \\ F_{iy} \\ 2598076.211 \\ 1500000 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38234408.46 & -15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 \\ -15834408.46 & 38234408.46 & 15834408.46 & -15834408.46 \\ -15834408.46 & 15834408.46 & 47503225.39 & -15834408.46 \\ 15834408.46 & -15834408.46 & 15834408.46 & 47503225.39 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{2x} \\ v_{2y} \\ u_{4x} \\ v_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4000000 \\ 2598076.211 \\ 1500000 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Calcule los desplazamientos nodales.

$$u_2 = 0.02451063 \text{ m}$$

$$v_2 = 0.154060799 \text{ m}$$

$$u_4 = -0.01508718 \text{ m}$$

$$v_4 = 0.079789253 \text{ m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> A = [38234408.46 -15834408.46 -15834408.46 15834408.46; -15834408.46 38234408.46
15834408.46 -15834408.46; -15834408.46 15834408.46 47503225.39 -15834408.46;
15834408.46 -15834408.46 15834408.46 47503225.39]
```

```
A =
```

```
1.0e+007 *
```

```
3.8234 -1.5834 -1.5834 1.5834
-1.5834 3.8234 1.5834 -1.5834
-1.5834 1.5834 4.7503 -1.5834
1.5834 -1.5834 1.5834 4.7503
```

```
>> F = [0; 4000000; 2598076.211; 1500000]
```

```
F =
```

```
1.0e+006 *
```

```
0
4.0000
2.5981
1.5000
```

```
>> U = inv(A)*F
```

```
U =
```

```
0.0533
0.1252
0.0443
0.0408
```

Cálculo de las fuerzas en cada articulación

```
>> K = [15834408.46 15834408.46 0 0 0 0 -15834408.46 -15834408.46; 15834408.46
38234408.46 0 -22400000 0 0 -15834408.46 -15834408.46; 0 0 38234408.46 -15834408.46
-22400000 0 -15834408.46 15834408.46; 0 -22400000 -15834408.46 38234408.46 0 0
15834408.46 -1584408.46; 0 0 22400000 0 38234408.46 15834408.46 -15834408.46
-15834408.46; 0 0 0 0 15834408.46 15834408.46 -15834408.46 -15834408.46;
-15834408.46 -15834408.46 -15834408.46 15834408.46 -15834408.46 -15834408.46
47503225.39 -15834408.46; -15834408.46 -15834408.46 15834408.46 -15834408.46
-15834408.46 15834408.46 15834408.46 47503225.39]
```

```
K =
```

```
1.0e+007 *
```

```
1.5834 1.5834 0 0 0 0 -1.5834 -1.5834
1.5834 3.8234 0 -2.2400 0 0 -1.5834 -1.5834
0 0 3.8234 -1.5834 -2.2400 0 -1.5834 1.5834
0 -2.2400 -1.5834 3.8234 0 0 1.5834 -1.5834
0 0 2.2400 0 3.8234 1.5834 -1.5834 -1.5834
0 0 0 0 1.5834 1.5834 -1.5834 -1.5834
-1.5834 -1.5834 -1.5834 1.5834 -1.5834 -1.5834 4.7503 -1.5834
-1.5834 -1.5834 1.5834 -1.5834 -1.5834 1.5834 1.5834 4.7503
```

```
>> U = [0; 0; 0.0533; 0.1252; 0; 0; 0.0443; 0.0408]
```

```
U =
```

```
0
0
0.0533
0.1252
0
0
0.0443
0.0408
```

```
>> F = K*U
```

```
F =
```

```
1.0e+006 *
```

```
-1.3475
-4.1520
0.0000
3.9984
-0.1536
-1.3475
2.5968
1.5011
```

Cálculo de los esfuerzos

$$\sigma_{i-j} = \left[\frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} -C & -S & C & S \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \right]$$

$$\sigma_{1-2} = \left[\frac{300 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0533 \\ 0.1252 \end{bmatrix} \right] = 3.7560 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{2-3} = \left[\frac{300 \times 10^9 \text{ Pa}}{10 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.0533 \\ 0.1252 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 1.5990 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{3-4} = \left[\frac{300 \times 10^9 \text{ Pa}}{7.07 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & -0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0443 \\ 0.0408 \end{bmatrix} \right] = -2.5530 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{1-4} = \left[\frac{300 \times 10^9 \text{ Pa}}{7.07 \text{ m}} \times \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0443 \\ 0.0408 \end{bmatrix} \right] = 2.5530 \text{ GPa}$$

```
>> % CALCULO DE LOS ESFUERZOS:
>> % ESFUERZO DE 1 A 2:
>> E12 = ((300*10^9)/10)*[0 -1 0 1]*[0; 0; 0.0533; 0.1252]

E12 =

    3.7560e+009

>> % ESFUERZO DE 2 A 3:
>> E23 = ((300*10^9)/10)*[1 0 -1 0]*[0.0533; 0.1252; 0; 0]

E23 =

    1.5990e+009

>> % ESFUERZO DE 3 A 4:
>> E34 = ((300*10^9)/7.07)*[0.707 0.707 -0.707 -0.707]*[0; 0; 0.0443; 0.0408]

E34 =

   -2.5530e+009

>> % ESFUERZO DE 1 A 4:
>> E14 = ((300*10^9)/7.07)*[-0.707 -0.707 0.707 0.707]*[0; 0; 0.0443; 0.0408]

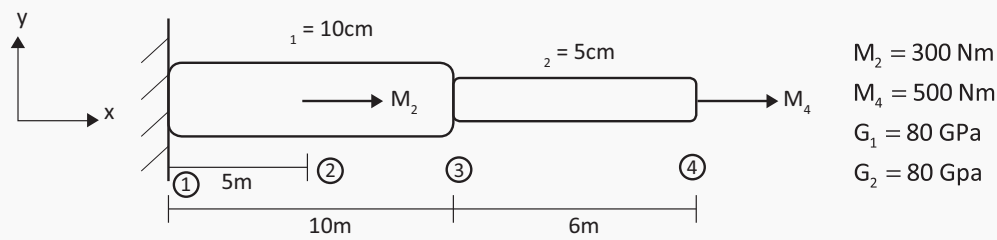
E14 =

    2.5530e+009
```

· · · TORSIÓN

EJERCICIO 1

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Elemento	$J(\text{m}^4)$	G	L(m)	GJ/L
1-2	$7,854 \times 10^{-5}$	80GPa	5m	1256640
2-2	$7,854 \times 10^{-5}$	80GPa	5m	1256640
3-4	$4,909 \times 10^{-6}$	60GPa	5m	49090

A. Resolución

$$\begin{bmatrix} GJ/L & -GJ/L & 0 & 0 \\ -GJ/L & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 1256640 & -1256640 & 0 & 0 \\ -1256640 & 1256640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1256640 & -1256640 & 0 \\ 0 & -1256640 & 1256640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1256640 & -1256640 \\ 0 & 0 & -1256640 & 1256640 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 1256640 & -1256640 & 0 & 0 \\ -1256640 & 12513280 & -1256640 & 0 \\ 0 & -1256640 & 1305730 & -49090 \\ 0 & 0 & -49090 & 49090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Eliminando filas y columnas:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 1256640 & -1256640 & 0 & 0 \\ -1256640 & 12513280 & -1256640 & 0 \\ 0 & -1256640 & 1305730 & -49090 \\ 0 & 0 & -49090 & 49090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Matriz reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 2513280 & -1256640 & 0 \\ -1256640 & 1305730 & -49090 \\ 0 & -49090 & 49090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_2 = 0,0006 \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 0,0010 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0,0014 \text{ rad}$$

Momento:

$$M_1 = -753,9840 \text{ Nm}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1 = [1256640 -1256640 0 0; -1256640 1256640 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]
```

```
k1 =
```

```
1256640    -1256640         0         0
-1256640    1256640         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

```
>> k2 = [0 0 0 0; 0 1256640 -1256640 0; 0 -1256640 1256640 0; 0 0 0 0]
```

```
k2 =
```

```
         0         0         0         0
         0    1256640   -1256640         0
         0   -1256640    1256640         0
         0         0         0         0
```

```
>> k3 = [0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1256640 -1256640; 0 0 -1256640 1256640]
```

```
k3 =
```

```
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0    1256640   -1256640
         0         0   -1256640    1256640
```

```
>> KT = k1 + k2 + k3
```

```
KT =
```

```

1256640    -1256640         0         0
-1256640    2513280    -1256640         0
         0    -1256640    2513280    -1256640
         0         0    -1256640    1256640
```

```
>> KR = [2513280 -1256640 0; -1256640 2513280 -1256640; 0 -1256640 1256640]
```

```
KR =
```

```

2513280    -1256640         0
-1256640    2513280    -1256640
         0    -1256640    1256640
```

```
>> F = [300; 0; 500]
```

```
F =
```

```

300
  0
500
```

```
>> U = inv(KR)*F
```

```
U =
```

```

0.0006
0.0010
0.0014
```

```
>> U = [0; 0.0006; 0.0010; 0.0014]
```

```
U =
```

```

  0
0.0006
0.0010
0.0014
```

```
>> M = KT*U
```

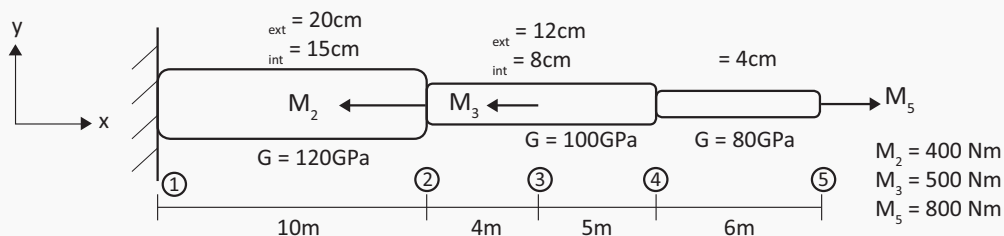
```
M =
```

```

-753.9840
251.3280
  0.0000
502.6560
```

EJERCICIO 2

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Elemento	$J(\text{m}^4)$	G	$L(\text{m})$	GJ/L
1-2	$8,59 \times 10^{-4}$	120GPa	10m	10308000
2-3	$1,307 \times 10^{-4}$	100GPa	4m	3267500
3-4	$1,307 \times 10^{-4}$	100GPa	5m	2614000
4-5	$2,011 \times 10^{-6}$	80GPa	6m	26813,3353

A. Resolución

$$K_{a-b} = \begin{bmatrix} GJ/L & -GJ/L & 0 & 0 \\ -GJ/L & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 10308000 & -10308000 & 0 & 0 & 0 \\ -10308000 & 10308000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10308000 & -10308000 & 0 & 0 \\ 0 & -10308000 & 10308000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2614000 & -2614000 & 0 \\ 0 & 0 & -2614000 & 2614000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26813,3353 & -26813,3353 \\ 0 & 0 & 0 & -26813,3353 & 26813,3353 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 10308000 & -10308000 & 0 & 0 & 0 \\ -10308000 & 13575500 & -3267500 & 0 & 0 \\ 0 & -3267500 & 5881500 & -2614000 & 0 \\ 0 & 0 & -2614000 & 26400813,33 & -26813,3353 \\ 0 & 0 & 0 & -26813,3353 & 26813,3353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

Eliminando filas y columnas:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 10308000 & -10308000 & 0 & 0 & 0 \\ -10308000 & 13575500 & -3267500 & 0 & 0 \\ 0 & -3267500 & 5881500 & -2614000 & 0 \\ 0 & 0 & -2614000 & 26400813,33 & -26813,3353 \\ 0 & 0 & 0 & -26813,3353 & 26813,3353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

Matriz reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 13575500 & -3267500 & 0 & 0 \\ -3267500 & 5881500 & -2614000 & 0 \\ 0 & -2614000 & 26400813,33 & -26813,3353 \\ 0 & 0 & -26813,3353 & 26813,3353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 \\ -500 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_2 = -0,0001 \text{ rad}$$

$$\theta_3 = -0,0001 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0,00004 \text{ rad}$$

$$\theta_5 = 0,0299 \text{ rad}$$

Momentos:

$$M_1 = 4.1232 \times 10^9 \text{ Nm}$$

$$M_2 = -3.7965 \times 10^9 \text{ Nm}$$

$$M_3 = -1.6338 \times 10^9 \text{ Nm}$$

$$M_4 = 1.2855 \times 10^9 \text{ Nm}$$

$$M_5 = 0.0215 \times 10^9 \text{ Nm}$$

Con MATLAB:

```
>> KT = [10308000 -10308000 0 0 0; -10308000 13575500 -3267500 0 0; 0 -3267500 5881500  
-2614000 0; 0 0 -2614000 26400813.33 -26813.3353; 0 0 0 -26813.3353 26813.3353]
```

```
KT =
```

```
1.0e+007 *
```

```
1.0308    -1.0308         0         0         0  
-1.0308    1.3576   -0.3267         0         0  
         0   -0.3267    0.5881   -0.2614         0  
         0         0   -0.2614    2.6401   -0.0027  
         0         0         0   -0.0027    0.0027
```

```
>> KR = [13575500 -3267500 0 0; -3267500 5881500 -2614000 0; 0 -2614000 26400813.33  
-26813.3353; 0 0 -26813.3353 26813.3353]
```

```
KR =
```

```
1.0e+007 *
```

```
1.3576   -0.3267         0         0  
-0.3267    0.5881   -0.2614         0  
         0   -0.2614    2.6401   -0.0027  
         0         0   -0.0027    0.0027
```

```
>> F = [-400; -500; 0; 800]
```

```
F =
```

```
-400  
-500  
     0  
     800
```

```
>> U = inv(KR)*F
```

```
U =
```

```
-0.0001  
-0.0001  
 0.0000  
 0.0299
```

```
>> UT = [0; -400; -500; 0; 800]
```

```
UT =
```

```
     0  
-400  
-500  
     0  
     800
```

```
>> M = KT*UT
```

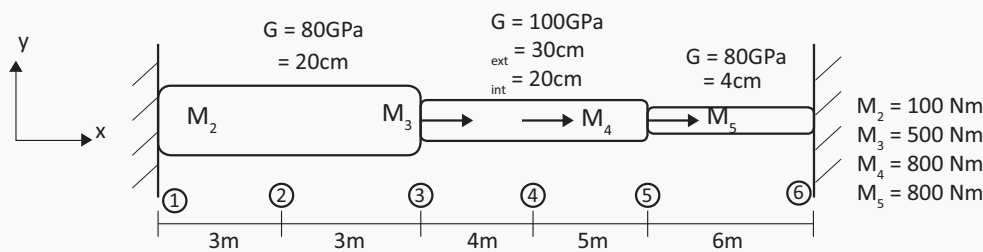
```
M =
```

```
1.0e+009 *
```

```
4.1232  
-3.7965  
-1.6338  
1.2855  
0.0215
```

EJERCICIO 3

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Elemento	J(m ⁴)	G	L(m)	GJ/L
1-2	1,257	80GPa	3m	3,352×10 ¹⁰
2-2	1,257	80GPa	3m	3,352×10 ¹⁰
3-4	5,105×10 ⁻³	100GPa	4m	127625000
4-5	6,362×10 ⁻³	100GPa	5m	127240000
5-6	3,976×10 ⁻⁴	120GPa	6m	7952000

A. Resolución

$$K_{a-b} = \begin{bmatrix} GJ/L & -GJ/L & 0 & 0 \\ -GJ/L & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 3,352 \times 10^{10} & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,352 \times 10^{10} & 3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,352 \times 10^{10} & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,352 \times 10^{10} & 3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 127625000 & -127625000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -127625000 & 127625000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 127240000 & -127240000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -127240000 & 127240000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{5-6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7952000 & -7952000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7952000 & 7952000 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 3,352 \times 10^{10} & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,352 \times 10^{10} & 6,7040 \times 10^9 & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3520 \times 10^{10} & 3,3648 \times 10^9 & -0,0128 \times 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0128 \times 10^9 & 0,0255 \times 10^9 & -0,0127 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0127 \times 10^9 & 0,01350 \times 10^9 & -7952000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7952000 & 7952000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

Eliminando Filas y Columnas:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} -3,352 \times 10^{10} & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,352 \times 10^{10} & 6,7040 \times 10^9 & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3520 \times 10^{10} & 3,3648 \times 10^9 & -0,0128 \times 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0128 \times 10^9 & 0,0255 \times 10^9 & -0,0127 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0127 \times 10^9 & 0,01350 \times 10^9 & -7952000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7952000 & 7952000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

Matriz reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 6,7040 \times 10^9 & -3,352 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ -3,3520 \times 10^{10} & 3,3648 \times 10^9 & -0,0128 \times 10^9 & 0 \\ 0 & -0,0128 \times 10^9 & 0,0255 \times 10^9 & -0,0127 \times 10^9 \\ 0 & 0 & -0,0127 \times 10^9 & 0,01350 \times 10^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 500 \\ 800 \\ 800 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_2 = -0,0001 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = -0,0000 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0,1146 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_5 = 0,1670 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Momentos:

$$M_1 = 3352 \text{ Nm}$$

$$M_6 = 1328 \text{ Nm}$$

Con MATLAB:

```
>> KT = [3.352*10^10 -3.352*10^10 0 0 0 0; -3.352*10^10 6.7040*10^9 -3.352*10^10
0 0 0; 0 -3.3520*10^10 3.3648*10^9 -0.0128*10^9 0 0; 0 0 -0.0128*10^9 0.0255*10^9
-0.0127*10^9 0; 0 0 0 -0.0127*10^9 0.01350*10^9 -7952000; 0 0 0 0 -7952000 7952000]
```

KT =

1.0e+010 *

3.3520	-3.3520	0	0	0	0
-3.3520	0.6704	-3.3520	0	0	0
0	-3.3520	0.3365	-0.0013	0	0
0	0	-0.0013	0.0026	-0.0013	0
0	0	0	-0.0013	0.0014	-0.0008
0	0	0	0	-0.0008	0.0008

```
>> KR = [ 6.7040*10^9 -3.352*10^10 0 0; -3.3520*10^10 3.3648*10^9 -0.0128*10^9 0;
0 -0.0128*10^9 0.0255*10^9 -0.0127*10^9; 0 0 -0.0127*10^9 0.01350*10^9]
```

KR =

1.0e+010 *

0.6704	-3.3520	0	0
-3.3520	0.3365	-0.0013	0
0	-0.0013	0.0026	-0.0013
0	0	-0.0013	0.0014

```
>> F = [-100; 500; 800; 800]
```

F =

-100
500
800
800

```
>> F = [-100; 500; 800; 800]

F =

    -100
     500
     800
     800

>> u = inv(KR)*F

u =

    1.0e-003 *

    -0.0001
    -0.0000
     0.1146
     0.1670

>> U = 10^-3*[0; -0.0001; 0; 0.1146; 0.1670; 0]

U =

    1.0e-003 *

         0
    -0.0001
         0
     0.1146
     0.1670
         0

>> M = KT*U

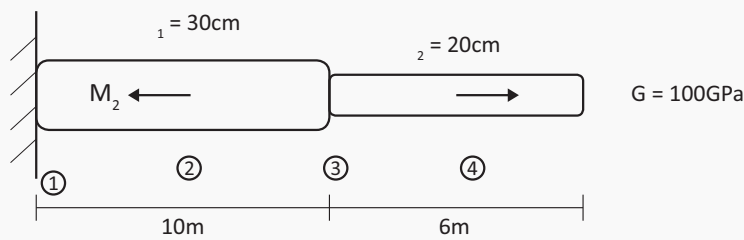
M =

    1.0e+003 *

     3.3520
    -0.6704
     1.8851
     0.8014
     0.7991
    -1.3280
```

EJERCICIO 4

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Elemento	$J(m^4)$	G	L(m)	GJ/L
1-2	0,00636	1×10^{11} GPa	6m	106×10^6
2-2	0,00636	1×10^{11} GPa	6m	106×10^6
3-4	0,00126	8×10^{10} GPa	4m	252×10^5
4-5	0,00126	8×10^{10} GPa	5m	2016×10^4

A. Resolución

$$K_{a-b} = \begin{bmatrix} GJ/L & -GJ/L & 0 & 0 \\ -GJ/L & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 106000000 & -106000000 & 0 & 0 & 0 \\ -106000000 & 106000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 106000000 & -106000000 & 0 \\ 0 & 0 & -106000000 & 106000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 252 \times 10^5 & -252 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & -252 \times 10^5 & 252 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2016 \times 10^4 & -2016 \times 10^4 \\ 0 & 0 & 0 & -2016 \times 10^4 & 2016 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 106000000 & -106000000 & 0 & 0 & 0 \\ -106000000 & 212000000 & -106000000 & 0 & 0 \\ 0 & -106000000 & 131200000 & -25200000 & 0 \\ 0 & 0 & -25200000 & 45360000 & -20160000 \\ 0 & 0 & 0 & -20160000 & 20160000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

Matriz reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 212000000 & -106000000 & 0 & 0 \\ -106000000 & 131200000 & -25200000 & 0 \\ 0 & -25200000 & 45360000 & -20160000 \\ 0 & 0 & -20160000 & 20160000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 \\ 0 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_1 = 0 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 1,89 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 7,55 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 3,14 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_5 = 3,14 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Momentos:

$$M_1 = -200 \text{ Nm}$$

$$M_2 = -400 \text{ Nm}$$

$$M_3 = -0.0520 \text{ Nm}$$

$$M_4 = 600 \text{ Nm}$$

$$M_5 = 0 \text{ Nm}$$

Con MATLAB:

```
>> KT = [106000000 -106000000 0 0 0; -10600000 212000000 -106000000 0 0; 0 -106000000
131200000 -25200000 0; 0 0 -25200000 45360000 -20160000; 0 0 0 -20160000 20160000]
```

```
KT =
```

```
106000000 -106000000 0 0 0
-10600000 212000000 -106000000 0 0
0 -106000000 131200000 -25200000 0
0 0 -25200000 45360000 -20160000
0 0 0 -20160000 20160000
```

```
>> KR = [212000000 -106000000 0 0; -106000000 131200000 -25200000 0; 0 -25200000
45360000 -20160000; 0 0 -20160000 20160000]
```

```
KR =
```

```
212000000 -106000000 0 0
-106000000 131200000 -25200000 0
0 -25200000 45360000 -20160000
0 0 -20160000 20160000
```

```
>> F = [-400; 0; 600; 0]
```

```
F =
```

```
-400
0
600
0
```

```
>> u = inv(KR)*F
```

```
u =
```

```
1.0e-004 *
0.0189
0.0755
0.3136
0.3136
```

```
>> U = 10^-4*[0; 0.0189; 0.0755; 0.3136; 0.3136]
```

```
U =
```

```
1.0e-004 *
0
0.0189
0.0755
0.3136
0.3136
```

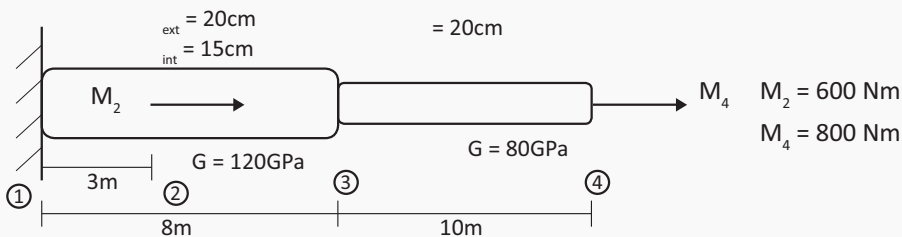
```
>> MT = KT*U
```

```
MT =
```

```
-200.3400
-399.6200
-0.0520
600.0120
0
```


EJERCICIO 5

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Elemento	$J(\text{m}^4)$	G	$L(\text{m})$	GJ/L
1-2	0,00118	$1,2 \times 10^{11} \text{ GPa}$	3m	472×10^5
2-2	0,00118	$1,2 \times 10^{11} \text{ GPa}$	5m	2832×10^4
3-4	0,00261	$8 \times 10^{10} \text{ GPa}$	10m	2088×10^4

A. Resolución

$$K_{a-b} = \begin{bmatrix} GJ/L & -GJ/L & 0 & 0 \\ -GJ/L & GJ/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 472 \times 10^5 & -472 \times 10^5 & 0 & 0 \\ -472 \times 10^5 & 472 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2832 \times 10^4 & -2832 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -2832 \times 10^4 & 2832 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2088 \times 10^4 & -2088 \times 10^4 \\ 0 & 0 & -2088 \times 10^4 & 2088 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 472 \times 10^5 & -472 \times 10^5 & 0 & 0 \\ -472 \times 10^5 & 75520000 & -2832 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -2832 \times 10^4 & 49200000 & -2088 \times 10^4 \\ 0 & 0 & -2088 \times 10^4 & 2088 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Matriz Reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 75520000 & -2832 \times 10^4 & 0 \\ -2832 \times 10^4 & 49200000 & -2088 \times 10^4 \\ 0 & -2088 \times 10^4 & 2088 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_1 = 0 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 0,2966 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 0,5791 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0,9622 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Momentos:

$$M_1 = -1400 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 2076 \text{ Nm}$$

$$M_3 = 756.2 \text{ Nm}$$

$$M_4 = 800 \text{ Nm}$$

Con MATLAB:

```
>> KT = [472*10^5 -472*10^5 0 0; -472*10^5 75520000 -283*10^4 0; 0 -283*10^4 49200000 -2088*10^4; 0 0 -2088*10^4 2088*10^4]
```

```
KT =
```

```
47200000 -47200000 0 0
-47200000 75520000 -2830000 0
0 -2830000 49200000 -20880000
0 0 -20880000 20880000
```

```
>> KR = [75520000 -2832*10^4 0; -2832*10^4 49200000 -2088*10^4; 0 -2088*10^4 2088*10^4]
```

```
KR =
```

```
75520000 -28320000 0
-28320000 49200000 -20880000
0 -20880000 20880000
```

```
>> F = [600; 0; 800]
```

```
F =
```

```
600
0
800
```

```
>> u = inv(KR)*F
```

```
u =
```

```
1.0e-004 *
0.2966
0.5791
0.9622
```

```
>> U = 10^-4*[0; 0.2966; 0.5791; 0.9622]
```

U =

1.0e-004 *

0

0.2966

0.5791

0.9622

```
>> MT = KT*U
```

MT =

1.0e+003 *

-1.4000

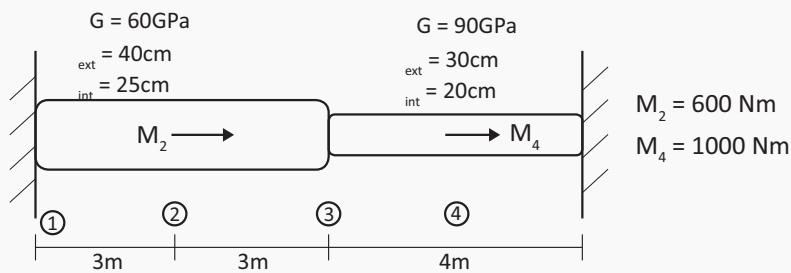
2.0760

0.7562

0.7999

EJERCICIO 6

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



Nota

Ambas barras solo tienen diámetro interior en sus primeros 6 metros, los últimos 8 metros y 4 metros respectivamente son completamente sólidos.

Elemento	$J(\text{m}^4)$	G	L(m)	GJ/L
1-2	0,01704	60GPa	6m	170400000
2-2	0,20011	60GPa	8m	150825000
3-4	0,00511	90GPa	6m	76650000
4-5	0,00636	90GPa	4m	143100000

A. Resolución

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} 170400000 & -170400000 & 0 & 0 & 0 \\ -170400000 & 170400000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150825000 & -150825000 & 0 & 0 \\ 0 & -150825000 & 150825000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 76650000 & -76650000 & 0 \\ 0 & 0 & -76650000 & 76650000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 143100000 & -143100000 \\ 0 & 0 & 0 & -143100000 & 143100000 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma K = \begin{bmatrix} 170400000 & -170400000 & 0 & 0 & 0 \\ -170400000 & 321225000 & -150825000 & 0 & 0 \\ 0 & -150825000 & 22745000 & -76650000 & 0 \\ 0 & 0 & -76650000 & 219750000 & -14310000 \\ 0 & 0 & 0 & 14310000 & -14310000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

Matriz Reducida:

$$K = \begin{bmatrix} 321225000 & -150825000 & 0 \\ -150825000 & 227475000 & -76650000 \\ 0 & -76650000 & 219750000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos Nodales:

$$\theta_1 = 0 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 4,1465 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 4,85309 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 6,24341 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_5 = 0 \text{ rad}$$

Momentos:

$$M_1 = -706,5679 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 600 \text{ Nm}$$

$$M_3 = -0.0610 \text{ Nm}$$

$$M_4 = 1000 \text{ Nm}$$

$$M_5 = 893,4329758 \text{ Nm}$$

Con MATLAB:

```
>> KT = [170400000 -170400000 0 0 0; -170400000 321225000 -150825000 0 0; 0
-150825000 227475000 -76650000 0; 0 0 -76650000 219750000 -143100000; 0 0 0
143100000 -143100000]
```

KT =

```
170400000 -170400000 0 0 0
-170400000 321225000 -150825000 0 0
0 -150825000 227475000 -76650000 0
0 0 -76650000 219750000 -143100000
0 0 0 143100000 -143100000
```

```
>> KR = [321225000 -150825000 0; -150825000 227475000 -76650000; 0 -76650000 219750000]
```

KR =

```
321225000 -150825000 0
-150825000 227475000 -76650000
0 -76650000 219750000
```

```
>> F = [600; 0; 1000]
```

F =

```
600
0
1000
```

```
>> u = inv(KR)*F

u =

1.0e-005 *

    0.4147
    0.4853
    0.6243

>> U = 10^-5*[0; 0.4147; 0.4853; 0.6243; 0]

U =

1.0e-005 *

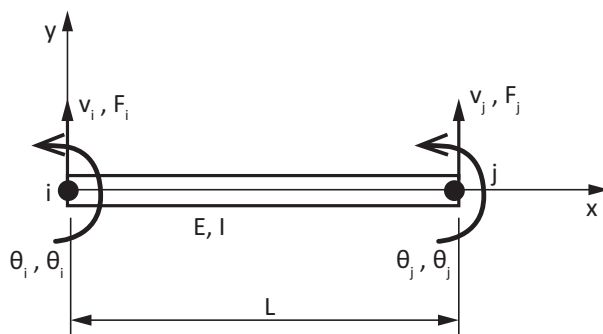
     0
    0.4147
    0.4853
    0.6243
     0

>> MT = KT*U

MT =

-706.6488
 600.1663
 -0.0610
 999.9168
 893.3733
```


7.1. ELEMENTO VIGA SIMPLE (1D)



L Longitud

I Momento de inercia del área de la sección transversal

E Módulo de elasticidad

$v = v(x)$ Deflexión (el desplazamiento lateral) del eje neutro

$\theta = \frac{dv}{dx}$ Rotación sobre el eje Z

$F = F(x)$ Fuerza cortante o de cizalladura

$M = M(x)$ Momento sobre el eje Z

7.2. TEORÍA DE LA VIGA ELEMENTAL

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

7.2.1. MÉTODO DIRECTO

Usando los resultados de la teoría de la viga elemental se puede calcular cada columna de la matriz de rigidez. La ecuación de rigidez de elemento (el nodo local: i, j o 1, 2), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

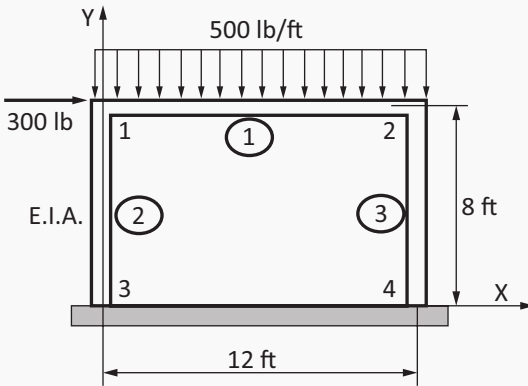
A. Para una viga 2D

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

7.2.2. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE MARCOS PLANOS

Se considera que los miembros en un marco son conectados rígidamente. Pueden transmitirse fuerzas y momentos a través de sus juntas. Se necesita el elemento viga general (las combinaciones de barra y los elementos de la viga simples) para modelar los marcos.

EJERCICIO 1



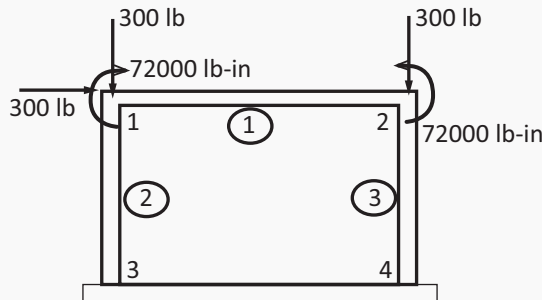
Dado que:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}, I = 65 \text{ in}^4, A = 6.8 \text{ in}^2$$

Hallar los desplazamientos y rotaciones de las dos juntas (1 y 2).

A. Resolución

Paso 1: Para este caso, se ha convertido la carga distribuida primero a sus cargas nodales equivalentes.



Paso 2: En el sistema de la coordenada local, la matriz de rigidez para un elemento 2D de la viga general es como sigue:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Tabla de conectividad de elementos

Elemento	Nodo i (1)	Nodo j (2)
1	1	2
2	3	1
3	4	2

Paso 3: Para el elemento 1, se tiene lo siguiente:

$$k_1 = k_1' = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 141.7 & 0 & 0 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.784 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 0 & 56.4 & 5417 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 141.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 0.784 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 0 & -56.4 & 5417 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Para los elementos 2 y 3, se tiene la matriz de rigidez en el sistema local.

$$k_2' = k_3' = 10^4 \times \begin{bmatrix} u_i' & v_i' & \theta_i' & u_j' & v_j' & \theta_j' \\ 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65 & 1.27 & 0 & -2.65 & 127 \\ 0 & 127 & 8125 & 0 & -127 & 4063 \\ -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.65 & -1.27 & 0 & 2.65 & -127 \\ 0 & 127 & 4063 & 0 & -127 & 8125 \end{bmatrix}$$

Donde: $i = 3, j = 1$ para el elemento 2; $i = 4, j = 2$ para el elemento 3.

Paso 5: En general, la matriz de la transformación T es así:

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$c = 0; \quad s = 1$$

Paso 6: Para ambos elementos 2 y 3, se tiene lo siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 7: Usando la relación de la transformación, se tiene que:

$$k = T^T k' T$$

Paso 8: Se obtiene la matriz de rigidez en el sistema de la coordenada global para los elementos 2 y 3.

$$k_2 = 10^4 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$k_3 = 10^4 \times \begin{matrix} & \begin{matrix} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.65 & 0 & -127 & -2.65 & 0 & -127 \\ 0 & 212.5 & 0 & 0 & -212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 8125 & 127 & 0 & 4063 \\ -2.65 & 0 & 127 & 2.65 & 0 & 127 \\ 0 & -212.5 & 0 & 0 & 212.5 & 0 \\ -127 & 0 & 4063 & 127 & 0 & 8125 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Paso 9: Ensamblando la ecuación global y notando las siguientes condiciones de contorno.

$$u_3 = v_3 = \theta_3 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{1X} = 3000 \text{ lb}$$

$$F_{2X} = 0$$

$$F_{1Y} = F_{2Y} = -3000 \text{ lb}$$

$$M_1 = -72000 \text{ lb.in}$$

$$M_2 = 72000 \text{ lb.in}$$

Paso 10: Se obtiene la ecuación condensada.

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 144.3 & 0 & 127 & -141.7 & 0 & 0 \\ 0 & 213.3 & 56.4 & 0 & -0.784 & 56.4 \\ 127 & 56.4 & 13542 & 0 & -56.4 & 2708 \\ -141.7 & 0 & 0 & 1443 & 0 & 127 \\ 0 & -0.784 & -56.4 & 0 & 213.3 & -56.4 \\ 0 & 56.4 & 2708 & 127 & -56.4 & 13542 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \\ -3000 \\ -72000 \\ 0 \\ -3000 \\ 72000 \end{Bmatrix}$$

Paso 11: Resolviendo esto, se obtiene que:

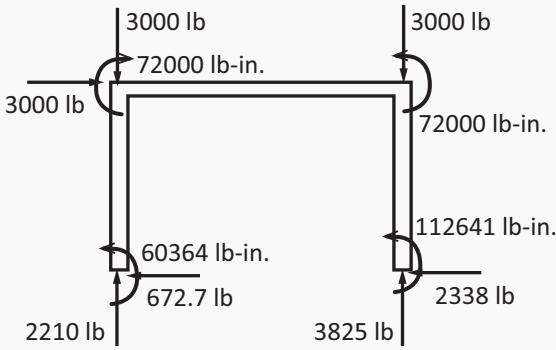
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.092 \text{ in} \\ -0.00104 \text{ in} \\ -0.00139 \text{ rad} \\ 0.0901 \text{ in} \\ -0.0018 \text{ in} \\ -3.88 \times 10^{-5} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Paso 12: Para calcular la reacción de fuerza y momentos a los dos extremos, emplee las ecuaciones para los elemento 2 y 3.

$$\begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672.7 \text{ lb} \\ 2210 \text{ lb} \\ 60364 \text{ lb in} \end{Bmatrix}$$

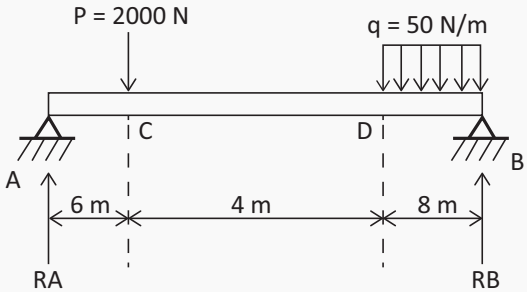
$$\begin{Bmatrix} F_{4X} \\ F_{4Y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2338 \text{ lb} \\ 3825 \text{ lb} \\ 112641 \text{ lb in} \end{Bmatrix}$$

Paso 13: Verifique los resultados. Dibuje el diagrama de libre-cuerpo del marco. Se mantiene el equilibrio con las fuerzas calculadas y momentos.



EJERCICIO 2

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las reacciones en los apoyos:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$18R_B = 400N(14m) + 2000N(6m) = 977.78N.m$$

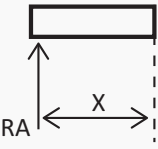
$$\Sigma M_B = 0$$

$$18R_A = 2000N(12m) + 400N(4m) = 1422.22N.m$$

Paso 2: Calcule los cortantes y flectores en las secciones de la viga.

- Segmento A-C ($0 \leq X \leq 6$)

Las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en la siguiente figura:



$$V_{AC} = 1422.22 \text{ N}$$

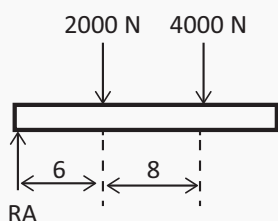
$$M_{AC} = 1422.22 X \text{ N}$$

X	M
0	0
2	2844.44
4	5688.88
6	8533.332

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 0$ hasta $x = 6 \text{ m}$.

- Segmento C – D ($10 \leq X \leq 18$)

Las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en la siguiente figura:



$$V_{DB} = -50X - 77 \text{ N}$$

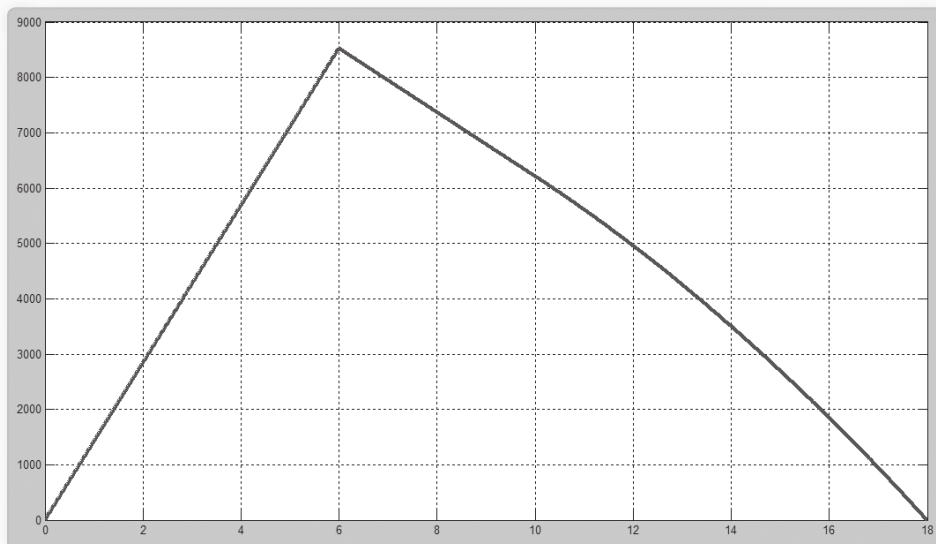
$$M_{DB} = -25X^2 - 77.7X + 9500$$

X	M
10	6222.2
12	4966.76
14	3511.22
16	1855.68
18	0.14

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 10 \text{ m}$ hasta $x = 18 \text{ m}$.

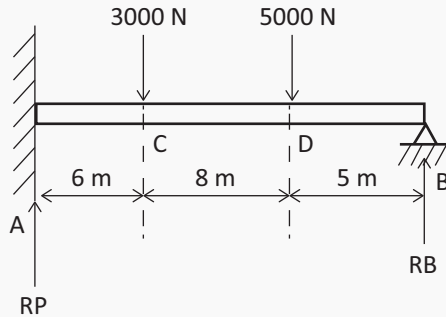
B. Resolución con MATLAB

```
>> % TRAMO A - C, DONDE X VARIA ENTRE 0 Y 6m:
>> x = 0:0.01:6;
>> M = 1422.22.*x;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO C - D, DONDE X VARIA ENTRE 6 Y 10m:
>> x = 6:0.01:10;
>> M = -577.78.*x+12000;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO D - B, DONDE X VARIA ENTRE 10 Y 18m:
>> x = 10:0.01:18;
>> M = -25.*x.^2-77.7.*x+9500;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold off
```



EJERCICIO 3

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las reacciones en los apoyos.

Fuerza: 4526.607 N

Momento: 22005.54 N*m (si el valor es positivo, la fuerza se da en sentido contrario a las agujas del reloj).

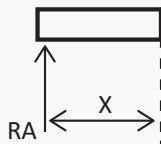
$$R_B = 3473.39 \text{ N}$$

$$\text{Carga total} = 8000 \text{ N}$$

Paso 2: Calcule los cortantes y flectores en las secciones de las vigas:

- Segmento A–C ($0 \leq X \leq 6$)

Las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en figura siguiente:



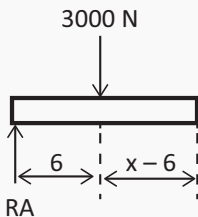
$$V_{AC} = 4526.6 \text{ N}$$

$$M_{AC} = 4526.60 X - 22005.54 \text{ N}$$

X	M
0	-2205.54
2	-12952.34
4	-3899.14
6	5154

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 0$ hasta $x = 6 \text{ m}$.

- Segmento C–D ($6 \leq X \leq 14$)

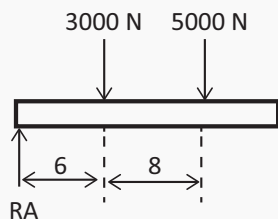


$$V_{CD} = 4526.60 - 3000 = 1526.6 \text{ N}$$

$$M_{CD} = 1526.60 X - 4005.54$$

X	M
6	5154.06
10	11260.46
12	14313.66
14	17366.86

- Segmento D-B ($14 \leq X \leq 19$)



$$V_{DB} = -3473.39 \text{ N}$$

$$M_{DB} = -3473.39X + 65994.46 \text{ N}$$

X	M
14	17367
16	10420.22
18	3473.44
19	0.05

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 14\text{m}$ hasta $x = 19\text{m}$.

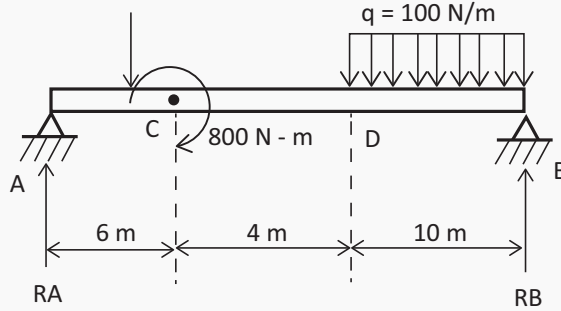
B. Resolución con MATLAB

```
>> % TRAMO A - C, DONDE X VARIA DE 0 A 6m:
>> x = 0:0.01:6;
>> M = 4526.60.*x-22004.54;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO C - D, DONDE X VARIA DE 6 A 14m:
>> x = 6:0.01:14;
>> M = 1526.60.*x-4005.54;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO D - B, DONDE X VARIA DE 14 A 19m:
>> x = 14:0.01:18;
>> M = -3473.39.*x+65994.46;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold off
```



EJERCICIO 4

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las reacciones en los apoyos:

Apoyo A = 290 N

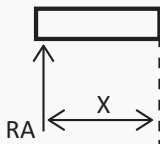
Apoyo B = 710 N

Carga total = 1000 N

Paso 2: Calcule los cortantes y flectores en las secciones de las vigas:

- Segmento A–C ($0 \leq X \leq 6$)

Las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en la figura siguiente:



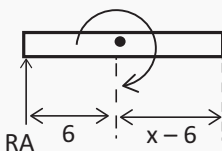
$V_{AC} = 290 \text{ N}$

$M_{AC} = 290 X \text{ N}$

X	M
0	0
2	580
4	1160
6	1740

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 0$ hasta $x = 6 \text{ m}$.

- Segmento C–D ($6 \leq X \leq 10$)

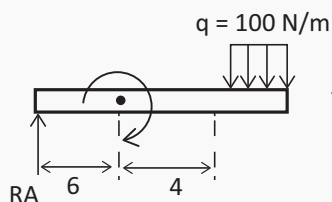


$V_{CD} = 290 \text{ N}$

$M_{CD} = 290X - 800$

X	M
6	940
8	1520
10	2100

- Segmento D-B ($10 \leq X \leq 20$)



$$V_{DB} = -100X + 1290 \text{ N}$$

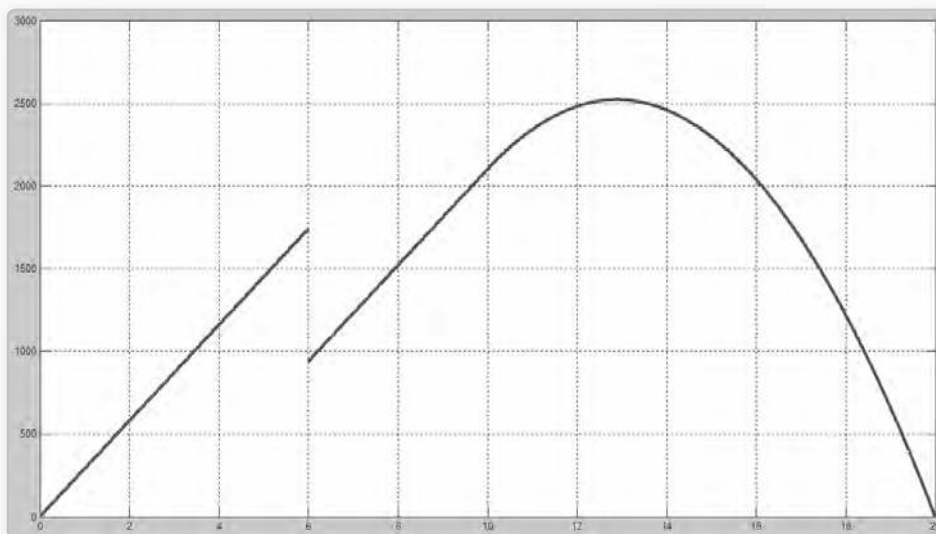
$$M_{DB} = -50X^2 + 1290X - 5800 \text{ N}$$

X	M
10	2100
12	2480
14	2460
16	2040
18	1220
20	0

Estas expresiones son válidas solamente desde $x=10\text{m}$ hasta $x=20\text{m}$.

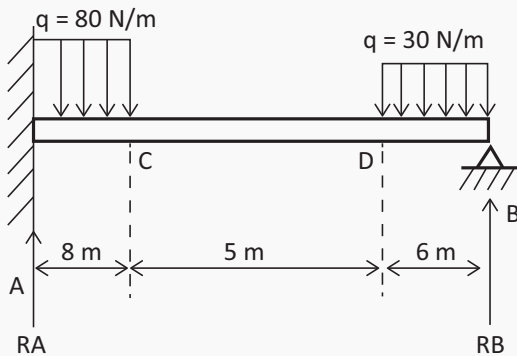
B. Resolución con MATLAB

```
>> % TRAMO A - C, DONDE X VARIA DE 0 A 6m:
>> x = 0:0.01:6;
>> M = 290.*x;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO C - D, DONDE X VARIA DE 6 A 10m:
>> x = 6:0.01:10;
>> M = 290.*x-800;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO D - B, DONDE X VARIA DE 10 A 20m:
>> x = 10:0.01:20;
>> M = -50.*x.^2+1290.*x-5800;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold off
```



EJERCICIO 5

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



A. Resolución

Paso 1: Calcule las reacciones en los apoyos:

Fuerza = 631.16 N

Momento = 1852.10 N*m

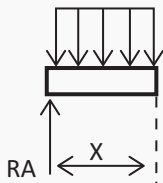
Apoyo A = 188.84

Carga total = 820 N

Paso 2: Calcule los cortantes y flectores en las secciones de las vigas.

- Segmento A-C ($0 \leq X \leq 8$)

Las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en la figura siguiente:



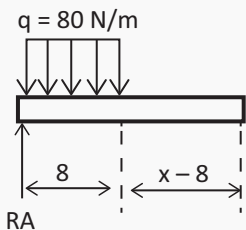
$$V_{AC} = -80X + 631.16 \text{ N}$$

$$M_{AC} = 631.16X - 1852.10 \text{ N}$$

X	M
0	-1852.1
2	-589.78
4	672.54
6	1934.86
8	3197.18

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 0$ hasta $x = 8$ m.

- Segmento C-D ($8 \leq X \leq 13$)



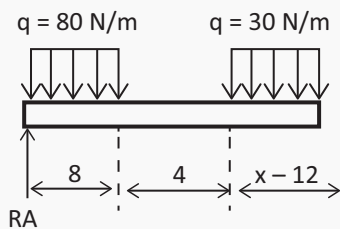
$$V_{CD} = -8.8365$$

$$M_{CD} = -8.84X + 707.89$$

X	M
8	637.17
10	619.49
12	601.81
13	592.97

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 8$ m hasta $x = 13$ m.

- Segmento D-B ($13 \leq X \leq 19$)



$$V_{DB} = -30X + 381.16$$

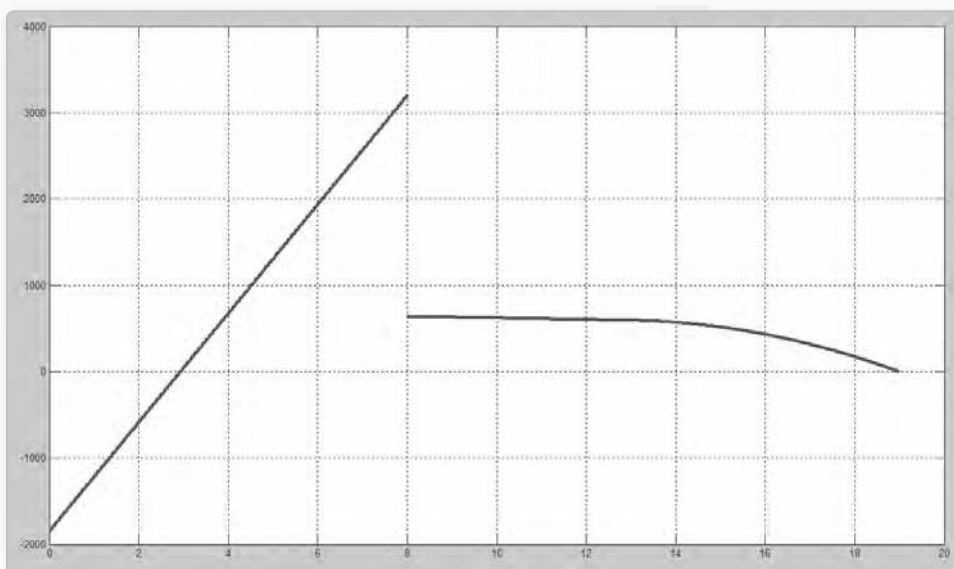
$$M_{DB} = -15x^2 + 381.16x - 1827.10$$

X	M
13	592.98
15	515.3
17	317.62
19	-0.06

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 13$ m hasta $x = 19$ m.

B. Resolución con MATLAB

```
>> % TRAMO A - C, DONDE X VARIA DE 0 A 8m:
>> x = 0:0.01:8;
>> M = 631.16.*x-1852.10;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO C - D, DONDE X VARIA DE 8 A 13m:
>> x = 6:0.01:13;
>> M = -8.84.*x+707.89;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold on
>> % TRAMO D - B, DONDE X VARIA DE 13 A 19m:
>> x = 13:0.01:19;
>> M = -15.*x.^2+381.16.*x-1827.10;
>> plot(x,M)
>> grid on
>> hold off
```




```
>> k2 = 15000 * [0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 12 12 -12 12 0; 0 0 12 16 -12
8 0 0; 0 0 -12 -12 12 -12 0; 0 0 12 8 -12 16 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0]
k2 =
```

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	180000	180000	-180000	180000
0	0	180000	240000	-180000	120000
0	0	-180000	-180000	180000	-180000
0	0	180000	120000	-180000	240000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

```
>> k3 = 1875 * [0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 12 24 -12 24; 0 0 0 0 24 64 -24 32; 0 0 0 0 -12 -24 12 -24; 0 0 0 0 24 32 -24 64]
k3 =
```

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	22500	45000
0	0	0	0	45000	120000
0	0	0	0	22500	45000
0	0	0	0	45000	60000

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
-22500	45000
-45000	60000
22500	-45000
-45000	120000

```
>> KT= k1 + k2 + k3
```

KT =

Columns 1 through 6

1440000	720000	-1440000	720000	0	0
720000	480000	-720000	240000	0	0
-1440000	-720000	1620000	-540000	-180000	180000
720000	240000	-540000	720000	-180000	120000
0	0	-180000	-180000	202500	-135000
0	0	180000	120000	-135000	360000
0	0	0	0	-22500	-45000
0	0	0	0	45000	60000

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
-22500	45000
-45000	60000
22500	-45000
-45000	120000

La matriz ensamblada estaría dada por:

$$\begin{bmatrix} 1440000 & 720000 & -1440000 & 720000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 720000 & 480000 & -720000 & 240000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1440000 & -720000 & 1620000 & -540000 & -180000 & 180000 & 0 & 0 \\ 720000 & 240000 & -540000 & 720000 & -180000 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -180000 & -180000 & 202500 & -135000 & -22500 & 45000 \\ 0 & 0 & 180000 & 120000 & -135000 & 360000 & -45000 & 60000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22500 & -45000 & 22500 & -45000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45000 & 60000 & -45000 & 12000 \end{bmatrix}$$

Elimine filas y columnas.

$$\begin{bmatrix} 1440000 & 720000 & -1440000 & 720000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 720000 & 480000 & -720000 & 240000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1440000 & -720000 & 1620000 & -540000 & -180000 & 180000 & 0 & 0 \\ 720000 & 240000 & -540000 & 720000 & -180000 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -180000 & -180000 & 202500 & -135000 & -22500 & 45000 \\ 0 & 0 & 180000 & 120000 & -135000 & 360000 & -45000 & 60000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22500 & -45000 & 22500 & -45000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45000 & 60000 & -45000 & 12000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} 1620000 & -540000 & -180000 & 180000 & 0 \\ -540000 & 720000 & -180000 & 120000 & 0 \\ -180000 & -180000 & 202500 & -135000 & 45000 \\ 180000 & 120000 & -135000 & 360000 & 60000 \\ 0 & 0 & 45000 & 60000 & 12000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los desplazamientos

```
>> Y = [1620000 -540000 -180000 180000 0; -540000 720000 -180000 120000 0; -180000  
-180000 202500 -135000 45000; 180000 120000 -135000 360000 60000; 0 0 45000 60000  
120000]
```

Y =

1620000	-540000	-180000	180000	0
-540000	720000	-180000	120000	0
-180000	-180000	202500	-135000	45000
180000	120000	-135000	360000	60000
0	0	45000	60000	120000

```
>> F = [400; 0; 0; 20; 0]
F =
    400
     0
     0
    20
     0
>> U = inv(Y) * F
U =
    0.0008
    0.0010
    0.0019
    0.0002
   -0.0008
```

Desplazamientos

$v_1 = 0 \text{ m}$
 $\theta_1 = 0 \text{ rad}$
 $v_2 = 0.0008 \text{ m}$
 $\theta_2 = 0.0010 \text{ rad}$
 $v_3 = 0.0019 \text{ m}$
 $\theta_3 = 0.0002 \text{ rad}$
 $v_4 = 0 \text{ m}$
 $\theta_4 = -0.0008 \text{ rad}$

Cálculo de las fuerzas

```
>> KT = [1440000 720000 -1440000 720000 0 0 0 0; 720000 480000 -720000 240000 0 0 0 0;
-1440000 -720000 1620000 -540000 -180000 180000 0 0; 720000 240000 -540000
720000 -180000 120000 0 0; 0 0 -180000 -180000 202500 -135000 -22500 45000; 0 0
180000 120000 -135000 360000 -45000 60000; 0 0 0 0 -22500 -45000 22500 -45000; 0
0 0 45000 60000 -45000 12000]
KT =
Columns 1 through 6
    1440000    720000   -1440000    720000         0         0
    720000    480000   -720000    240000         0         0
   -1440000   -720000    1620000   -540000   -180000    180000
    720000    240000   -540000    720000   -180000    120000
         0         0   -180000   -180000    202500   -135000
         0         0    180000    120000   -135000    360000
         0         0         0         0    -22500   -45000
         0         0         0         0    45000    60000
Columns 7 through 8
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
   -22500    45000
  -45000    60000
   22500   -45000
  -45000    12000
```

```
>> U = [0; 0; 0.0008; 0.0010; 0.0019; 0.0002; 0; -0.0008]
```

```
U =
```

```
0
0
0.0008
0.0010
0.0019
0.0002
0
-0.0008
```

```
>> F = KT*U
```

```
F =
```

```
-432.0000
-336.0000
450.0000
-30.0000
-2.2500
31.5000
-15.7500
87.9000
```

Fuerzas

$$F_{1y} = -432 \text{ N}$$

$$M_1 = -336 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = 450 \text{ N}$$

$$M_2 = -30 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -2.25 \text{ N}$$

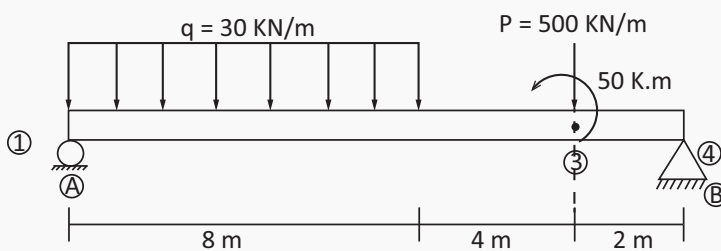
$$M_3 = 31.5 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = -15.75 \text{ N}$$

$$M_4 = 87.9 \text{ N.m}$$

EJERCICIO 7

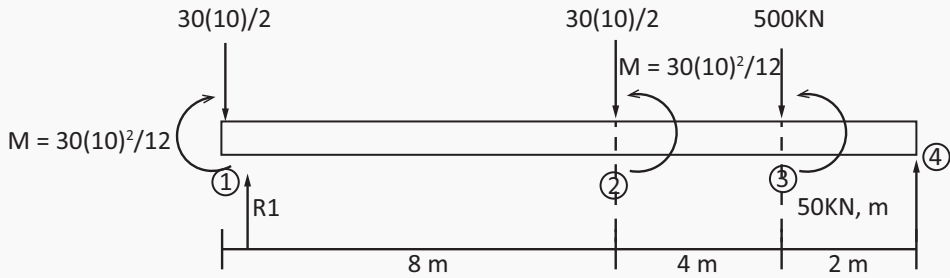
Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



$$E = 300 \text{ GPa}$$

$$A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

A. Resolución

$$K1 = \frac{(4 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(300 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(10 \text{ m})^3} = 120 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K2 = \frac{(4 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(300 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(4 \text{ m})^3} = 1875 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K3 = \frac{(4 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(300 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(2 \text{ m})^3} = 15000 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1 = 120 * [12 60 -12 60 0 0 0 0; 60 400 -60 200 0 0 0 0; -12 -60 12 -60 0 0
0 0; 60 200 -60 400 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0]
```

```
k1 =
```

```
Columns 1 through 6
```

1440	7200	-1440	7200	0	0
7200	48000	-7200	24000	0	0
-1440	-7200	1440	-7200	0	0
7200	24000	-7200	48000	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

```
Columns 7 through 8
```

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0

```
>> k2 = 1875 * [0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 12 24 -12 24 0 0; 0 0 24 64
-24 32 0 0; 0 0 -12 -24 12 -24 0 0; 0 0 32 32 -24 64 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0]
```

```

k2 =
Columns 1 through 6
    0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0
    0         0        22500        45000       -22500        45000
    0         0        45000       120000       -45000        60000
    0         0       -22500       -45000        22500       -45000
    0         0        60000        60000       -45000       120000
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0

Columns 7 through 8
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0

>> k3 = 15000 * [0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 12 12 -12 12; 0 0 0 0 12 16 -12 8; 0 0 0 0 -12 -12 12 -12; 0 0 0 0 12 8 -12 16]
k3 =
Columns 1 through 6
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0         0         0
    0         0         0         0        180000       180000
    0         0         0         0        180000       240000
    0         0         0         0       -180000      -180000
    0         0         0         0        180000       120000

Columns 7 through 8
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
    -180000    180000
    -180000    120000
    180000     -180000
    -180000    240000

>> K = k1 + k2 + k3
K =
Columns 1 through 6
    1440     7200     -1440     7200         0         0
    7200     48000    -7200     24000         0         0
   -1440    -7200     23940     37800    -22500     45000
    7200     24000     37800    168000    -45000     60000
         0         0    -22500    -45000     202500    135000
         0         0     60000     60000     135000    360000
         0         0         0         0    -180000    -180000
         0         0         0         0     180000     120000

Columns 7 through 8
    0         0
    0         0
    0         0
    0         0
   -180000    180000
   -180000    120000
    180000    -180000
   -180000    240000

```

Se obtiene la siguiente matriz ensamblada:

$$\begin{bmatrix} 1440 & 7200 & 1440 & 7200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7200 & 48000 & -7200 & 24000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1440 & -7200 & 23940 & 37800 & -22500 & 45000 & 0 & 0 \\ 7200 & 24000 & 37800 & 168000 & -45000 & 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22500 & -45000 & 202500 & 135000 & -180000 & 180000 \\ 0 & 0 & 60000 & 60000 & 135000 & 360000 & -180000 & 120000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180000 & 180000 & 180000 & 180000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180000 & 120000 & -180000 & 240000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Elimine filas y columnas:

$$\begin{bmatrix} 1440 & 7200 & 1440 & 7200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7200 & 48000 & -7200 & 24000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1440 & -7200 & 23940 & 37800 & -22500 & 45000 & 0 & 0 \\ 7200 & 24000 & 37800 & 168000 & -45000 & 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22500 & -45000 & 202500 & 135000 & -180000 & 180000 \\ 0 & 0 & 60000 & 60000 & 135000 & 360000 & -180000 & 120000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180000 & 180000 & 180000 & 180000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180000 & 120000 & -180000 & 240000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} 48000 & -7200 & 24000 & 0 & 0 & 0 \\ -7200 & 23940 & 37800 & -22500 & 45000 & 0 \\ 24000 & 37800 & 168000 & -45000 & 60000 & 0 \\ 0 & -22500 & -45000 & 202500 & 135000 & 180000 \\ 0 & 60000 & 60000 & 135000 & 360000 & 120000 \\ 0 & 0 & 0 & 180000 & 120000 & 240000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los desplazamientos

```
>> Y = [48000 -7200 24000 0 0 0; -7200 23940 37800 -22500 45000 0; 24000 37800 168000 -45000 60000 0; 0 -22500 -45000 202500 135000 180000; 0 60000 60000 135000 360000 120000; 0 0 0 180000 120000 240000]
```

Y =

48000	-7200	24000	0	0	0
-7200	23940	37800	-22500	45000	0
24000	37800	168000	-45000	60000	0
0	-22500	-45000	202500	135000	180000
0	60000	60000	135000	360000	120000
0	0	0	180000	120000	240000

```
>> F = [-250; -150; 250; -500; 50; 0]
F =
-250
-150
250
-500
50
0
>> U = inv(Y) * F
U =
0.0440
0.3097
-0.0054
0.1474
-0.0828
-0.0692
```

Desplazamientos

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0.0440 \text{ rad} \\ v_2 &= 0.3097 \text{ m} \\ \theta_2 &= -0.0054 \text{ rad} \\ v_3 &= 0.1474 \text{ m} \\ \theta_3 &= -0.0828 \text{ rad} \\ \theta_4 &= -0.0692 \text{ rad}\end{aligned}$$

Cálculo de fuerzas

```
>> K = [1440 7200 1440 7200 0 0 0 0; 7200 48000 -7200 24000 0 0 0 0; -1440 -7200
23940 37800 -22500 45000 0 0; 7200 24000 37800 168000 -45000 60000 0 0; -22500
-45000 202500 135000 -180000 180000; 0 0 60000 60000 135000 360000 -180000 120000;
0 0 0 0 180000 180000 180000 180000; 0 0 0 0 180000 120000 -180000 240000]
```

K =							
1440	7200	1440	7200	0	0	0	0
7200	48000	-7200	24000	0	0	0	0
-1440	-7200	23940	37800	-22500	45000	0	0
7200	24000	37800	168000	-45000	60000	0	0
0	0	-22500	-45000	202500	135000	0	0
0	0	60000	60000	135000	360000	0	0
0	0	0	0	180000	180000	0	0
0	0	0	0	180000	120000	-180000	240000

```
>> U = [0; 0.0440; 0.3097; -0.0054; 0.1474; -0.0828; 0; -0.0692]
U =
0
0.0440
0.3097
-0.0054
0.1474
-0.0828
0
-0.0692
```

```
>> F = K*U
```

```
F =
```

```
723.8880
-247.4400
-149.2020
254.4600
-510.7500
45.0000
-828.0000
-12.0000
```

Fuerzas

$$F_{1y} = 723.8880 \text{ N}$$

$$M_1 = -247.4400 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -149.2020 \text{ N}$$

$$M_2 = 254.4600 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -510.7500 \text{ N}$$

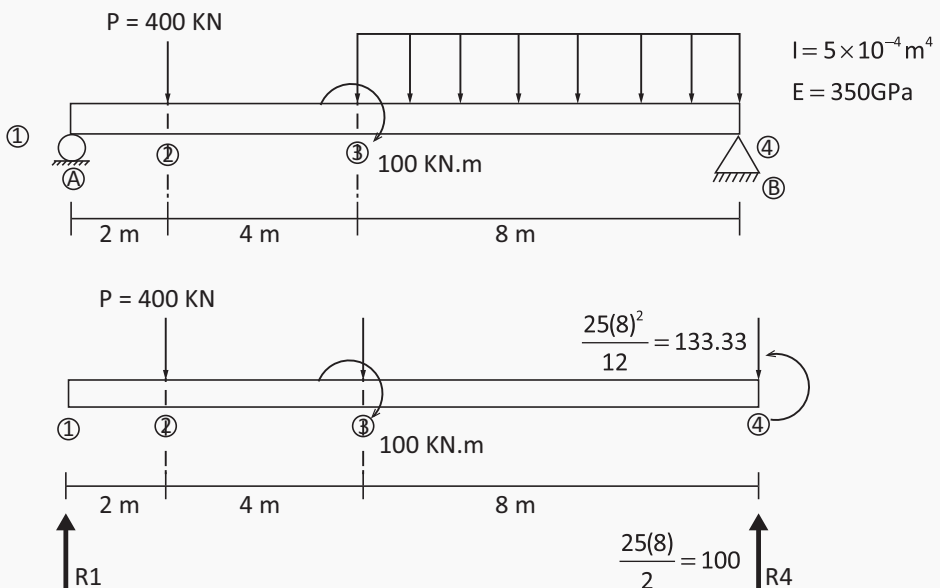
$$M_3 = 45 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = -828 \text{ N}$$

$$M_4 = -12 \text{ N.m}$$

EJERCICIO 8

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.



A. Resolución

$$K1 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(350 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(2 \text{ m})^3} = 21875 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K2 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(350 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(4 \text{ m})^3} = 2734.375 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$K3 = \frac{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^4) \left(350 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)}{(8 \text{ m})^3} = 341.797 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1=21875*[12 12 -12 12 0 0 0 0; 12 16 -12 8 0 0 0 0; -12 -12 12 -12 0 0 0 0; -12
8 -12 16 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

k1 =

262500	262500	-262500	262500	0	0	0	0
262500	350000	-262500	175000	0	0	0	0
-262500	-262500	262500	-262500	0	0	0	0
-262500	175000	-262500	350000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>> k2= 2734.375* [ 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 12 24 -12 24 0 0; 0 0 24
64 24 32 0 0; 0 0 -12 -24 12 -24 0 0; 0 0 -24 32 -24 32 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0]
```

k2 =

1.0e+005 *

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.3281	0.6563	-0.3281	0.6563	0	0
0	0	0.6563	1.7500	0.6563	0.8750	0	0
0	0	-0.3281	-0.6563	0.3281	-0.6563	0	0
0	0	-0.6563	0.8750	-0.6563	0.8750	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>> k3=341.797*[0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 12 48 -12 48; 0 0 0 48 256 -48 128; 0 0 0 0 -12 -48 12 -48; 0 0 0 0 48 128
-48 256]
```

k3 =

1.0e+004 *

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.4102	1.6406	-0.4102	1.6406
0	0	0	0	1.6406	8.7500	-1.6406	4.3750
0	0	0	0	-0.4102	-1.6406	0.4102	-1.6406
0	0	0	0	1.6406	4.3750	-1.6406	8.7500

>> KT = k1+k2+k3

KT =

1.0e+005 *

2.6250	2.6250	-2.6250	2.6250	0	0	0	0
2.6250	3.5000	-2.6250	1.7500	0	0	0	0
-2.6250	-2.6250	2.9531	-1.9688	-0.3281	0.6563	0	0
-2.6250	1.7500	-1.9688	5.2500	0.6563	0.8750	0	0
0	0	-0.3281	-0.6563	0.3691	-0.4922	-0.0410	0.1641
0	0	-0.6563	0.8750	-0.4922	1.7500	-0.1641	0.4375
0	0	0	0	-0.0410	-0.1641	0.0410	-0.1641
0	0	0	0	0.1641	0.4375	-0.1641	0.8750

Se obtiene la siguiente matriz ensamblada:

$$10^5 \times \begin{bmatrix} 2.6250 & 2.6250 & -2.6250 & 2.6250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.6250 & 3.5000 & -2.6250 & 1.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.6250 & -2.6250 & 2.9531 & -1.9688 & -0.3281 & 0.6563 & 0 & 0 \\ -2.6250 & 1.7500 & -1.9688 & 5.2500 & 0.6563 & 0.8750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3281 & -0.6563 & 0.3691 & -0.4922 & -0.0410 & 0.1641 \\ 0 & 0 & -0.6563 & 0.8750 & -0.4922 & 1.7500 & -0.1641 & 0.4375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0410 & -0.1641 & 0.0410 & -0.1641 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1641 & 0.4375 & -0.1641 & 0.8750 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Elimine filas y columnas.

$$10^5 \times \begin{bmatrix} -2.6250 & -2.6250 & -2.6250 & 2.6250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.6250 & 3.5000 & -2.6250 & 1.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.6250 & -2.6250 & 2.9531 & -1.9688 & -0.3281 & 0.6563 & 0 & 0 \\ -2.6250 & 1.7500 & -1.9688 & 5.2500 & 0.6563 & 0.8750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3281 & -0.6563 & 0.3691 & -0.4922 & -0.0410 & 0.1641 \\ 0 & 0 & -0.6563 & 0.8750 & -0.4922 & 1.7500 & -0.1641 & 0.4375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0410 & -0.1641 & 0.0410 & -0.1641 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1641 & 0.4375 & -0.1641 & 0.8750 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} 3.5 \times 10^5 & -2.6250 \times 10^5 & 1.75 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ -2.6250 \times 10^5 & 2.9531 \times 10^5 & -1.9688 \times 10^5 & -0.3281 \times 10^5 & 0.6563 \times 10^5 & 0 \\ 1.75 \times 10^5 & -1.9688 \times 10^5 & 5.25 \times 10^5 & 0.6563 \times 10^5 & 0.8750 \times 10^5 & 0 \\ 0 & -0.3281 \times 10^5 & -0.6563 \times 10^5 & 0.3691 \times 10^5 & -0.4922 \times 10^5 & 0.1641 \times 10^5 \\ 0 & -0.6563 \times 10^5 & 0.8750 \times 10^5 & -0.4922 \times 10^5 & 1.75 \times 10^5 & 0.4375 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0.1641 \times 10^5 & 0.1641 \times 10^5 & 0.4375 \times 10^5 & 0.8750 \times 10^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los desplazamientos

```
>> Y = [3.5*10^5 -2.6250*10^5 1.75*10^5 0 0 0; -2.6250*10^5 2.9531*10^5 -1.9688*10^5  
-0.3281*10^5 0.6563*10^5 0; 1.75*10^5 -1.9688*10^5 5.25*10^5 0.6563*10^5  
0.8750*10^5 0; 0 -0.3281*10^5 -0.6563*10^5 0.3691*10^5 -0.4922*10^5 0.1641*10^5;  
0 -0.6563*10^5 0.8750*10^5 -0.4922*10^5 1.75*10^5 0.4375*10^5; 0 0 0.1641*10^5  
0.1641*10^5 0.4375*10^5 0.8750*10^5]
```

Y =

350000	-262500	175000	0	0	0
-262500	295310	-196880	-32810	65630	0
175000	-196880	525000	65630	87500	0
0	-32810	-65630	36910	-49220	16410
0	-65630	87500	-49220	175000	43750
0	0	16410	16410	43750	87500

```
>> F=[0; -400; 0; -100;-100; -100; 133.33]
```

```
>> B= [0; -400; 0; -100; -100; 133.33]
```

B =

0
-400.0000
0
-100.0000
-100.0000
133.3300

```
>> A = inv(Y)*B
```

A =

-0.0022
-0.0010
0.0029
-0.0109
-0.0071
0.0066

Desplazamientos

$$\theta_1 = -0.0022 \text{ rad}$$

$$v_2 = -0.0010 \text{ m}$$

$$\theta_2 = 0.0029 \text{ rad}$$

$$v_3 = -0.0109 \text{ m}$$

$$\theta_3 = -0.0071 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0.0066 \text{ rad}$$

Cálculo de las fuerzas

```
>> K = [2.6250*10^5 2.6250*10^5 -2.6250*10^5 2.6250*10^5 0 0 0 0; 2.6250*10^5
3.5*10^5 -2.6250*10^5 1.75*10^5 0 0 0 0; -2.6250*10^5 -2.6250*10^5 2.9531*10^5
-1.9688*10^5 -0.381*10^5 0.6563*10^5 0 0; -2.6250*10^5 1.75*10^5 -1.9688*10^5
5.25*10^5 0.6563*10^5 0.8750*10^5 0 0; 0 0 -0.3281*10^5 -0.6563*10^5 0.3961*10^5
-0.4922*10^5 -0.0410*10^5 0.4161*10^5; 0 0 -0.6563*10^5 0.8750*10^5 -0.4922*10^5
1.75*10^5 -0.1641*10^5 0.4375*10^5; 0 0 0 -0.0410*10^5 -0.1641*10^5 0.0410*10^5
-0.1641*10^5; 0 0 0 0.1641*10^5 0.4375*10^5 -0.1641*10^5 0.8750*10^5]
```

K =

262500	262500	-262500	262500	0	0	0	0
262500	350000	-262500	175000	0	0	0	0
-262500	-262500	295310	-196880	-32810	65630	0	0
-262500	175000	-196880	525000	65630	87500	0	0
0	0	-32810	-65630	39610	-49220	-4100	14610
0	0	-65630	87500	-49220	175000	-16410	43750
0	0	0	0	-4100	-16410	4100	-16410
0	0	0	0	16410	43750	-16410	87500

```
>> U = [0; -0.0022; -0.0010; 0.0029; -0.0109; -0.0071; 0; 0.0066]
```

U =

```
0
-0.0022
-0.0010
0.0029
-0.0109
-0.0071
0
0.0066
```

```
>> F = K*U
```

F =

```
446.2500
-0.0000
-397.1060
-2.2370
-143.3780
-97.8720
52.8950
88.0060
```

Fuerzas

$$F_{1y} = 446.25 \text{ N}$$

$$M_1 = 0 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -397.1060 \text{ N}$$

$$M_2 = -2.2370 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -143.3780 \text{ N}$$

$$M_3 = -97.8720 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = 52.8950 \text{ N}$$

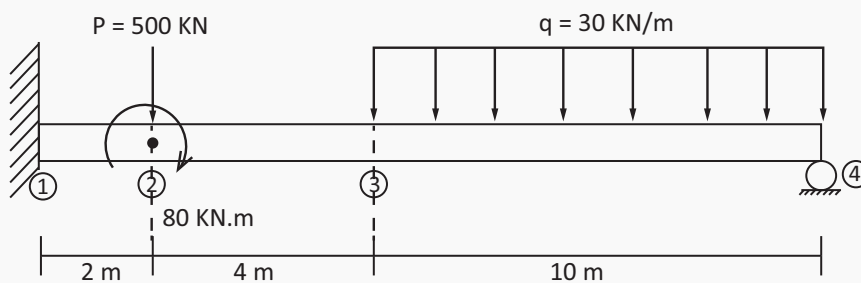
$$M_4 = 88.0060 \text{ N.m}$$

EJERCICIO 9

Escribir las ecuaciones de momentos flexionantes y fuerzas cortantes de la viga cargada que se muestra en la figura y trazar los diagramas correspondientes.

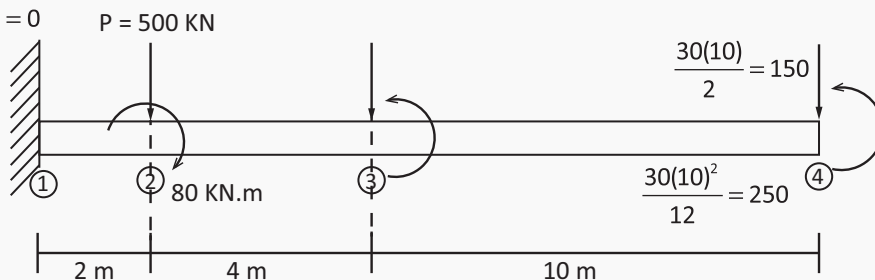
$$I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 280 \text{ GPa}$$



$$V_1 = 0$$

$$\theta = 0$$



A. Resolución

$$K_1 = \frac{(280 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{2^3} = 14000 \text{ KN/m}$$

$$K_2 = \frac{(280 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{2^3} = 1750 \text{ KN/m}$$

$$V_1 = 0$$

$$\theta = 0$$

$$K_3 = \frac{(280 \times 10^9)(4 \times 10^{-4})}{10^3} = 112 \text{ KN/m}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> k1= 14000 * [ 12 12 -12 12 0 0 0 0 ; 12 16 -12 8 0 0 0 0 ; -12 -12 12 -12 0 0
0 0 ; 12 8 -12 16 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 ]
```

```
k1 =
```

168000	168000	-168000	168000	0	0	0	0
168000	224000	-168000	112000	0	0	0	0
-168000	-168000	168000	-168000	0	0	0	0
168000	112000	-168000	224000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>> k2= 1750 * [ 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 12 24 -12 24 0 0 ; 0 0 24
64 -24 32 0 0 ; 0 0 -12 -24 12 -24 0 0 ; 0 0 24 32 -24 64 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 ]
```

```
k2 =
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	21000	42000	-21000	42000	0	0
0	0	42000	112000	-42000	56000	0	0
0	0	-21000	-42000	21000	-42000	0	0
0	0	42000	56000	-42000	112000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
>> k3= 112 * [ 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0 ; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 ; 0 0 0 0 12 60 -12 60 ; 0 0 0 0 60 400 -60 200 ; 0 0 0 0 -12 -60 12 -60 ; 0 0 0
0 60 200 -60 400 ]
```

```
k3 =
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1344	6720	-1344	6720
0	0	0	0	6720	44800	-6720	22400
0	0	0	0	-1344	-6720	1344	-6720
0	0	0	0	6720	22400	-6720	44800

>> KT = k1+k2+k3

KT =

168000	168000	-168000	168000	0	0	0	0
168000	224000	-168000	112000	0	0	0	0
-168000	-168000	189000	-126000	-21000	42000	0	0
168000	112000	-126000	336000	-42000	56000	0	0
0	0	-21000	-42000	22344	-35280	-1344	6720
0	0	42000	56000	-35280	156800	-6720	22400
0	0	0	0	-1344	-6720	1344	-6720
0	0	0	0	6720	22400	-6720	44800

Se obtiene la siguiente matriz ensamblada:

$$\begin{bmatrix} 168000 & 168000 & -168000 & 168000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 168000 & 224000 & -168000 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168000 & -168000 & 189000 & -126000 & -21000 & 42000 & 0 & 0 \\ 168000 & 112000 & -126000 & 336000 & -42000 & 56000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21000 & -42000 & 22344 & -35280 & -1344 & 6720 \\ 0 & 0 & 42000 & 56000 & -35280 & 156800 & -6720 & 22400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1344 & -6720 & 1344 & -6720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6720 & 22400 & -6720 & 44800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Elimine filas y columnas:

$$\begin{bmatrix} 168000 & 168000 & -168000 & 168000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 168000 & 224000 & -168000 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168000 & -168000 & 189000 & -126000 & -21000 & 42000 & 0 & 0 \\ 168000 & 112000 & -126000 & 336000 & -42000 & 56000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21000 & -42000 & 22344 & -35280 & -1344 & 6720 \\ 0 & 0 & 42000 & 56000 & -35280 & 156800 & -6720 & 22400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1344 & -6720 & 1344 & -6720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6720 & 22400 & -6720 & 44800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} 189000 & -126000 & -21000 & 42000 & 0 \\ -126000 & 336000 & -42000 & 56000 & 0 \\ -21000 & -42000 & 22344 & -35280 & 6720 \\ 42000 & 56000 & -35280 & 156800 & 22400 \\ 0 & 0 & 6720 & 22400 & 44800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB**Cálculo de los desplazamientos**

```
>> Y = [189000 -126000 -21000 42000 0; -126000 336000 -42000 56000 0; -21000 -42000
22344 -35280 6720; 42000 56000 -35280 156800 22400; 0 0 6720 22400 44800]
Y =
    189000    -126000    -21000     42000         0
   -126000    336000   -42000     56000         0
   -21000    -42000     22344    -35280        6720
    42000     56000    -35280    156800       22400
         0         0        6720     22400       44800

>> f = [-500; -30; -150; 250; 250]
F =
   -500
    -30
   -150
    250
    250

>> U = inv(Y)*F
U =
   -0.0173
   -0.0134
   -0.0622
   -0.0055
    0.0177
```

Desplazamientos

$$v_2 = -0.0173 \text{ m}$$

$$\theta_2 = -0.0134 \text{ rad}$$

$$v_3 = -0.0622 \text{ m}$$

$$\theta_3 = -0.0055 \text{ rad}$$

$$\theta_4 = 0.0177 \text{ rad}$$

Cálculo de las fuerzas

```
>> K = [168000 168000 -168000 168000 0 0 0 0; 168000 224000 -168000 112000 0 0 0
0; -168000 -168000 189000 -126000 -21000 42000 0 0; 168000 112000 -126000 336000
-42000 56000 0 0; 0 0 -21000 -42000 22344 -35280 -1344 6720; 0 0 42000 56000 -35280
156800 -6720 22400; 0 0 0 0 -1344 -6720 1344 -6720; 0 0 0 0 6720 22400 -6720 44800]
K =

Columns 1 through 6
    168000    168000   -168000    168000         0         0
    168000    224000   -168000    112000         0         0
   -168000   -168000    189000   -126000   -21000     42000
    168000    112000   -126000    336000   -42000     56000
         0         0    -21000   -42000    22344    -35280
         0         0     42000     56000   -35280    156800
         0         0         0         0    -1344    -6720
         0         0         0         0     6720     22400
```



```

Columns 7 through 8
      0      0
      0      0
      0      0
      0      0
     -1344    6720
     -6720   22400
      1344   -6720
     -6720   44800

>> U = [0; 0; -0.0134; -0.0134; -0.0622; -0.0055; 0; 0.0177]
U =
      0
      0
    -0.0134
    -0.0134
    -0.0622
    -0.0055
      0
     0.0177

>> F = [K*U]
F =
      0
    750.4000
    231.0000
   -509.6000
  -232.6128
    415.2930
     1.6128
    251.7760

```

Fuerzas

$$F_{1y} = 0 \text{ N}$$

$$M_1 = 750.40 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = 231 \text{ N}$$

$$M_2 = -509.60 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -232.6128 \text{ N}$$

$$M_3 = 415.2960 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = 1.6128 \text{ N}$$

$$M_4 = 251.7760 \text{ N.m}$$

$$K_{34} = \frac{250 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{6^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 36 & -12 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 144 & -36 & 72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -36 & 12 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 72 & -36 & 144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{45} = \frac{250 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{2^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Se obtiene la siguiente matriz ensamblada.

$$K_T = \begin{bmatrix} 120000 & 300000 & -120000 & 300000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 300000 & 1000000 & -300000 & 500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120000 & -300000 & 149296.88 & -182812.5 & -29296.88 & 117187.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 300000 & 500000 & -182812.5 & 1625000 & -117187.5 & 312500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -29296.88 & -117187.5 & 98741.32 & 91145.83 & 69444.44 & 208333.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 117187.5 & 312500 & 91145.83 & 1458333.33 & 208333.33 & 416666.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 69444.44 & 208333.33 & 1944444.44 & 1666666.667 & -1875000 & -1875000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 208333.33 & 416666.66 & 1666666.67 & 3333333.333 & -1875000 & 1250000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1875000 & -1875000 & 1875000 & -185000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1875000 & 1250000 & -1875000 & 2500000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ -3000000 \\ 0 \\ -2000000 \\ 0 \\ -3500000 \\ 0 \\ F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas.

$$K_T = \begin{bmatrix} -120000 & -300000 & -120000 & -300000 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 \\ 300000 & 1000000 & -300000 & 500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120000 & -300000 & 149296.88 & -182812.5 & -29296.88 & 117187.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 300000 & 500000 & -182812.5 & 1625000 & -117187.5 & 312500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -29296.88 & -117187.5 & 98741.32 & 91145.83 & 69444.44 & 208333.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 117187.5 & 312500 & 91145.83 & 1458333.33 & 208333.33 & 416666.6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 69444.44 & 208333.33 & 1944444.44 & 1666666.667 & -1875000 & -1875000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 208333.33 & 416666.66 & 1666666.67 & 3333333.333 & -1875000 & 1250000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1875000 & -1875000 & 1875000 & -185000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1875000 & 1250000 & -1875000 & 2500000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ -3000000 \\ 0 \\ -2000000 \\ 0 \\ -3500000 \\ 0 \\ F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} 1000000 & -300000 & 500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -300000 & 149296.68 & -182812.5 & -29296.88 & 117187.5 & 0 & 0 & 0 \\ 500000 & -182812.5 & 1625000 & -117187.5 & 312500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -29296.88 & -117187.5 & 98741.32 & 91145.83 & 69444.44 & 208333.33 & 0 \\ 0 & 117187.5 & 312500 & 91145.83 & 1458333.33 & 208333.33 & 416666.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 69444.44 & 208333.33 & 1944444.44 & 1666666.667 & -1875000 \\ 0 & 0 & 0 & 208333.33 & 416666.66 & 1666666.667 & 3333333.33 & 1250000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1875000 & 1250000 & 2500000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3000000 \\ 0 \\ -2000000 \\ 0 \\ -3500000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

Cálculo de los desplazamientos nodales

```
>> K = [1000000 -300000 500000 0 0 0 0 0; -300000 149296.68 -182812.5 -29296.88
117187.5 0 0 0; 500000 -182812.5 1625000 -117187.5 312500 0 0 0; 0 -29296.88 -117187.5
98741.32 91145.83 69444.44 208333.33 0; 0 117187.5 312500 91145.83 1458333.33 208333.33
416666.667 0; 0 0 69444.44 208333.33 1944444.44 1666666.667 -1875000; 0 0 0 208333.33
416666.667 1666666.667 3333333.33 1250000; 0 0 0 0 1875000 1250000 2500000]
K =
1.0e+06 *
Columns 1 through 7
1.0000 -0.3000 0.5000 0 0 0 0
-0.3000 0.1493 -0.1828 -0.0293 0.1172 0 0
0.5000 -0.1828 1.6250 -0.1172 0.3125 0 0
0 -0.0293 -0.1172 0.0987 0.0911 0.0694 0.2083
0 0.1172 0.3125 0.0911 1.4583 0.2083 0.4167
0 0 0 0.0694 0.2083 1.9444 1.6667
0 0 0 0.2083 0.4167 1.6667 3.3333
0 0 0 0 0 1.8750 1.2500
Column 8
0
0
0
0
0
0
-1.8750
1.2500
2.5000
>> F = [0; -3000000; 0; -2000000; 0; -3500000; 0; 0]
F =
0
-3000000
0
-2000000
0
-3500000
0
0
>> u = inv(K)*F
u =
-44.4615
-185.7452
-22.5240
-140.1792
27.0352
-6.2829
8.3153
0.5545
```

Desplazamientos nodales

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \text{ m} \\ \theta_1 &= -44.4615 \text{ rad} \\ v_2 &= -185.7452 \text{ m} \\ \theta_2 &= -22.5240 \text{ rad} \\ v_3 &= -140.1792 \text{ m} \\ \theta_3 &= 27.0352 \text{ rad} \\ v_4 &= -6.2829 \text{ m} \\ \theta_4 &= 8.3153 \text{ rad} \\ v_5 &= 0 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.5545 \text{ rad}\end{aligned}$$

Cálculo de las cargas

```
>> KT = [ 120000 300000 -120000 300000 0 0 0 0 0; 300000 1000000 -300000 500000
0 0 0 0 0; -120000 -300000 149296.88 -182812.5 -29296.88 117187.5 0 0 0 0;
300000 500000 -182812.5 1625000 -117187.5 342500 0 0 0 0; 0 0 -29296.88 -117187.5
98741.32 91145.83 69444.44 208333.33 0 0; 0 0 117187.5 312500 91145.833 1458333.33
208333.33 416666.6667 0 0; 0 0 0 69444.44 208333.33 1944444.44 1666666.667
-1875000 -1875000; 0 0 0 0 208333.33 416666.66 1666666.667 3333333.333 -1875000
1250000; 0 0 0 0 0 -1875000 -1875000 1875000 -1875000; 0 0 0 0 0 1875000
1250000 -1875000 2500000]
```

KT =

1.0e+06 *

Columns 1 through 7

0.1200	0.3000	-0.1200	0.3000	0	0	0
0.3000	1.0000	-0.3000	0.5000	0	0	0
-0.1200	-0.3000	0.1493	-0.1828	-0.0293	0.1172	0
0.3000	0.5000	-0.1828	1.6250	-0.1172	0.3425	0
0	0	-0.0293	-0.1172	0.0987	0.0911	0.0694
0	0	0.1172	0.3125	0.0911	1.4583	0.2083
0	0	0	0	0.0694	0.2083	1.9444
0	0	0	0	0.2083	0.4167	1.6667
0	0	0	0	0	0	-1.8750
0	0	0	0	0	0	1.8750

Columns 8 through 10

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0.2083	0	0
0.4167	0	0
1.6667	-1.8750	-1.8750
3.3333	-1.8750	1.2500
-1.8750	1.8750	-1.8750
1.2500	-1.8750	2.5000

```
>> U = [ 0; -44.4615; -185.7452; -22.5240; -140.1792; 27.0352; -6.2829; 8.3153;
0; 0.5545]
```

```

U =
    0
   -44.4615
  -185.7452
  -22.5240
 -140.1792
   27.0352
   -6.2829
    8.3153
    0
    0.5545

>> F = KT*U
F =
  1.0e+06 *
    2.1938
    0.0001
   -3.0001
    0.8111
   -2.0000
   -0.0004
   -3.4999
   -0.0000
   -4.8504
   -0.0001

```

Cargas (fuerzas y momentos)

$$F_{1y} = 2.1938 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_1 = 0.0001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -3.0001 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_2 = 0.8111 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -2.00 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_3 = -0.0004 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = -3.4999 \times 10^6 \text{ N}$$

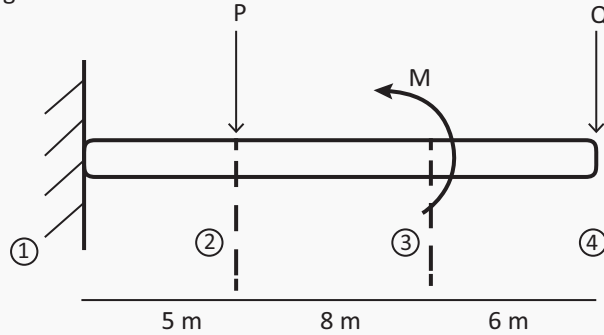
$$M_4 = 0 \text{ N.m}$$

$$F_{5y} = -4.8504 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_5 = -0.0001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

EJERCICIO 11

Hallar los desplazamientos nodales (lineales y angulares), así como las cargas (fuerzas y momentos) en la viga mostrada:



A. Resolución

Paso 1: Calcule lo siguiente.

$$k_1 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(5 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & -12 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 100 & -30 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -30 & 12 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 50 & -30 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 245.76 & 614.4 & -245.76 & 614.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 614.4 & 20480 & -614.4 & 1024 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -245.76 & -614.4 & 245.76 & -614.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 614.4 & 1024 & 614.4 & 20480 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(8 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 48 & -12 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 256 & -48 & 128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -48 & 12 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 128 & 48 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 240 & -60 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 1280 & -240 & 640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & -240 & 60 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 640 & 240 & 1280 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (8 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(6 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 36 & -12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 144 & -36 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -36 & 12 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 72 & 36 & 144 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 142.22 & 426.66 & -142.22 & 426.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 426.66 & 1706.67 & -426.66 & 853.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -142.22 & -426.66 & 142.22 & -426.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 426.66 & 853.33 & 426.66 & 1706.67 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Se obtiene la siguiente matriz ensamblada.

$$K_T = \begin{bmatrix} 245.76 & 614.4 & -245.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 614.4 & 20480 & -614.4 & 1024 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -245.76 & -614.4 & 305.76 & -374.4 & -60 & 240 & 0 & 0 \\ 614.4 & 1024 & 614.4 & 21760 & -240 & 640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -240 & 202.22 & 666.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 640 & 666.66 & 2986.87 & -426.66 & 853.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 142.22 & -426.66 & 142.22 & -426.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 426.66 & 853.33 & 426.66 & 1706.67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ 3000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \times 10^3 \\ 4000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas.

$$K_T = \begin{bmatrix} 245.76 & -614.4 & -245.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 614.4 & 20480 & -614.4 & -1024 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -245.76 & -614.4 & 305.76 & -374.4 & -60 & 240 & 0 & 0 \\ 614.4 & 1024 & 614.4 & 21760 & -240 & 640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -240 & 202.22 & 666.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 640 & 666.66 & 2986.87 & -426.66 & 853.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 142.22 & -426.66 & 142.22 & -426.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 426.66 & 853.33 & 426.66 & 1706.67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ 3000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \times 10^3 \\ 4000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Se obtiene la siguiente matriz simplificada.

$$K = \begin{bmatrix} 305.76 & -374.4 & -60 & 240 & 0 & 0 \\ 614.4 & 21760 & -240 & 640 & 0 & 0 \\ 0 & -240 & 202.22 & 666.66 & 0 & 0 \\ 0 & 640 & 666.66 & 2986.87 & -426.66 & 853.33 \\ 0 & 0 & 142.22 & -426.66 & 142.22 & -426.66 \\ 0 & 0 & 426.66 & 853.33 & 426.66 & 1706.67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \times 10^3 \\ 4000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

Cálculo de los desplazamientos nodales

```
>> K = [ 305.76 -374.4 -60 240 0 0; 614.4 21760 -240 640 0 0; 0 -240 202.22 666.66
0 0; 0 640 666.66 2986.87 -426.66 853.33; 0 0 142.22 -426.66 142.22 -426.66; 0 0
426.66 853.33 426.66 1706.67]
```

```
K =
```

```
1.0e+004 *
```

```
0.0306    -0.0374    -0.0060    0.0240         0         0
0.0614     2.1760    -0.0240    0.0640         0         0
0    -0.0240     0.0202    0.0667         0         0
0    0.0640     0.0667    0.2987    -0.0427    0.0853
0         0     0.0142   -0.0427    0.0142   -0.0427
0         0     0.0427    0.0853    0.0427    0.1707
```

```
>> F = [ 3000; 0; 0; 500*10^3; 4000; 0]
```

```
F =
```

```
3000
0
0
500000
4000
0
```

```
>> u = inv(K)*F
```

```
u =
```

```
1.0e+003 *  
  
0.4665  
0.0074  
1.0353  
-0.3114  
-1.2861  
0.2184
```

Desplazamientos nodales

$$v_1 = 0 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 0 \text{ rad}$$

$$v_2 = 0.4665 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\theta_2 = 0.0074 \times 10^3 \text{ rad}$$

$$v_3 = 1.0353 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\theta_3 = -0.3114 \times 10^3 \text{ rad}$$

$$v_4 = -1.2861 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.2184 \times 10^3 \text{ rad}$$

Cálculo de las fuerzas

```
>> KT = [245.76 614.4 -245.76 0 0 0 0; 614.4 20480 -614.4 1024 0 0 0; -245.76  
-614.4 305.76 -374.4 -60 240 0 0; 614.4 1024 614.4 21760 -240 640 0 0; 0 0 0 -240  
202.22 666.66 0 0; 0 0 0 640 666.66 2986.87 -426.66 853.33; 0 0 0 0 142.22 -426.66  
142.22 -426.66; 0 0 0 0 426.66 853.33 426.66 1706.67]
```

```
KT =
```

```
1.0e+004 *
```

```
0.0246    0.0614   -0.0246         0         0         0         0  
0.0614    2.0480   -0.0614    0.1024         0         0         0  
-0.0246   -0.0614    0.0306   -0.0374   -0.0060    0.0240         0  
0.0614    0.1024    0.0614    2.1760   -0.0240    0.0640         0  
0         0         0         -0.0240    0.0202    0.0667         0  
0         0         0         0.0640    0.0667    0.2987   -0.0427    0.0853  
0         0         0         0         0.0142   -0.0427    0.0142   -0.0427  
0         0         0         0         0.0427    0.0853    0.0427    0.1707
```

```
>> U = [0; 0; 0.4665*10^3; 0.0074*10^3; 1.0353*10^3; -0.3114*10^3; -1.2861*10^3;  
0.2184*10^3]
```

```
U =
```

```
1.0e+003 *
```

```

0
0
0.4665
0.0074
1.0353
-0.3114
-1.2861
0.2184

>> F = KT*U

F =

1.0e+005 *

-1.1465
-2.7904
0.0301
-0.0013
-0.0002
4.9991
0.0401
0.0000

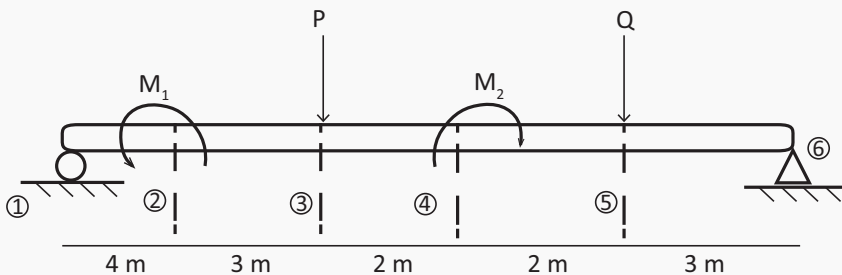
```

Cargas (fuerzas y momentos)

$$\begin{aligned}
 F_{1y} &= -1.1465 \times 10^5 \text{ N} \\
 M_1 &= -2.7904 \times 10^5 \text{ N.m} \\
 F_{2y} &= 0.0301 \times 10^5 \text{ N} \\
 M_2 &= -0.0013 \times 10^5 \text{ N.m} \\
 F_{3y} &= -0.0002 \times 10^5 \text{ N} \\
 M_3 &= 4.9991 \times 10^5 \text{ N.m} \\
 F_{4y} &= 0.0401 \times 10^5 \text{ N} \\
 M_4 &= 0 \text{ N.m}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 12

Hallar los desplazamientos nodales (lineales y angulares), así como las cargas (fuerzas y momentos) en la viga mostrada:



$$\begin{aligned}
 E &= 200 \text{ GPa} \\
 I &= 7 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\
 M_1 &= 600 \text{ kNm} \\
 M_2 &= 500 \text{ kNm} \\
 P &= 1500 \text{ kN} \\
 Q &= 2500 \text{ kN} \\
 R &= 3000 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$k_s = \frac{280 \times 10^9 \text{ Pa} (7 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3 \text{ m})^3} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 36 & -18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -18 & 12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

Cálculo de los desplazamientos nodales

```
>> K = [19.6*10^5 -7.35*10^5 9.8*10^5 0 0 0 0 0; -7.35*10^5 12.386*10^5 5.717*10^5  
-8.711*10^5 13.067*10^5 0 0 0 0; 9.8*10^5 5.717*10^5 45.733*10^5 -13.067*10^5  
13.067*10^5 0 0 0 0; 0 -8.711*10^5 -13.067*10^5 38.111*10^5 16.333*10^5 0 0 0  
0; 0 13.067*10^5 13.067*10^5 16.333*10^5 65.333*10^5 -29.4*10^5 19.6*10^5 0 0  
0 0 -29.4*10^5 -29.4*10^5 58.8*10^5 0 -29.4*10^5 -29.4*10^5 0; 0 0 0 29.4*10^5  
19.6*10^5 0 78.4*10^5 -29.4*10^5 19.6*10^5 0; 0 0 0 0 -29.4*10^5 -29.4*10^5  
39.111*10^5 -16.333*10^5 13.067*10^5; 0 0 0 0 29.4*10^5 19.6*10^5 -16.333*10^5  
65.333*10^5 13.067*10^5; 0 0 0 0 0 0 13.067*10^5 13.067*10^5 26.133*10^5]
```

K =

1.0e+006 *

1.9600	-0.7350	0.9800	0	0	0	0	0	0	0
-0.7350	1.2386	0.5717	-0.8711	1.3067	0	0	0	0	0
0.9800	0.5717	4.5733	-1.3067	1.3067	0	0	0	0	0
0	-0.8711	-1.3067	3.8111	1.6333	0	0	0	0	0
0	1.3067	1.3067	1.6333	6.5333	-2.9400	1.9600	0	0	0
0	0	0	-2.9400	-2.9400	5.8800	0	-2.9400	-2.9400	0
0	0	0	2.9400	1.9600	0	7.8700	-2.9400	1.9600	0
0	0	0	0	0	-2.9400	-2.9400	3.9111	-1.6333	1.3067
0	0	0	0	0	2.9400	1.9600	-1.6333	6.5333	1.3067
0	0	0	0	0	0	0	1.3067	1.3067	2.6133

```
>> F = [0; 0; 600*10^3; -1500*10^3; 0; 0; -800*10^3; -2500*10^3; 0; 0]
```

F =

0
0
600000
-1500000
0
0
-800000
-2500000
0
0

```
>> u = inv(K)*F
```

u =

0.6361
2.1093
0.3098
0.7439
-1.2813
-2.5933
-1.8518
-4.7255
0.0762
2.3247

Desplazamientos nodales

$$\begin{aligned}v_1 &= 0 \text{ m} \\ \theta_1 &= 0.6361 \text{ rad} \\ v_2 &= 2.1093 \text{ m} \\ \theta_2 &= 0.3098 \text{ rad} \\ v_3 &= 0.7439 \text{ m} \\ \theta_3 &= -1.2813 \text{ rad} \\ v_4 &= -2.5933 \text{ m} \\ \theta_4 &= -1.8518 \text{ rad} \\ v_5 &= -4.7255 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.0762 \text{ rad} \\ v_6 &= 0 \text{ m} \\ \theta_6 &= 2.3247 \text{ rad}\end{aligned}$$

Cálculo de las cargas

```
>> KT = [-3.675*10^5 7.35*10^5 -3.675*10^5 7.35*10^5 0 0 0 0 0 0 0; 7.35*10^5
19.6*10^5 -7.35*10^5 9.8*10^5 0 0 0 0 0 0 0; -3.675*10^5 -7.35*10^5 12.386*10^5
5.717*10^5 -8.711*10^5 13.067*10^5 0 0 0 0 0 0; 7.35*10^5 9.8*10^5 5.717*10^5
45.733*10^5 -13.067*10^5 13.067*10^5 0 0 0 0 0 0; 0 0 -8.711*10^5 -13.067*10^5
38.111*10^5 16.333*10^5 0 0 0 0 0 0; 0 0 13.067*10^5 13.067*10^5 16.333*10^5
65.333*10^5 -29.4*10^5 19.6*10^5 0 0 0 0; 0 0 0 -29.4*10^5 -29.4*10^5 58.8*10^5
0 -29.4*10^5 -29.4*10^5 0 0; 0 0 0 29.4*10^5 19.6*10^5 0 78.4*10^5 -29.4*10^5
19.6*10^5 0 0; 0 0 0 0 -29.4*10^5 -29.4*10^5 38.111*10^5 -16.333*10^5 -8.711*10^5
13.067*10^5; 0 0 0 0 29.7*10^5 19.6*10^5 -16.333*10^5 65.333*10^5 -13.067*10^5
13.067*10^5; 0 0 0 0 0 0 -8.711*10^5 -13.067*10^5 8.711*10^5 -13.067*10^5; 0
0 0 0 0 0 0 13.067*10^5 13.067*10^5 -13.067*10^5 26.133*10^5]
```

KT =

1.0e+006 *

-0.3675	0.7350	-0.3675	0.7350	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.7350	1.9600	-0.7350	0.9800	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3675	-0.7350	1.2386	0.5717	-0.8711	1.3067	0	0	0	0	0	0	0
0.7350	0.9800	0.5717	4.5733	-1.3067	1.3067	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.8711	-1.3067	3.8111	1.6333	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.3067	1.3067	1.6333	6.5333	-2.9400	1.9600	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-2.9400	-2.9400	5.8800	0	-2.9400	-2.9400	0	0	0
0	0	0	0	2.9400	1.9600	0	7.8400	-2.9400	1.9600	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2.9400	-2.9400	3.8111	-1.6333	-0.8711	1.3067	0
0	0	0	0	0	0	2.9400	1.9600	-1.6333	6.5333	-1.3067	1.3067	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.8711	-1.3067	0.8711	-1.3067	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.3067	1.3067	-1.3067	2.6133	0

```
>> U = [0; 0.6361; 2.1093; 0.3098; 0.7439; -1.2813; -2.5933; -1.8518; -4.7255;
0.0762; 0; 2.3247]
```

U =

0
0.6361

```

2.1093
0.3098
0.7439
-1.2813
-2.5933
-1.8518
-4.7255
0.0762
0
2.3247

>> F = KT*U

F =

1.0e+006 *

-0.0799
0.0000
-0.0001
0.5997
-1.4999
-0.0003
0.0003
-0.8001
-2.0275
-0.0001
0.9791
-0.0001

```

Cargas (fuerzas y momentos)

$$F_{1y} = -0.0799 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_1 = 0 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = -0.0001 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_2 = 0.5997 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -1.4999 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_3 = -0.0003 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{4y} = 0.0003 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_4 = -0.8001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{5y} = -2.0275 \times 10^6 \text{ N}$$

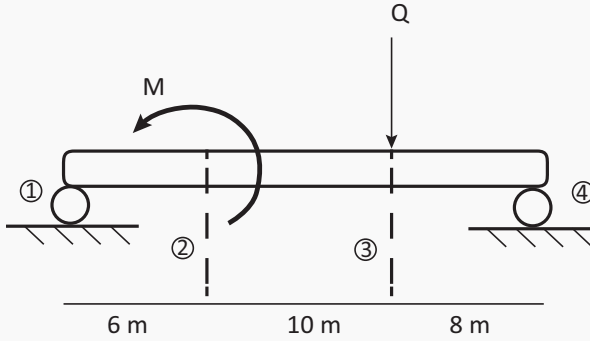
$$M_5 = -0.0001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{6y} = 0.9791 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_6 = -0.0001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

EJERCICIO 13

Hallar los desplazamientos nodales (lineales y angulares), así como las cargas (fuerzas y momentos) en la viga mostrada:



$$\begin{aligned} P &= 3000 \text{ N} \\ M &= 800 \text{ KN.m} \\ E &= 320 \text{ GPa} \\ I &= 10 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

A. RESOLUCIÓN

Paso 1: Calcule los siguientes valores:

$$k_1 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (10 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(6 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 12 & 36 & -12 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 144 & -36 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -36 & 12 & -36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 72 & -60 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (10 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(10 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 60 & -12 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 400 & -60 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -60 & 12 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 200 & -60 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{320 \times 10^9 \text{ Pa} (10 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(8 \text{ m})^3} \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 48 & -12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 256 & -48 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -48 & 12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 128 & -48 & 256 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Se obtiene la matriz ensamblada:

$$KT = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.1778 & 0.5333 & -0.1778 & 0.5333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5333 & 2.133 & -0.5333 & 1.0667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1778 & -0.533 & 0.2162 & -0.341 & -0.0384 & 0.192 & 0 & 0 \\ 0.5333 & 1.067 & -0.3413 & 3.4133 & -0.1920 & 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0384 & -0.192 & 0.1134 & 0.108 & -0.075 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1920 & 0.64 & 0.1080 & 2.88 & -0.30 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.075 & -0.3 & 0.075 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & -0.3 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1y} \\ 0 \\ 800 \times 10^3 \\ -3000 \times 10^3 \\ 0 \\ R_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Elimine filas y columnas:

$$KT = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.1778 & 0.5333 & -0.1778 & 0.5333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5333 & 2.133 & -0.5333 & 1.0667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1778 & -0.533 & 0.2162 & -0.341 & -0.0384 & 0.192 & 0 & 0 \\ 0.5333 & 1.067 & -0.3413 & 3.4133 & -0.1920 & 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0384 & -0.192 & 0.1134 & 0.108 & -0.075 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1920 & 0.64 & 0.1080 & 2.88 & -0.30 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.075 & -0.3 & 0.075 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & -0.3 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1y} \\ 0 \\ 800 \times 10^3 \\ -3000 \times 10^3 \\ 0 \\ R_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Se obtiene la siguiente matriz simplificada:

$$K = \begin{bmatrix} 2.133 \times 10^6 & -0.5333 \times 10^6 & 1.0667 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.533 \times 10^6 & 0.2162 \times 10^6 & -0.341 \times 10^6 & -0.0384 \times 10^6 & 0.192 \times 10^6 & 0 \\ 1.067 \times 10^6 & -0.3413 \times 10^6 & 3.4133 \times 10^6 & -0.1920 \times 10^6 & 0.64 \times 10^6 & 0 \\ 0 & -0.0384 \times 10^6 & -0.192 \times 10^6 & 0.1134 \times 10^6 & 0.108 \times 10^6 & 0.3 \times 10^6 \\ 0 & 0.1920 \times 10^6 & 0.64 \times 10^6 & 0.1080 \times 10^6 & 2.88 \times 10^6 & 0.8 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \times 10^6 & 0.8 \times 10^6 & 1.6 \times 10^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \times 10^3 \\ -3000 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

Cálculo de los desplazamientos nodales

```
>> K = [2.133*10^6 -0.5333*10^6 1.0667*10^6 0 0 0; -0.533*10^6 0.2162*10^6 -0.341*10^6  
-0.0384*10^6 0.192*10^6 0; 1.067*10^6 -0.3413*10^6 3.4133*10^6 -0.1920*10^6 0.64*10^6  
0; 0 -0.0384*10^6 -0.1920*10^6 0.1134*10^6 0.108*10^6 0.3*10^6; 0 0.1920*10^6  
0.64*10^6 0.1080*10^6 2.88*10^6 0.8*10^6; 0 0 0.3*10^6 0.8*10^6 1.6*10^6]
```

K =

2133000	-533300	1066700	0	0	0
-533000	216200	-341000	-38400	192000	0
1067000	-341300	3413300	-192000	640000	0
0	-38400	-192000	113400	108000	300000
0	192000	640000	108000	2880000	800000
0	0	0	300000	800000	1600000

```
>> F = [0; 0; 800*10^3; -3000*10^3; 0; 0]
```

```
F =
```

```

0
0
800000
-3000000
0
0
```

```
>> u = inv(K)*F
```

```
u =
```

```

-25.7944
-143.2747
-20.0516
-206.7455
12.7655
32.3820
```

Desplazamientos nodales

$$v_1 = 0 \text{ m}$$

$$\theta_1 = -25.7944 \text{ rad}$$

$$v_2 = -143.2747 \text{ m}$$

$$\theta_2 = -20.0516 \text{ rad}$$

$$v_3 = -206.7455 \text{ m}$$

$$\theta_3 = 12.7655 \text{ rad}$$

$$v_4 = 0 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 32.3820 \text{ rad}$$

Cálculo de las cargas

```
>> KT = [0.1778*10^6 0.5333*10^6 -0.1778*10^6 0.5333*10^6 0 0 0 0; 0.5333*10^6
2.133*10^6 -0.5333*10^6 1.0667*10^6 0 0 0 0; -0.1778*10^6 -0.5333*10^6 0.2162*10^6
-0.3413*10^6 -0.0384*10^6 0.192*10^6 0 0; 0.5333*10^6 1.0667*10^6 -0.3413*10^6
3.4133*10^6 -0.1920*10^6 0.64*10^6 0 0; 0 0 -0.0384*10^6 -0.192*10^6 0.1134*10^6
0.108*10^6 -0.075*10^6 0.3*10^6; 0 0 0.1920*10^6 0.64*10^6 0.1080*10^6 2.88*10^6
-0.30*10^6 0.8*10^6; 0 0 0 -0.075*10^6 -0.3*10^6 0.075*10^6 -0.3*10^6; 0 0 0
0.3*10^6 0.8*10^6 -0.3*10^6 1.6*10^6]
```

```
KT =
```

177800	533300	-177800	533300	0	0	0	0
533300	2133000	-533300	1066700	0	0	0	0
-177800	-533300	216200	-341300	-38400	192000	0	0
533000	1067000	-341300	3413300	-192000	640000	0	0
0	0	-38100	-192000	113400	108000	-75000	300000
0	0	192000	640000	108000	2880000	-300000	800000
0	0	0	0	-75000	-300000	75000	-300000
0	0	0	0	300000	800000	-300000	1600000

```
>> U = [0; -25.7944; -143.2747; -20.0516; -206.7455; 12.7655; 0; 32.3820]
```

```
U =
```

```
0
-25.7944
-143.2747
-20.0516
-206.7455
12.7655
0
32.3820
```

```
>> F = KT*U
```

```
F =
```

```
1.0e+006 *
1.0246
-0.0001
0.0138
0.8000
-3.0000
-0.0000
1.9617
-0.0001
```

Cargas (fuerzas y momentos)

$$F_{1y} = 1.0246 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_1 = -0.0001 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{2y} = 0.0138 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_2 = -0.8000 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$F_{3y} = -3 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_3 = 0 \text{ N.m}$$

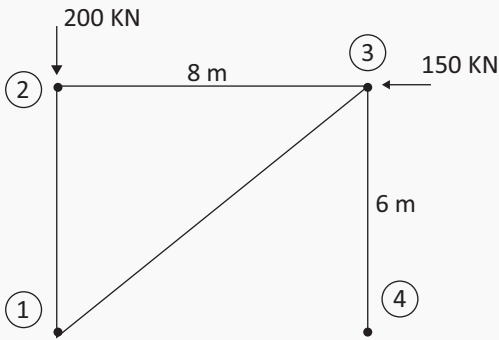
$$F_{4y} = 1.9617 \times 10^6 \text{ N}$$

$$M_4 = -0.0001 \text{ N.m}$$

7.3. VIGA 2D

EJERCICIO 1

Determinar los desplazamientos y las cargas en la estructura mostrada



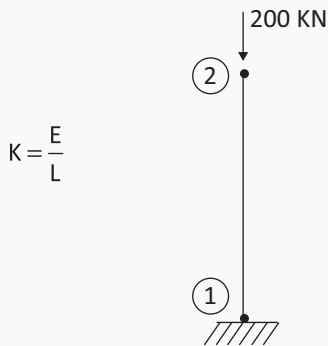
$$E = 280 \text{ GPa}$$

$$I = 6 \times 10^4 \text{ m}^4$$

$$A = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

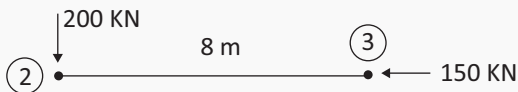
A. Resolución

Matrices individuales



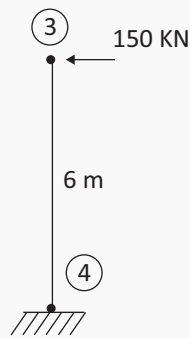
1-2) $\alpha = 90^\circ$; $C = 0$; $S = 1$; $L = 6$

$$K(1-2) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.0093 & 0 & -0.0280 & -0.0093 & 0 & -0.0280 \\ 0 & 2.3333 & 0 & 0 & -2.3333 & 0.0280 \\ -0.0280 & 0 & 0.1120 & 0.0280 & 0 & 0.0560 \\ -0.0093 & 0 & 0.0280 & 0.0093 & 0 & 0.0280 \\ 0 & -2.3333 & 0 & 0 & 2.3333 & 0 \\ -0.0280 & 0.0280 & 0.0560 & 0.0280 & 0 & 0.1120 \end{vmatrix}$$



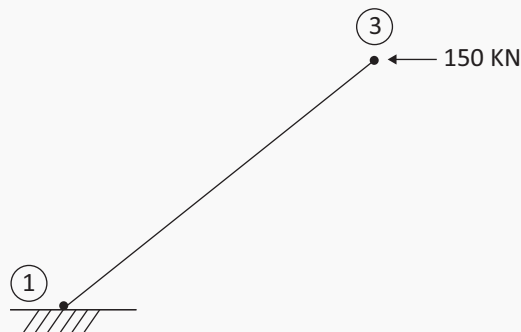
2-3) $\alpha = 0$; $C = 1$; $S = 0$; $L = 8$

$$K(2-3) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 1.7500 & 0 & 0 & -1.7500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0039 & -0.0158 & 0 & -0.0039 & 0 \\ 0 & 0.0158 & 0.0840 & 0 & -0.0158 & 0.0420 \\ -1.7500 & 0 & 0 & 1.7500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0039 & -0.0158 & 0 & 0.0039 & -0.0158 \\ 0 & 0 & 0.0420 & 0 & -0.0158 & 0.0840 \end{vmatrix}$$



3-4) $\alpha = 90$; $C = 0$; $S = 1$; $L = 6$

$$K(3-4) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.0093 & 0 & 0.0280 & -0.0093 & 0 & 0.0280 \\ 0 & 2.3333 & 0 & 0 & -2.3333 & -0.0280 \\ 0.0280 & 0 & 0.1120 & -0.0280 & 0 & 0.0560 \\ -0.0093 & 0 & -0.0280 & 0.0093 & 0 & -0.0280 \\ 0 & -2.3333 & 0 & 0 & 2.3333 & 0 \\ 0.0280 & -0.0280 & 0.0560 & -0.0280 & 0 & 0.1120 \end{vmatrix}$$



1-3) $\alpha = 53$; $C = 0.798$; $S = 0.6018$; $L = 10$

$$K(1-3) = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0.89368 & 0.67191 & -0.00607 & -0.89368 & -0.67191 & -0.00607 \\ 0.67191 & 0.50834 & -0.00805 & -0.67191 & -0.50834 & 0.00607 \\ -0.00607 & 0.00805 & 0.06720 & 0.00607 & -0.00805 & 0.03360 \\ -0.89368 & -0.67191 & 0.00607 & 0.89368 & 0.67191 & 0.00607 \\ -0.67191 & -0.50834 & -0.00805 & 0.67191 & 0.50834 & -0.00805 \\ -0.00607 & 0.00607 & 0.03360 & 0.00607 & -0.00805 & 0.06720 \end{bmatrix}$$

Matriz ensamblada

$10^9 \times M$

$$M = \begin{bmatrix} 0.90298 & 0 & -0.03407 & -0.0093 & 0 & -0.0280 & -0.89368 & -0.67191 & -0.00607 & 0 & 0 & 0 \\ 0.67191 & 2.84164 & -0.00805 & 0 & -2.3333 & 0.0280 & -0.67191 & -0.50834 & 0.00607 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03407 & 0.00805 & 0.1792 & 0.0280 & 0 & 0.0560 & 0.00607 & -0.00805 & 0.03360 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0093 & 0 & 0.0280 & 1.7593 & 0 & 0.0280 & -1.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3333 & 0 & 0 & 2.3372 & -0.0158 & 0 & -0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0280 & 0.0280 & 0.0560 & 0.0280 & 0.0158 & 0.196 & 0 & -0.0158 & 0.0420 & 0 & 0 & 0 \\ -0.89368 & -0.67191 & 0.00607 & -1.7500 & 0 & 0 & 2.65298 & 0.67191 & 0.03407 & -0.0093 & 0 & 0.0280 \\ -0.37191 & -0.50834 & -0.00805 & 0 & -0.0039 & -0.0158 & 0.67191 & 2.84554 & -0.02385 & 0 & -2.3333 & -0.0280 \\ -0.00607 & 0.00607 & 0.03360 & 0 & 0 & 0.0420 & 0.03407 & -0.02985 & 0.2632 & -0.0280 & 0 & 0.0560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0093 & 0 & -0.0280 & 0.0093 & 0 & -0.0280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.3333 & 0 & 0 & 2.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0280 & -0.0280 & 0.0560 & -0.0280 & 0 & 0.1120 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \phi_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x2} = 0 \\ R_{y2} = -200000 \\ M_2 = 0 \\ R_{x3} = -150000 \\ R_{y3} = 0 \\ M_3 = 0 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y momentos

$$u_2 = -0.02212 \text{ mm}$$

$$v_2 = -0.0852 \text{ mm}$$

$$\phi_2 = 0.0423 \text{ mrad}$$

$$u_3 = -0.2217 \text{ mm}$$

$$v_3 = 0.0525 \text{ mm}$$

$$\phi_3 = 0.0018 \text{ mrad}$$

Reacciones

$$F_{x1} = 164.78 \text{ MN}$$

$$F_{y1} = 3.2227 \text{ MN}$$

$$M_1 = 2240 \text{ Nm}$$

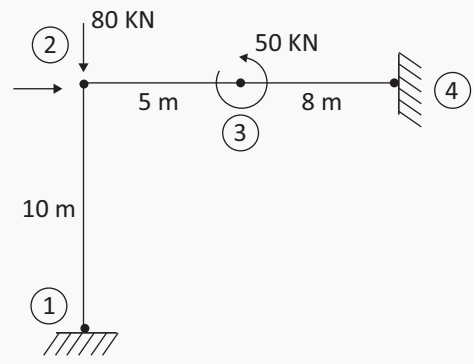
$$F_{x4} = 2.0114 \text{ MN}$$

$$F_{y4} = -122.49 \text{ MN}$$

$$M_4 = -7.57 \text{ MNm}$$

EJERCICIO 2

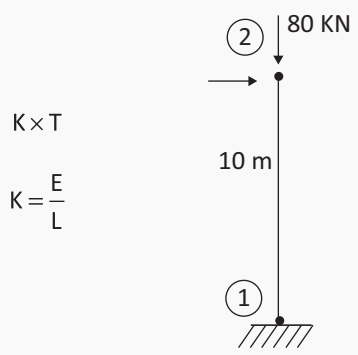
Determinar los desplazamientos y las cargas en la estructura mostrada



$E = 300 \text{ GPa}$
 $I = 2 \times 10^4 \text{ m}^4$
 $A = 0.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$

A. Resolución

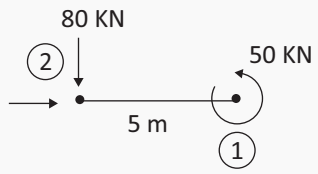
Matrices individuales



$K \times T$
 $K = \frac{E}{L}$

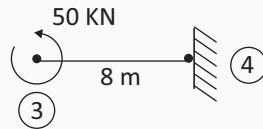
1-2) $\alpha = 90^\circ ; C = 0 ; S = 1 ; L = 6$

$K(1-2) = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0.0072 & 0 & -0.0360 & -0.0072 & 0 & -0.0360 \\ 0 & 1.50000 & 0 & -1.5000 & 0.0360 & 0 \\ -0.0360 & 0 & 0.2400 & 0.0360 & 0 & 0.1200 \\ -0.00720 & 0.03600 & 0.0072 & 0 & 0.3600 & 0 \\ 0 & -1.50000 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ -0.0360 & 0.0360 & 0.1200 & 0.0360 & 0 & 0.2400 \end{bmatrix}$



2-3) $\alpha = 0$; $C = 1$; $S = 0$; $L = 5$

$$K(2-3) = 10^8 \times \begin{vmatrix} 3.0000 & 0 & 0 & -3.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0576 & -0.1440 & 0 & -0.0576 & 0 \\ 0 & 0.1440 & 0.4800 & 0 & -0.1440 & 0.2400 \\ -3.0000 & 0 & 0 & 3.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0576 & -0.1440 & 0 & 0.0576 & -0.1440 \\ 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.1440 & 0.4800 \end{vmatrix}$$



3-4) $\alpha = 0$; $C = 1$; $S = 0$; $L = 8$

$$K(3-4) = 10^8 \times \begin{vmatrix} 1.8750 & 0 & 0 & -1.8750 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0141 & -0.0563 & 0 & -0.0141 & 0 \\ 0 & 0.0563 & 0.3000 & 0 & -0.0563 & 0.1500 \\ -1.8750 & 0 & 0 & 1.8750 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0141 & -0.0563 & 0 & 0.0141 & -0.0563 \\ 0 & 0 & 0.1500 & 0 & -0.0563 & 0.3000 \end{vmatrix}$$

Matriz ensamblada

$10^8 \times M$

$$M = \begin{bmatrix} 0.0072 & 0 & -0.0360 & -0.0072 & 0 & -0.0360 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0.0360 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0360 & 0 & 0.2400 & 0.0360 & 0 & 0.1200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0072 & 0 & 0.0360 & 3.0072 & 0 & 0.0360 & -3.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5000 & 0 & 0 & 1.5576 & -0.1440 & 0 & -0.0576 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0360 & 0.0360 & 0.1200 & 0.0360 & 0.1440 & 0.72 & 0 & -0.1440 & 0.2400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.0000 & 0 & 0 & 3.8750 & 0 & 0 & -1.8750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0576 & -0.1440 & 0 & 0.0435 & -0.0707 & 0 & 0.0141 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2400 & 0 & -0.0877 & 0.7800 & 0 & -0.0563 & 0.1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.8750 & 0 & 0 & 1.8750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0141 & -0.0563 & 0 & 0.0141 & -0.0563 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1500 & 0 & -0.0563 & 0.3000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \phi_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x2} = 8000 \\ R_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ R_{x3} = 0 \\ R_{y3} = 0 \\ M_3 = 50000 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y momentos

$$u_2 = 0.001 \text{ m}$$

$$v_2 = 0.001 \text{ m}$$

$$\phi_2 = -0.0000004 \text{ rad}$$

$$u_3 = 0.001 \text{ m}$$

$$v_3 = 0.0014 \text{ m}$$

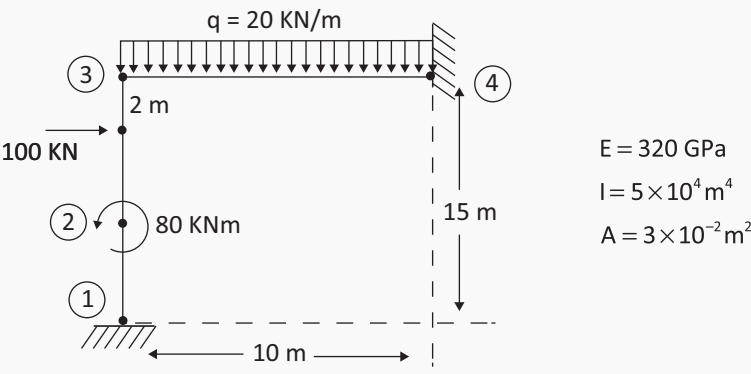
$$\phi_3 = 0.008 \text{ rad}$$

Reacciones

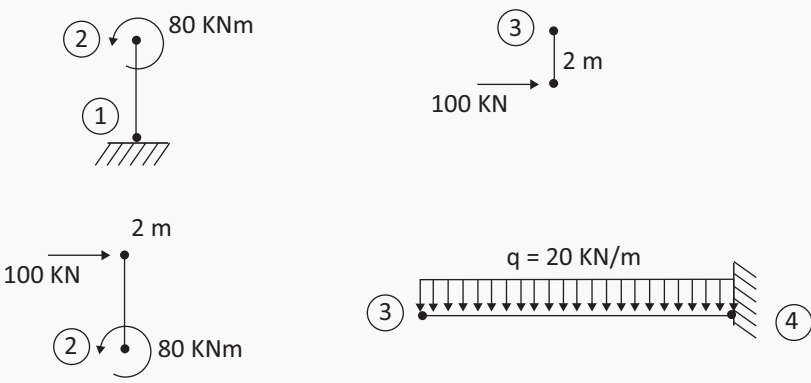
$F_{x1} = -82.4 \text{ N}$
 $F_{y1} = -7507.1 \text{ N}$
 $M_1 = 415.08 \text{ Nm}$
 $F_{x4} = -6966.1 \text{ N}$
 $F_{y4} = -6376.5 \text{ N}$
 $M_4 = 11901.5 \text{ Nm}$

EJERCICIO 3

Determinar los desplazamientos y las cargas en la estructura mostrada



A. Resolución



$K \times T$

$K = \frac{E}{L}$

1-2) $E = 320 \times 10^9$; $I = 5 \times 10^{-4}$; $A = 3 \times 10^{-2}$; $C = 0$; $S = 1$; $L = 3$

$$K(1-2) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.0711 & 0 & -0.1067 & -0.0711 & 0 & -0.1067 \\ 0 & 3.2000 & 0 & 0 & -32000 & 0.1067 \\ -0.1067 & 0 & 0.2133 & 0.1067 & 0 & 0.1067 \\ -0.0711 & 0 & 0.1067 & 0.0711 & 0 & 0.1067 \\ 0 & -32000 & 0 & 0 & 3.2000 & 0 \\ -0.1067 & 0.1067 & 0.1067 & 0.1067 & 0 & 0.2133 \end{vmatrix}$$

2-3) $E = 320 \times 10^9$; $I = 5 \times 10^{-4}$; $A = 3 \times 10^{-2}$; $C = 0$; $S = 1$; $L = 10$

$$K(2-3) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.00192 & 0 & -0.0096 & -0.00192 & 0 & -0.0096 \\ 0 & 0.960 & 0 & 0 & -0.96 & 0.0096 \\ -0.0096 & 0 & 0.0064 & 0.0096 & 0 & 0.032 \\ -0.00192 & 0 & 0.0096 & 0.00192 & 0 & 0.0096 \\ 0 & -0.96 & 0 & 0 & 0.96 & 0 \\ -0.0096 & 0.0096 & 0.032 & 0.0096 & 0 & 0.064 \end{vmatrix}$$

3-4) $E = 320 \times 10^9$; $I = 5 \times 10^{-4}$; $A = 3 \times 10^{-2}$; $C = 0$; $S = 1$; $L = 2$

$$K(3-4) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.2400 & 0 & -0.2400 & -0.2400 & 0 & -0.2400 \\ 0 & 4.8000 & 0 & 0 & -4.8000 & 0.2400 \\ -0.2400 & 0 & 0.3200 & 0.2400 & 0 & 0.1600 \\ -0.2400 & 0 & 0.2400 & 0.2400 & 0 & 0.2400 \\ 0 & -4.8000 & 0 & 0 & 4.8000 & 0 \\ -0.2400 & 0.2400 & 0.1600 & 0.2400 & 0 & 0.3200 \end{vmatrix}$$

4-5) $E = 320 \times 10^9$; $I = 5 \times 10^{-4}$; $A = 3 \times 10^{-2}$; $C = 1$; $S = 0$; $L = 10$

$$K(4-5) = 10^9 \times \begin{vmatrix} 0.96 & 0 & 0 & -0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00192 & -0.0096 & 0 & -0.00192 & 0 \\ 0 & 0.0096 & 0.064 & 0 & -0.0096 & 0.032 \\ -0.96 & 0 & 0 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00192 & -0.0096 & 0 & 0.00192 & -0.0096 \\ 0 & 0 & 0.032 & 0 & -0.0096 & 0.064 \end{vmatrix}$$

Matriz ensamblada

 $10^9 \times M$

$$M = \begin{bmatrix} 0.0711 & 0 & -0.1067 & -0.0711 & 0 & -0.1067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2 & 0 & 0 & -3.2 & 0.1067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1067 & 0 & 0.2133 & 0.1067 & 0 & 0.1067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0711 & 0 & 0.1067 & 0.0732 & 0 & 0.0971 & -0.00192 & 0 & -0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2 & 0 & 0 & 4.16 & 0 & 0 & -0.96 & 0.0096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1067 & 0.1067 & 0.1067 & 0.0971 & 0 & 0.2773 & 0.0096 & 0 & 0.032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00192 & 0 & 0.0096 & 0.24192 & 0 & -0.2304 & -0.24 & 0 & -0.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.96 & 0 & 0 & 5.76 & 0 & 0 & -4.8 & 0.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0096 & 0.0096 & 0.032 & -0.2304 & 0 & 0.384 & 0.24 & 0 & 0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.24 & 0 & 0.24 & 1.2 & 0 & 0.24 & -0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.8 & 0 & 0 & 4.8192 & -0.0096 & 0 & -0.00192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.24 & 0.24 & 0.16 & 0.24 & 0.0096 & 0.96 & 0 & -0.0096 & 0.032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.96 & 0 & 0 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00192 & -0.0096 & 0 & 0.00192 & -0.0096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.032 & 0 & -0.0096 & 0.064 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \\ u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \\ \phi_5 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{s1} \\ R_{r1} \\ M_1 \\ R_{s2} = 0 \\ R_{r2} = 0 \\ \phi_2 \\ M_2 = 80000 \\ R_{s3} = 100000 \\ R_{r3} = 0 \\ M_3 = 0 \\ R_{s4} = 0 \\ R_{r4} = R_{s4} - qL/2 \\ M_4 = M_4 + qL^2/12 \\ R_{s5} = 0 \\ R_{r5} = R_{s5} - qL/2 \\ M_5 = M_5 + qL^2/12 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y momentos

$$u_2 = -0.0001 \text{ m}$$

$$v_2 = -0.001 \text{ m}$$

$$\phi_2 = 0.0002 \text{ rad}$$

$$u_3 = 0.0018 \text{ m}$$

$$v_3 = -0.0003 \text{ m}$$

$$\phi_3 = 0.0008 \text{ rad}$$

$$u_4 = 0.0001 \text{ m}$$

$$v_4 = -0.0001 \text{ m}$$

$$\phi_4 = 0.0005 \text{ rad}$$

Reacciones

$$F_{x1} = -12370.13 \text{ N}$$

$$F_{y1} = 243681.32 \text{ N}$$

$$M_1 = 9565.13 \text{ Nm}$$

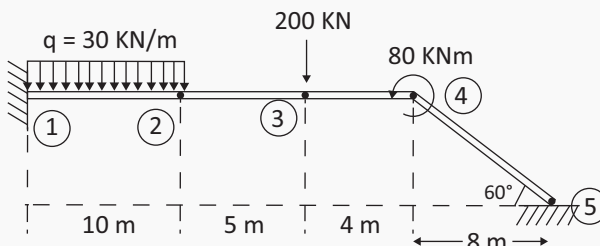
$$F_{x5} = -87629.86 \text{ N}$$

$$F_{y5} = -4581.64 \text{ N}$$

$$M_5 = 17298.32 \text{ Nm}$$

EJERCICIO 4

Determinar los desplazamientos y las cargas en la estructura mostrada

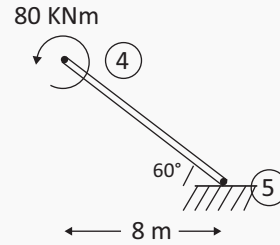
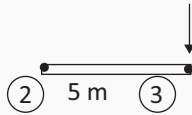
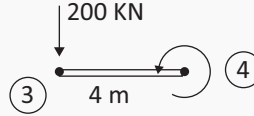
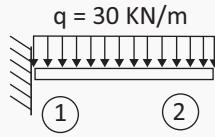


$$E = 300 \text{ GPa}$$

$$I = 8 \times 10^4 \text{ m}^4$$

$$A = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

A. Resolución



1-2)

$$K(1-2) = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0005 \\ 0.0000 & 0.0005 & 0.0032 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0016 \\ -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & -0.0005 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0005 \\ 0.0000 & 0.0005 & 0.0016 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0032 \end{bmatrix}$$

2-3)

$$K(2-3) = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0004 & 0.0010 & 0.0000 & -0.0004 & 0.0010 \\ 0.0000 & 0.0010 & 0.0032 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0016 \\ -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0004 & -0.0010 & 0.0000 & 0.0004 & -0.0010 \\ 0.0000 & 0.0010 & 0.0016 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0032 \end{bmatrix}$$

3-4)

$$K(3-4) = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0006 & 0.0012 & 0.0000 & -0.0006 & 0.0012 \\ 0.0000 & 0.0012 & 0.0032 & 0.0000 & -0.0012 & 0.0016 \\ -0.0500 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0500 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0012 & 0.0000 & 0.0006 & -0.0012 \\ 0.0000 & 0.0012 & 0.0016 & 0.0000 & -0.0012 & 0.0032 \end{bmatrix}$$

4-5)

$$K(4-5) = \begin{bmatrix} 0.0125 & -0.0216 & -0.0003 & -0.0125 & 0.0216 & -0.0003 \\ -0.0216 & 0.0375 & -0.0002 & 0.0216 & -0.0375 & -0.0002 \\ -0.0003 & -0.0002 & 0.0032 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0016 \\ -0.0125 & 0.0216 & 0.0003 & 0.0125 & -0.0216 & 0.0003 \\ 0.0216 & -0.0375 & 0.0002 & -0.0216 & 0.0375 & 0.0002 \\ -0.0003 & -0.0002 & 0.0016 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0032 \end{bmatrix}$$

Matriz ensamblada

$$M = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 0 & -3 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 96 & 0 & -14 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1500 & 0 & 0 & 4500 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 14 & 0 & 26 & 43 & 0 & -23 & 58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 48 & 0 & 43 & 288 & 0 & -58 & 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 & 6750 & 0 & 0 & -3750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23 & -58 & 0 & 68 & 32 & 0 & -45 & 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58 & 96 & 0 & 32 & 432 & 0 & -90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3750 & 0 & 0 & 3985 & -406 & -5 & 235 & 406 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -45 & -90 & -406 & 748 & -93 & 406 & 703 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & 120 & -5 & -93 & 300 & 5 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235 & 406 & 5 & 235 & -406 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 406 & -703 & 3 & -406 & 703 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 30 & 5 & 3 & 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \phi_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \phi_4 \\ u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \\ \phi_5 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x2} = 0 \\ R_{y2} = 0 \\ M_2 = 80000 \\ R_{x3} = 100000 \\ R_{y3} = 0 \\ M_3 = 0 \\ R_{x4} = 0 \\ R_{y4} = R_{y4} - qL / 2 \\ M_4 = M_4 + qL^2 / 12 \\ R_{x5} \\ R_{y5} = R_{y5} - qL / 2 \\ M_5 = M_5 + qL^2 / 12 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos y momentos

$$U_1 = 0.000000 \text{ m}$$

$$V_1 = 0.000000 \text{ m}$$

$$\phi_1 = 0.000000 \text{ rad}$$

$$U_2 = -0.000044 \text{ m}$$

$$V_2 = -0.054930 \text{ m}$$

$$\phi_2 = -0.000983 \text{ rad}$$

$$U_3 = -0.000066 \text{ m}$$

$$V_3 = -0.037099 \text{ m}$$

$$\phi_3 = 0.008012 \text{ rad}$$

$$U_4 = -0.000084 \text{ m}$$

$$V_4 = -0.000309 \text{ m}$$

$$\phi_4 = 0.008095 \text{ rad}$$

$$U_5 = 0.000000 \text{ m}$$

$$V_5 = 0.000000 \text{ m}$$

$$\phi_5 = 0.000000 \text{ rad}$$

Fuerzas y momentos

$$F_{1X} = 66.15 \text{ KN}$$

$$F_{1Y} = 144.05 \text{ KN}$$

$$M_1 = 743.82 \text{ KNm}$$

$$F_{2X} = 0.00 \text{ KN}$$

$$F_{2Y} = -150.00 \text{ KN}$$

$$M_2 = 250.00 \text{ KNm}$$

$$F_{3X} = 0.00 \text{ KN}$$

$$F_{3Y} = -200.00 \text{ KN}$$

$$M_3 = 0.00 \text{ KNm}$$

$$F_{4X} = 0.00 \text{ KN}$$

$$F_{4Y} = 0.00 \text{ KN}$$

$$M_4 = 80.00 \text{ KNm}$$

$$F_{5X} = -66.15 \text{ KN}$$

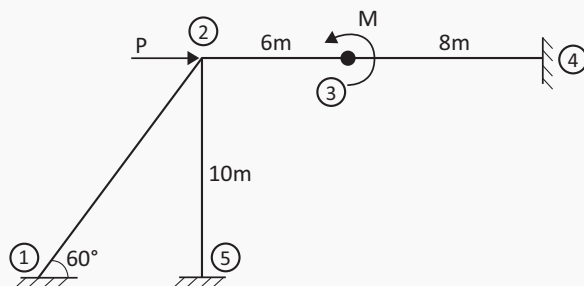
$$F_{5Y} = 205.95 \text{ KN}$$

$$M_5 = 244.11 \text{ KNm}$$

7.4. ESTRUCTURAS 2 – D

EJERCICIO 1

En la siguiente estructura, determinar los ángulos girados en los nodos indicados.



$E = 3000 \text{ GPa}$
 $I = 8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
 $A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 $P = 5000 \text{ N}$
 $M = 600 \text{ Nm}$

Nodos: 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4; 2 – 5

A. Resolución

Elemento	Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1	1 – 2	60°	0.5	0.866	0.25	0.749956	0.433
2	2 – 3	0°	1	0	1	0	0
3	3 – 4	0°	1	0	1	0	0
4	2 – 5	270°	0	-1	0	1	0

[illegible]

[illegible]

$$K_{2-5} = \frac{(300 \times 10^9)}{10m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00000096 & 0 & 0.0000048 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00000096 & 0 & 0.0000048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000048 & 0 & 0.000032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000048 & 0 & 0.000016 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00000096 & 0 & -0.0000048 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000096 & 0 & -0.0000048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000048 & 0 & 0.000016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000048 & 0.0004 & 0.000032 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28800 & 0 & 144000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28800 & 0 & 144000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 144000 & 0 & 960000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 144000 & 0 & 480000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28800 & 0 & -144000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28800 & 0 & -144000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 144000 & 0 & 480000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -144000 & 0 & 960000 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$\Sigma k = \begin{bmatrix} 2612106.231 & 4491770.3220 & -93528.08721 & -2612106.231 & -4491770.3220 & 93528.08721 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4491770.3220 & 7798451.55 & 54000.05036 & -4491770.3220 & -7798451.55 & 54000.05036 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -93528.08721 & 54000.05036 & 831384.7753 & 93528.08721 & -54000.05036 & 415692.3876 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2612106.231 & -4491770.322 & 93528.08721 & 22640906.23 & 4491770.3220 & 237528.0872 & -20000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28800 & 0 & 144000 & 0 \\ -4491770.3220 & 7798451.55 & -54000.05036 & 237528.0872 & 4491770.3220 & 19931784.88 & 345999.9496 & 0 & -133333.3333 & 400000 & 0 & 0 & 0 & -12000000 & 0 \\ -93528.08721 & 54000.05036 & 415692.3876 & 237528.0872 & 345999.9496 & 3391384.775 & 35000000 & 0 & -400000 & 800000 & 0 & 0 & 0 & -144000 & 480000 \\ 0 & 0 & 0 & -20000000 & 0 & 0 & 35000000 & 0 & 0 & -15000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -133333.3333 & -400000 & 0 & 189583.3333 & -175000 & 0 & -56250 & 225000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 400000 & 800000 & 0 & -175000 & 2800000 & 0 & -225000 & 600000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15000000 & 0 & 0 & 15000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -56250 & -225000 & 0 & 56250 & -225000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225000 & 600000 & 0 & -225000 & 1200000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28800 & 0 & -144000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -144000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28800 & 12000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 480000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -144000 & 0 & 960000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ F_x \\ F_y \\ M_x \\ F_x \\ F_y \\ M_x \end{bmatrix}$$

Eliminando Filas y Columnas:

$$KR = \begin{bmatrix} 22640906.23 & 4491770.3220 & 237528.0872 & -20000000 & 0 & 0 \\ 4491770.3220 & 19931784.88 & 345999.9496 & 0 & -133333.3333 & 400000 \\ 237528.0872 & 345999.9496 & 3391384.775 & 0 & -400000 & 800000 \\ -20000000 & 0 & 0 & 35000000 & 0 & 0 \\ 0 & -133333.3333 & -400000 & 0 & 189583.3333 & -175000 \\ 0 & 400000 & 800000 & 0 & -175000 & 2800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
15000000	0	0	-15000000	0	0
0	56250	225000	0	-56250	225000
0	225000	1200000	0	225000	600000
-15000000	0	0	15000000	0	0
0	-56250	-225000	0	56250	-225000
0	225000	600000	0	-225000	1200000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 15

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

>> K4 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 28800 0 144000 0 0 0 0 0 0 -28800 0 144000; 0 0 0 0 12000000
0 0 0 0 0 0 0 0 -12000000 0; 0 0 0 144000 0 960000 0 0 0 0 0 144000 0 480000; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 -28800 0 -144000 0 0 0 0 0 28000 0 -144000; 0 0 0 0 -12000000
0 0 0 0 0 0 0 0 12000000 0; 0 0 0 14000 0 480000 0 0 0 0 0 0 -144000 0 960000]

K4 =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	28800	0	144000
0	0	0	0	12000000	0
0	0	0	144000	0	960000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	-28000	0	-144000
0	0	0	0	-12000000	0
0	0	0	14000	0	480000

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 13 through 15

0	0	0
0	0	0
0	0	0
-28800	0	144000
0	-12000000	0
144000	0	480000
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
28800	0	-144000
0	12000000	0
-144000	0	960000

>> KT = K1 + K2 + K3 + K4

KT =

1.0e+007 *

Columns 1 through 8

0.2612	0.4492	-0.0094	-0.2612	-0.4492	-0.0094	0	0
0.4492	0.7798	0.0054	-0.4492	-0.7798	0.0054	0	0
-0.0094	0.0054	0.0831	0.0094	-0.0054	0.0416	0	0
-0.2612	-0.4492	0.0094	2.2641	0.4492	0.0238	-2.0000	0
-0.4492	-0.0780	-0.0054	0.4492	1.2913	0.0346	0	-0.0133
-0.0094	0.0054	0.0416	0.0238	0.0346	0.3391	0	-0.0400
0	0	0	-2.0000	0	0	3.5000	0
0	0	0	0	-0.0133	-0.0400	0	0.0190
0	0	0	0	0.0400	0.0800	0	-0.0175
0	0	0	0	0	0	-1.5000	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0056
0	0	0	0	0	0	0	0.0225
0	0	0	-0.0029	0	-0.0144	0	0
0	0	0	0	-1.2000	0	0	0
0	0	0	0.0014	0	0.0480	0	0

Columns 9 through 15

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0029	0	0.0144
0.0400	0	0	0	0	-1.2000	0
0.0800	0	0	0	0.0144	0	0.0480
0	-1.5000	0	0	0	0	0
-0.0175	0	-0.0056	0.0225	0	0	0
0.2400	0	0.0225	0.0600	0	0	0
0	1.5000	0	0	0	0	0
-0.0225	0	0.0056	-0.0225	0	0	0
0.0600	0	-0.0225	0.1200	0	0	0
0	0	0	0	0.0029	0	-0.0144
0	0	0	0	0	1.2000	0
0	0	0	0	-0.0144	0	0.0960

```
>> KR = [ 22640906.23 4491770.3220 237528.0872 -20000000 0 0; 4491770.3220
19931784.88 345999.9496 0 -133333.3333 400000; 237528.0872 345999.9496 3391384.775
0 -400000 800000; -20000000 0 0 35000000 0 0; 0 -133333.3333 -400000 0 189583.3333
-175000; 0 400000 800000 0 -175000 2800000]
```

KR =

1.0e+007 *

2.2641	0.4492	0.0238	-2.0000	0	0
0.4492	1.9932	0.0346	0	-0.0133	0.0400
0.0238	0.0346	0.3391	0	-0.0400	0.0800
-2.0000	0	0	3.5000	0	0
0	-0.0133	-0.0400	0	0.0190	-0.0175
0	0.0400	0.0800	0	-0.0175	0.2800

```
>> f = [5000; 0; 0; 0; 0; 600]
```

f =

```
5000
0
0
0
0
600
```

```
>> u = inv(KR)*f
```

u =

1.0e-003 *

```
0.4939
-0.1151
-0.0860
0.2822
-0.0284
0.2535
```

```
U =
```

```
1.0e-003 *
```

```
0
0
0
0.4939
-0.1151
-0.0860
0.2822
-0.0284
0.2535
0
0
0
0
0
0
```

```
>> F = KT * U
```

```
F =
```

```
1.0e+003 *
```

```
-0.7650
-1.3257
0.0169
5.0009
0.8077
0.0003
-0.0010
-0.0001
0.4985
-4.2330
-0.0554
0.1457
-0.0019
1.3812
-0.0344
```


[illegible]

$$K_{2-5} = \frac{(220 \times 10^9)}{17.32m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00005015 & -8.65134E-05 & 0.0000015 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00005015 & 8.65134E-05 & 0.0000015 \\ 0 & 0 & 0 & -8.65134E-05 & 0.0000015 & 8.66051E-07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.65134E-05 & -0.0000015 & 8.66051E-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000015 & 8.65134E-05 & 0.00002 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000015 & -8.66051E-07 & 0.00001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00005015 & 8.656134E-05 & -0.0000015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00005015 & -8.65134E-05 & -0.0000015 \\ 0 & 0 & 0 & 8.65134E-05 & -0.0000015 & -8.66051E-07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.65134E-05 & 0.0000015 & -8.66051E-07 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000015 & 8.66051E-07 & 127020.7852 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000015 & -8.65134E-05 & 0.00002 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 637009.2379 & -1098899.935 & 19053.11778 & 0 & 0 & 0 & 0 & -637009.2379 & 1098899.935 & 19053.11778 \\ 0 & 0 & 0 & -1098899.935 & 19053.11778 & 11000.64537 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1098899.935 & -19053.11778 & 11000.64537 \\ 0 & 0 & 0 & 19053.11778 & 11000.64537 & 254041.5704 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19053.11778 & -11000.64537 & 127020.7852 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -637009.2379 & 1098899.935 & -19053.11778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 637009.2379 & -1098899.935 & -19053.11778 \\ 0 & 0 & 0 & 1098899.935 & -19053.11778 & -11000.64537 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19053.11778 & -11000.64537 \\ 0 & 0 & 0 & 19053.11778 & 11000.64537 & 127020.7852 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19053.11778 & -11000.64537 & 254041.5704 \end{bmatrix}$$

Matriz ensamblada:

$$\Sigma k = \begin{bmatrix} 3911.11111 & 0 & -29333.33333 & -3911.11111 & 0 & -293333.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29333.33333 & 0 & 0 & -293333.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -29333.33333 & 0 & 29333.33333 & 29333.33333 & 0 & 146666.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -261206.231 & 0 & 29333.33333 & 5040920.349 & -1098899.935 & 48386.45112 & -4400000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -637009.2379 & 1098899.935 & 19053.11778 & 0 & 0 & 0 \\ -4491770.3220 & -29333.33333 & 0 & -1098899.935 & 4852368.475 & 77000.64537 & 0 & -13200 & 66000 & 0 & 0 & 1098899.935 & -19053.11778 & 11000.64537 & 0 & 0 & 0 \\ -93528.08721 & 0 & 146666.6667 & 48386.45112 & 77000.64537 & 987374.9038 & 0 & -66000 & 220000 & 0 & 0 & -19053.11778 & -11000.64537 & 127020.7852 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -440000 & 0 & 0 & 9900000 & 0 & 0 & -5500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13200 & -66000 & 0 & 38981.25 & 37125 & 0 & -25781.25 & 103125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66000 & 220000 & 0 & 37125 & 990000 & 0 & -103125 & 275000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5500000 & 0 & 0 & 5500000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25781.25 & -103125 & 0 & 25781.25 & -103125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 103125 & 275000 & 0 & -103125 & 550000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -637009.2379 & 1098899.935 & -19053.11778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 637009.2379 & -1098899.935 & -19053.11778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1098899.935 & -1905835.141 & 11000.64537 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1098899.935 & 19053.11778 & -11000.64537 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19053.11778 & 11000.64537 & 127020.7852 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19053.11778 & -11000.64537 & 254041.5704 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ 0 \\ -8000 \\ 800 \\ -12000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando filas y columnas:

$$k = \begin{bmatrix} 5040920.349 & -1098899.935 & 48386.45112 & -4400000 & 0 & 0 \\ -1098899.935 & 4852368.475 & 77000.64537 & 0 & -13200 & 66000 \\ 48386.45112 & 77000.64537 & 987374.9038 & 0 & -66000 & 220000 \\ -4400000 & 0 & 0 & 9900000 & 0 & 0 \\ 0 & -13200 & -66000 & 0 & 38981.25 & 37125 \\ 0 & 66000 & 220000 & 0 & 37125 & 990000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 800 \\ -12000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> K1 = [ 3911.11111 0 -29333.33333 -3911.11111 0 -29333.33333 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 29333.33333 0 0 -29333.33333 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; -29333.33333 0 29333.33333
29333.33333 0 146666.6667 0 0 0 0 0 0 0 0; -3911.11111 0 29333.33333 3911.11111
0 29333.33333 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 -29333.33333 0 0 29333.33333 0 0 0 0 0 0 0 0
0; -29333.33333 0 146666.6667 29333.33333 0 29333.33333 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K1 =

1.0e+005 *

Columns 1 through 8

0.0391	0	-0.2933	-0.0391	0	-0.2933	0	0
0	0.2933	0	0	-0.2933	0	0	0
-0.2933	0	0.2933	0.2933	0	1.4667	0	0
-0.0391	0	0.2933	0.0391	0	0.2933	0	0
0	-0.2933	0	0	0.2933	0	0	0
-0.2933	0	1.4667	0.2933	0	0.2933	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 15

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

```
>> K2 = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 4400000 0 0 -4400000 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 13200 66000
0 -13200 66000 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 66000 4400000 0 -66000 220000 0 0 0 0 0 0; 0 0
-400000 0 0 4400000 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 -13200 -66000 0 -13200 -66000 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 66000 220000 0 -66000 4400000 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K2 =

Columns 1 through 6

[illegible]

Columns 7 through 12

[illegible]

Columns 13 through 15

[illegible]

```
>> K3 = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 5500000 0 0 -5500000 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 25781.25 103125 0 -25781.25 103125 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 103125 550000 0
-103125 275000 0 0 0; 0 0 0 0 0 -5500000 0 0 5500000 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
-25781.25 -103125 0 25781.25 -103125 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 103125 275000 0 -103125
550000 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K3 =

1.0e+006 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	5.5000	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0258
0	0	0	0	0	0	0	0.1031
0	0	0	0	0	0	-5.5000	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0258
0	0	0	0	0	0	0	0.1031
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 15

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	-5.5000	0	0	0	0	0
0.1031	0	-0.0258	0.1031	0	0	0
0.5500	0	-0.1031	0.2750	0	0	0
0	5.5000	0	0	0	0	0
-0.1031	0	0.0258	-0.1031	0	0	0
0.2750	0	-0.1031	0.5500	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

```
>> K4 = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 637009.2379 -1098899.935 19053.11778 0 0 0 0 0 0
-637009.2379 1098899.935 19053.1178; 0 0 0 -1098899.935 19053.11778 11000.64537
0 0 0 0 0 1098899.935 -19053.11778 11000.64537; 0 0 0 19053.11778 11000.64537
254041.5704 0 0 0 0 0 -19053.11778 -11000.64537 127020.7852; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 -637009.2379 1098899.935 -19053.11778 0 0 0 0
0 637009.2379 -1098899.935 -19053.1178; 0 0 0 1098899.935 -19053.11778 -11000.64537
0 0 0 0 0 0 19053.11778 -11000.64537; 0 0 0 19053.11778 11000.64537 127020.7852 0 0 0
0 0 -19053.11778 -11000.64537 254041.5704]
```


K4 =

1.0e+006 *

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.6370	-1.0989	0.0191	0	0	0	0	0	0	-0.6370	1.0989	0.0191	
0	0	0	-1.0989	0.0191	0.0110	0	0	0	0	0	0	1.0989	-0.0191	0.0110	
0	0	0	0.0191	0.0110	0.2540	0	0	0	0	0	0	-0.0191	-0.0110	0.1270	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.6370	1.0989	-0.0191	0	0	0	0	0	0	0.6370	-1.0989	-0.0191	
0	0	0	1.0989	-0.0191	-0.0110	0	0	0	0	0	0	0	0.0191	-0.0110	
0	0	0	0.0191	0.0110	0.1270	0	0	0	0	0	0	-0.0191	-0.0110	0.2540	

>> KT = K1 + K2 + K3 + K4

KT =

1.0e+006 *

0.0039	0	-0.0293	-0.0039	0	-0.0293	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0293	0	0	0	-0.0293	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0293	0	0.0293	0.0293	0	0.1467	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0039	0	0.0293	5.0409	-1.0989	0.0484	-4.4000	0	0	0	0	0	-0.6370	1.0989	0.0191	
0	-0.0293	0	-1.0989	0.0616	0.0770	0	-0.0132	0.0660	0	0	0	1.0989	-0.0191	0.0110	
-0.0293	0	0.1467	0.0484	0.0770	4.6834	0	-0.0660	0.2200	0	0	0	-0.0191	-0.0110	0.1270	
0	0	0	-0.4000	0	0	9.9000	0	0	-5.5000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0132	-0.0660	0	0.0126	0.0371	0	-0.0258	0.1031	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0660	0.2200	0	0.0371	4.9500	0	-0.1031	0.2750	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-5.5000	0	0	5.5000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0258	-0.1031	0	0.0258	-0.1031	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.1031	0.2750	0	-0.1031	0.5500	0	0	0	0
0	0	0	-0.6370	1.0989	-0.0191	0	0	0	0	0	0	0.6370	-1.0989	-0.0191	
0	0	0	1.0989	-0.0191	-0.0110	0	0	0	0	0	0	0	0.0191	-0.0110	
0	0	0	0.0191	0.0110	0.1270	0	0	0	0	0	0	-0.0191	-0.0110	0.2540	

>> KR = [5040920.349 -1098899.935 48386.45112 -4400000 0 0; -1098899.935 4852368.475 77000.64537 0 -13200 66000; 48386.45112 77000.64537 987374.9038 0 -66000 2520000; -4400000 0 0 9900000 0 0; 0 -13200 -66000 0 38981.25 37125; 0 66000 220000 0 37125 990000]

KR =

1.0e+006 *

5.0409	-1.0989	0.0484	-4.4000	0	0
-1.0989	4.8524	0.0770	0	-0.0132	0.0660
0.0484	0.0770	0.9874	0	-0.0660	2.5200
-4.4000	0	0	9.9000	0	0
0	-0.0132	-0.0660	0	0.0390	0.0371
0	0.0660	0.2200	0	0.0371	0.9900

```
>> f = [ 0; -8000; 800; -12000; 0; 0]
```

```
f =
```

```
    0
 -8000
   800
-12000
     0
     0
```

```
>> u = inv(KR)*f
```

```
u =
```

```
-0.0026
-0.0023
 0.0051
-0.0024
 0.0092
-0.0013
```

```
>> U = [ 0; 0; 0; -0.0026; -0.0023; 0.0051; -0.0024; 0.0092; -0.0013; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
U =
```

```
    0
    0
    0
 -0.0026
 -0.0023
  0.0051
 -0.0024
  0.0092
 -0.0013
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

```
>> F = KT * U
```

```
F =
```

```
1.0e+004 *
-0.0139
 0.0067
 0.0672
 0.0228
 0.2901
 2.2689
-2.2720
-0.0239
-0.5123
 1.3200
-0.0103
 0.0591
-0.0968
-0.2869
 0.0573
```


[illegible]

[illegible]

$k_{3-4} = \frac{280 \times 10^9 \text{ Pa}}{20\text{m}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.0006	0	0	-0.0006	0
0	0	0	0	0	0	0	0.00000024	0.00000024	0	-0.00000024	0.00000024
0	0	0	0	0	0	0	0.00000024	0.000032	0	-0.00000024	0.000016
0	0	0	0	0	0	-0.0006	0	0	0.0006	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.00000024	-0.00000024	0	0.00000024	-0.00000024
0	0	0	0	0	0	0	0.00000024	0.000016	0	-0.00000024	0.000032

$$k_{3-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8400000 & 0 & 0 & -8400000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3360 & 33600 & 0 & -3360 & 3360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33600 & 448000 & 0 & -33600 & 224000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8400000 & 0 & 0 & 8400000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3360 & -3360 & 0 & 3360 & -3360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 224000 & 33600 & 0 & -33600 & 448000 \end{bmatrix}$$

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

```
>> K2 = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 52500 0 -210000 -52500 0 -210000 0 0 0; 0 0 0 0 210000 0 0 -210000 0 0 0
0; 0 0 0 -210000 0 1120000 210000 0 560000 0 0 0; 0 0 0 -52500 0 210000 52500 0
210000 0 0 0; 0 0 0 0 -210000 0 0 210000 0 0 0 0; 0 0 0 -210000 0 560000 210000
0 -1120000 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0]
```

K2 =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	52500	0	-210000
0	0	0	0	210000	0
0	0	0	-210000	0	1120000
0	0	0	-52500	0	210000
0	0	0	0	-210000	0
0	0	0	-210000	0	560000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-52500	0	-210000	0	0	0
0	-210000	0	0	0	0
210000	0	560000	0	0	0
52500	0	210000	0	0	0
0	210000	0	0	0	0
210000	0	-1120000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

```
>> K3 = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 8400000 0 0 -8400000 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 3360 33600 0 -3360 3360; 0 0 0
0 0 0 0 33600 448000 0 -33600 224000; 0 0 0 0 0 0 -8400000 0 0 8400000 0 0; 0 0
0 0 0 0 -3360 -3360 0 3360 -3360; 0 0 0 0 0 0 224000 33600 0 -33600 448000]
```

K3 =

Columns 1 through 6

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
8400000	0	0	-8400000	0	0
0	3360	33600	0	-3360	3360
0	33600	448000	0	-33600	224000
-8400000	0	0	8400000	0	0
0	-3360	-3360	0	3360	-3360
0	224000	33600	0	-33600	448000

>> KT = K1 + K2 + K3

KT =

1.0e+007 *

Columns 1 through 8

0.0124	0	-0.0373	-0.0124	0	-0.0373	0	0
0	0.0000	0	0	-2.8000	0	0	0
-0.0373	0	0.1493	0.0373	0	0.0747	0	0
-0.0124	0	0.0373	0.0177	0	0.0163	-0.0053	0
0	0.0000	0	0	-2.7790	0	0	-0.0210
-0.0373	0	0.0747	0.0163	0	0.2613	0.0210	0
0	0	0	-0.0053	0	0.0210	0.8452	0
0	0	0	0	-0.0210	0	0	0.0213
0	0	0	-0.0210	0	0.0560	0.0210	0.0034
0	0	0	0	0	0	-0.8400	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0003
0	0	0	0	0	0	0	0.0224

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.0210	0	0	0
0	0	0	0
0.0560	0	0	0
0.0210	-0.8400	0	0
0.0034	0	-0.0003	0.0003
-0.0672	0	-0.0034	0.0224
0	0.8400	0	0
-0.0003	0	0.0003	-0.0003
0.0034	0	-0.0034	0.0448

```
>> KR = [ 176944.4444 0 163333.3333 -52500 0 -210000; 0 49000000 0 0 -21000000 0;
163333.3333 0 261333.333 210000 0 560000; -52500 0 210000 8452500 0 210000; 0
-21000000 0 0 21003360 33600; -210000 0 560000 210000 33600 1568000]
```

```
KR =
```

```
1.0e+007 *
```

```
0.0177      0      0.0163    -0.0053      0    -0.0210
      0    4.9000      0      0      0    -2.1000      0
0.0163      0    0.2613    0.0210      0    0.0560
-0.0053      0    0.0210    0.8452      0    0.0210
      0    -2.1000      0      0    2.1003    0.0034
-0.0210      0    0.0560    0.0210    0.0034    0.1568
```

```
>> f = [ 0; 0; 700; 0; -1500; -5000]
```

```
f =
```

```
0
0
700
0
-1500
-5000
```

```
>> u = inv(KR)*f
```

```
u =
```

```
-0.0073
-0.0000
0.0017
0.0000
-0.0001
-0.0048
```

```
>> U = [ 0; 0; 0; -0.0073; 0; 0.0017; 0; -0.0001; -0.0048; 0; 0; 0]
```

```
U =
```

```
0
0
0
-0.0073
0
0.0017
0
-0.0001
-0.0048
0
0
0
```

```
>> F = KT * U
```

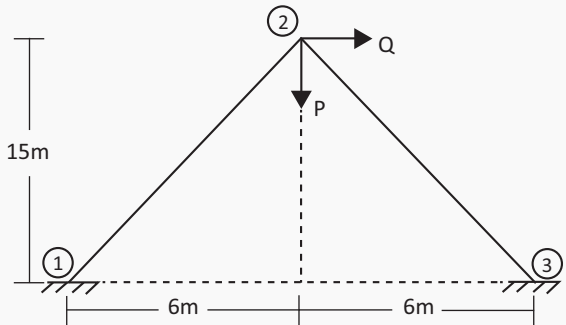
```
F =
```

```
1.0e+003 *
```

```
0.2738
0
-1.4560
-0.0060
0.0210
0.5623
-0.2677
-0.1826
5.7072
0
0.0165
-0.1837
```


EJERCICIO 4

Hallar los Desplazamientos Nodales y las Cargas generadas en la estructura mostrada.



$E = 260\text{GPa}$
 $A = 8 \times 10^{-2}\text{m}^2$
 $P = 120\text{KN}$

Nodos: 1 – 2; 2 – 3

A. Resolución

Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1 – 2	68.19°	0.37	0.92	0.14	0.86	0.34
2 – 3	291.8°	0.37	-0.92	0.14	0.86	-0.34

$$K_1 = 10^9 \begin{bmatrix} 0.1806 & 0.4376 & -0.0027 & -0.1806 & -0.4376 & -0.0027 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4376 & 1.1073 & 0.0011 & -0.4376 & -1.1073 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0027 & 0.0011 & 0.0322 & 0.0027 & -0.0011 & 0.0161 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1806 & -0.4376 & 0.0027 & 0.1806 & 0.4376 & 0.0027 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4376 & -0.1073 & -0.0027 & 0.4376 & 1.1073 & -0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0027 & 0.0011 & 0.0161 & 0.0027 & -0.0011 & 0.0322 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1806 & -0.4376 & 0.0027 & -0.1806 & 0.4376 & -0.0027 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4376 & 1.1073 & 0.0011 & 0.4376 & -1.1073 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0027 & 0.0011 & 0.0322 & -0.0027 & -0.0011 & 0.0161 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1806 & 0.4376 & -0.0027 & 0.1806 & -0.4376 & -0.0027 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4376 & -1.1073 & 0.0027 & -0.4376 & 1.1073 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0027 & 0.0011 & 0.0161 & -0.0027 & -0.0011 & 0.0322 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

$$KT = 10^9 \begin{bmatrix} 0.1806 & 0.4376 & -0.0027 & -0.1806 & -0.4376 & -0.0027 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4376 & 1.1073 & 0.0011 & -0.4376 & -1.1073 & 0.0011 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0027 & 0.0011 & 0.0322 & 0.0027 & 0.0011 & 0.0161 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1806 & -0.4376 & 0.0027 & 0.3611 & 0 & 0.0055 & -0.1806 & 0.4376 & -0.0027 \\ -0.4376 & -1.1073 & -0.0027 & 0 & 2.2147 & 0 & 0.4376 & -1.1073 & 0.0011 \\ -0.0027 & 0.0011 & -0.0161 & 0.0055 & 0 & 0.0644 & -0.0027 & -0.0011 & 0.0161 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1806 & 0.4376 & -0.0027 & 0.1806 & -0.4376 & -0.0027 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4376 & -1.1073 & -0.0027 & -0.4376 & 1.1073 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0027 & 0.0011 & 0.0161 & -0.0027 & -0.0011 & 0.0322 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ \gamma_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ M_1 \\ 150000N \\ -120000N \\ 0 \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Eliminando filas y columnas:

$$K = 10^9 \begin{bmatrix} 0.3611 & 0 & 0.0055 \\ 0 & 2.2147 & 0 \\ 0.0055 & 0 & 0.0644 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \gamma_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150000N \\ -120000N \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> K1 = (10^9)*[ 0.1806 0.4376 -0.0027 -0.1806 -0.4376 -0.0027 0 0 0; 0.4376 1.1073
-0.0011 -0.4376 -1.1073 0.0011 0 0 0; -0.0027 0.0011 0.0322 0.0027 -0.0011 0.0161
0 0 0; -0.1806 -0.4376 0.0027 0.1806 0.4376 0.0027 0 0 0; -0.4376 -0.1073 -0.0027
0.4376 1.1073 -0.0011 0 0 0; -0.0027 0.0011 0.0161 0.0027 -0.0011 0.0322 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K1 =

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

```
0.1806    0.4376   -0.0027   -0.1806   -0.4376   -0.0027         0         0
0.4376    1.1073   -0.0011   -0.4376   -1.1073    0.0011         0         0
-0.0027    0.0011    0.0322    0.0027   -0.0011    0.0161         0         0
-0.1806   -0.4376    0.0027    0.1806    0.4376    0.0027         0         0
-0.4376   -0.1073   -0.0027    0.4376    1.1073   -0.0011         0         0
-0.0027    0.0011    0.0161    0.0027   -0.0011    0.0322         0         0
0          0          0          0          0          0          0         0
0          0          0          0          0          0          0         0
0          0          0          0          0          0          0         0
```

Column 9

```
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

```
>> K2 = (10^9)*[ 0.0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0.1806 -0.4376 0.0027 -0.1806 0.4376 -0.0027; 0 0 0 -0.4376 1.1073 0.0011 0.4376
-1.1073 0.0011; 0 0 0 0.0027 0.0011 0.0322 -0.0027 -0.0011 0.0161; 0 0 0 -0.1806
0.4376 -0.0027 0.1806 -0.4376 -0.0027; 0 0 0 0.4376 -1.1073 0.0027 -0.4376 1.1073
-0.0011; 0 0 0 0.0027 0.0011 0.0161 -0.0027 -0.0011 0.0322]
```

K2 =

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.1806	-0.4376	0.0027	-0.1806	0.4376
0	0	0	-0.4376	1.1073	0.0011	0.4376	-1.1073
0	0	0	0.0027	0.0011	0.0322	-0.0027	-0.0011
0	0	0	-0.1806	0.4376	-0.0027	0.1806	-0.4376
0	0	0	0.4376	-1.1073	0.0027	-0.4376	1.1073
0	0	0	0.0027	0.0011	0.0161	-0.0027	-0.0011

Column 9

0
0
0
-0.0027
0.0011
0.0161
-0.0027
-0.0011
0.0322

```
>> KT = K1 + K2
```

KT =

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

0.1806	0.4376	-0.0027	-0.1806	-0.4376	-0.0027	0	0
0.4376	1.1073	-0.0011	-0.4376	-1.1073	0.0011	0	0
0.0027	0.0011	0.0322	0.0027	-0.0011	0.0161	0	0
0.1306	-0.4376	0.0027	0.3612	0	0.0054	-0.1806	0.4376
-0.4376	-0.1073	-0.0027	0	2.2146	0	0.4376	-1.1073
-0.0027	0.0011	0.0161	0.0054	0	0.0644	-0.0027	-0.0011
0	0	0	-0.1806	0.4376	-0.0027	0.1806	-0.4376
0	0	0	0.4376	-1.1073	0.0027	-0.4376	1.1073
0	0	0	0.0027	0.0011	0.0161	-0.0027	-0.0011

Column 9

0
0
0
-0.0027
0.0011
0.0161
-0.0027
-0.0011
0.0322

```
>> KR = (10^9)*[ 0.3611 0 0.0055; 0 2.2147 0; 0.0055 0 0.0644]
```

```
KR =
```

```
1.0e+009 *
```

```
    0.3611         0         0.0055
         0      2.2147         0
    0.0055         0      0.0644
```

```
>> f = [ 150000; -120000; 0]
```

```
f =
```

```
    150000
   -120000
         0
```

```
>> u = inv(KR)*f
```

```
u =
```

```
1.0e-003 *
```

```
    0.4159
   -0.0542
   -0.0355
```

```
>> U = [ 0; 0; 0; 0.4159; -0.0542; -0.0355; 0; 0; 0]
```

```
U =
```

```
         0
         0
         0
    0.4159
   -0.0542
   -0.0355
         0
         0
         0
```

```
>> F = KT * U
```

```
F =
```

```
   -51297770
  -122021230
    611000
   150031380
  -120031320
    -40340
   -98733610
   241917650
    491760
```


$$K_3 = 10^8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0063 & 0 & 0.0469 & -0.0063 & 0 & 0.0469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.8000 & 0 & 0 & -8.8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0063 & 0 & 0.4693 & -0.0469 & 0 & 0.2347 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0063 & 0 & -0.0469 & 0.0063 & 0 & -0.0469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.8000 & 0.0469 & 0 & 8.8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0469 & 0 & 0.2347 & -0.0469 & 0 & 0.4693 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_T = 10^9 \begin{bmatrix} 0.3300 & 0.1892 & -0.0006 & -0.330 & -0.1892 & -0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1892 & 0.1101 & 0.0010 & -0.189 & -0.1101 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0.0010 & 0.0235 & 0.0006 & -0.0010 & 0.0117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.330 & -0.189 & 0.0006 & 2.9700 & 0.1892 & 0.0006 & -2.6400 & 0 & -0.0035 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1892 & -0.110 & -0.0006 & 0.1892 & 0.1270 & 0.0412 & 0 & -0.0169 & 0.0422 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0.0010 & 0.0117 & 0.0006 & 0.0412 & 0.1643 & 0 & -0.042 & 0.0704 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.640 & 0 & 0 & 2.6406 & 0 & 0.0047 & -0.0006 & 0 & 0.0047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0169 & 0 & 0 & 0.8969 & -0.0422 & 0 & -0.880 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0422 & 0.0704 & 0.0047 & -0.042 & 0.1877 & -0.0047 & 0 & 0.0235 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0006 & 0 & -0.0047 & 0.0006 & 0 & -0.0047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.880 & 0.0047 & 0 & 0.880 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0047 & 0 & 0.0235 & -0.0047 & 0 & 0.0469 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ \gamma_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \gamma_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ M_1 \\ 0 \\ -150000N \\ -125000Nm \\ -120000N \\ -150000N \\ 125000Nm \\ 0 \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Eliminando filas y columnas:

$$K = 10^9 \begin{bmatrix} 2.9700 & 0.1892 & 0.0006 & -2.6400 & 0 & -0.0035 \\ 0.1892 & 0.1270 & 0.0412 & 0 & -0.0169 & 0.0422 \\ 0.0006 & 0.0412 & 0.1643 & 0 & -0.0422 & 0.0704 \\ -2.6400 & 0 & 0 & 2.6406 & 0 & 0.0047 \\ 0 & -0.0169 & 0 & 0 & 0.8969 & -0.0422 \\ 0 & 0.0422 & 0.0704 & 0.0047 & -0.0422 & 0.1877 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ -150N \\ -125Nm \\ -120N \\ -150N \\ 125Nm \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> K1 = (10^8)*[33002 1.8917 -0.0059 -3.3002 -1.8917 -0.0059 0 0 0 0 0 0; 1.8917
1.1006 0.0102 -1.8917 -1.1006 0.0102 0 0 0 0 0 0; -0.0059 0.0102 0.2347 0.0059
-0.0102 0.1173 0 0 0 0 0 0; -3.3002 -1.8917 0.0059 3.3002 1.8917 0.0059 0 0 0 0
0 0; -1.8917 -1.1006 -0.0059 1.8917 1.1006 -0.0102 0 0 0 0 0 0; -0.0059 0.0102
0.1173 0.0059 -0.0102 0.2347 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K1 =

1.0e+12 *

Columns 1 through 8

3.3002	0.0002	-0.0000	-0.0003	-0.0002	-0.0000	0	0
0.0002	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0001	0.0000	0	0
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0	0
-0.0003	-0.0002	0.0000	0.0003	0.0002	0.0000	0	0
-0.0002	-0.0001	-0.0000	0.0002	0.0001	-0.0000	0	0
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

```
>> K2 =(10^9)* [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 2.6400 0 0 -2.6400 0 -0.0035 0 0 0; 0 0 0 0 0.0169 0.0422 0
-0.0169 0.0422 0 0 0; 0 0 0 0 0.0422 0.1408 0 -0.0422 0.0704 0 0 0; 0 0 0 -2.6400
0 0 2.6400 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 -0.0169 0 0 0.0169 -0.0422 0 0 0; 0 0 0 0 0.0422
0.0704 0 -0.0422 0.1408 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K2 =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2.6400	0	0	-2.6400	0
0	0	0	0	0.0169	0.0422	0	-0.0169
0	0	0	0	0.0422	0.1408	0	-0.0422
0	0	0	-2.6400	0	0	2.6400	0
0	0	0	0	-0.0169	0	0	0.0169
0	0	0	0	0.0422	0.0704	0	-0.0422
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.0035	0	0	0
0.0422	0	0	0
0.0704	0	0	0
0	0	0	0
-0.0422	0	0	0
0.1408	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

```
>> K3 = (10^8)*[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
0; 0 0 0 0 0 0 0.0063 0 0.0469 -0.0063 0 0 0.0469; 0 0 0 0 0 0 0 8.8000 0 0 -8.8000  
0; 0 0 0 0 0 0 -0.0063 0 0.4693 -0.0469 0 0.2347; 0 0 0 0 0 0 -0.0063 0 -0.0469  
0.0063 0 -0.0469; 0 0 0 0 0 0 0 -8.8000 0.0469 0 8.8000 0; 0 0 0 0 0 0 0 0.0469 0  
0.2347 -0.0469 0 0.4693]
```

K3 =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0063	0
0	0	0	0	0	0	0	8.8000
0	0	0	0	0	0	-0.0063	0
0	0	0	0	0	0	-0.0063	0
0	0	0	0	0	0	0	-8.8000
0	0	0	0	0	0	0.0469	0

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0469	-0.0063	0	0.0469
0	0	-8.8000	0
0.4693	-0.0469	0	0.2347
-0.0469	0.0063	0	-0.0469
0.0469	0	8.8000	0
0.2347	-0.0469	0	0.4693


```
>> KT = K1 + K2 + K3
```

```
KT =
```

```
1.0e+12 *
```

```
Columns 1 through 8
```

3.3002	0.0002	-0.0000	-0.0003	-0.0002	-0.0000	0	0
0.0002	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0001	0.0000	0	0
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0	0
-0.0003	-0.0002	0.0000	0.0030	0.0002	0.0000	-0.0026	0
-0.0002	-0.0001	-0.0000	0.0002	0.0001	0.0000	0	-0.0000
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0	-0.0000
0	0	0	-0.0026	0	0	0.0026	0
0	0	0	0	-0.0000	0	0	0.0009
0	0	0	0	0.0000	0.0001	-0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0009
0	0	0	0	0	0	0.0000	0

```
Columns 9 through 12
```

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.0000	0	0	0
0.0000	0	0	0
0.0001	0	0	0
0.0000	-0.0000	0	0.0000
-0.0000	0	-0.0009	0
0.0002	-0.0000	0	0.0000
-0.0000	0.0000	0	-0.0000
0.0000	0	0.0009	0
0.0000	-0.0000	0	0.0000

```
>> KR = (10^9)*[2.9700 0.1892 0.0006 -2.6400 0 -0.0035; 0.1892 0.1270 0.0412 0  
-0.0169 0.0422; 0.0006 0.0412 0.1643 0 -0.0422 0.0704; -2.6400 0 0 2.6406 0 0.0047;  
0 -0.0169 0 0 0.8969 -0.0422; 0 0.0422 0.0704 0.0047 -0.0422 0.1877]
```

```
KR =
```

```
1.0e+09 *
```

2.9700	0.1892	0.0006	-2.6400	0	-0.0035
0.1892	0.1270	0.0412	0	-0.0169	0.0422
0.0006	0.0412	0.1643	0	-0.0422	0.0704
-2.6400	0	0	2.6406	0	0.0047
0	-0.0169	0	0	0.8969	-0.0422
0	0.0422	0.0704	0.0047	-0.0422	0.1877

```
>> f = (10^3)*[ 0; -150; -125; -120; -150; 125]
```

```
f =
```

```
0  
-150000  
-125000  
-120000  
-150000  
125000
```

```

>> u = inv(KR)*f

u =
    0.0083
   -0.0151
    0.0015
    0.0082
   -0.0003
    0.0032

>> U = [10; 0; 0; 0.0083; -0.0151; 0.0015; 0.0082; -0.0003; 0.0032; 0; 0; 0]

U =
     0
     0
     0
    0.0083
   -0.0151
    0.0015
    0.0082
   -0.0003
    0.0032
     0
     0
     0

>> F = KT * U

F =
   116416
    93325
    37894
   136384
   -145105
   -132576
   -243826
   -148920
    76610
   -20174
   279008
   113562

```

Desplazamientos:

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0083\text{m} \\ -0.0151\text{m} \\ 0.0015\text{rad} \\ 0.0082\text{m} \\ -0.0003\text{m} \\ 0.0032\text{rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

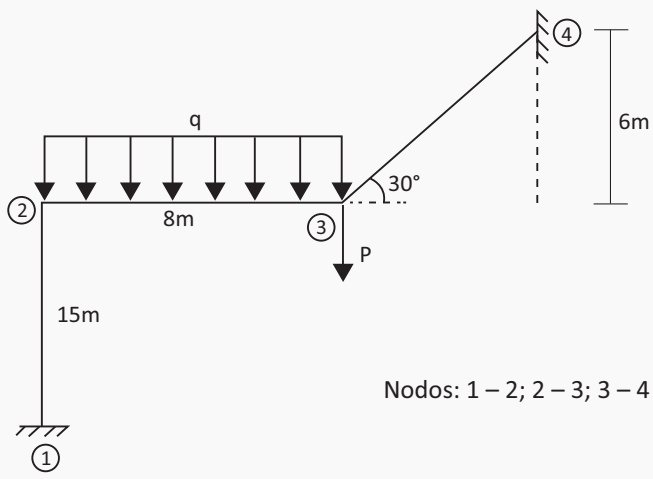
Fuerzas:

$F = K \times U$

$$F = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1.1637N \\ 0.9334N \\ 0.3788Nm \\ 1.3637N \\ -1.4487N \\ -1.3319Nm \\ -2.4385N \\ -1.4911N \\ 1.1968Nm \\ -0.2015N \\ 2.7902N \\ 1.1358Nm \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 6

Determinar los Desplazamientos y las Cargas generadas en cada nodo, en la estructura mostrada, según la secuencia indicada.



$E = 250\text{GPa}$
 $I = 6 \times 10^{-4}\text{m}^4$
 $A = 8 \times 10^{-2}\text{m}^2$
 $P = 100\text{KN}$
 $q = 30\text{KN/m}$

Nodos: 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4

A. Resolución

Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1 – 2	90°	0	1	0	1	0
2 – 3	0°	1	0	1	0	0
3 – 4	30°	0.87	0.5	0.75	0.25	0.43

$$K_1 = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 & -0.0040 & 0 & -0.0040 & -0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3333 & 0 & 0 & -1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0040 & 0 & 0.0040 & 0.0040 & 0 & 0.0200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0005 & 0 & 0.0040 & 0.0005 & 0 & 0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3333 & -0.0040 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0040 & 0 & 0.0200 & 0.0040 & 0 & 0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5000 & 0 & 0 & -2.5000 & 0 & -0.0075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0035 & 0.0141 & 0 & -0.0035 & 0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0141 & 0.0750 & 0 & -0.0141 & 0.0375 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5000 & 0 & 0 & 2.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0035 & 0 & 0.0035 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0141 & 0.0375 & 0 & -0.0141 & 0.0750 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2503 & 0.7162 & -0.0031 & -1.2503 & -0.7162 & -0.0031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7162 & 0.4174 & 0.0054 & -0.7162 & -0.4174 & 0.0054 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0031 & 0.0054 & 0.0500 & 0.0031 & -0.0054 & 0.0250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2503 & -0.7162 & 0.0031 & 0.0031 & -0.0054 & 0.0031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7162 & -0.4174 & -0.0031 & 0.7162 & 0.4174 & -0.0054 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0031 & 0.0054 & 0.0250 & 0.0031 & -0.0054 & 0.0500 \end{bmatrix}$$

Matriz Ensamblada:

KT = 10° ×	0.0005	0	-0.004	-0.0005	0	-0.0040	0	0	0	0	0	0	0	0	F _{x1}
	0	1.3333	0	0	-1.3333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	F _{y1}
	-0.0040	0	0.0040	0.0040	0	0.0200	0	0	0	0	0	0	0	0	M ₁
	-0.005	0	0.0040	2.5005	0	0.0040	-2.500	0	-0.0075	0	0	0	0	0	u ₂
	0	-1.3333	-0.004	0	1.3368	0.0141	3.7503	-0.0035	0.0141	0	0	0	0	0	γ ₂
	-0.0040	0	0.0200	0.0040	0.0141	0.1150	-0.003	-0.0141	0.0375	0	0	0	0	0	θ ₂
	0	0	0	-2.500	0	0	-1.250	0.7162	-0.0031	-1.2503	-0.7162	-0.0031	0	0	0
	0	0	0	0	-0.0035	0	-0.716	0.4210	-0.0086	-0.7162	-0.4174	0.0054	0	0	u ₃
	0	0	0	0	-0.0141	0.0375	-0.003	-0.0086	0.1250	0.0031	-0.0054	0.0250	0	0	θ ₃
	0	0	0	0	0	0	0	-0.7162	0.0031	1.2503	0.7162	0.0031	0	0	F _{x3}
	0	0	0	0	0	0	0	-0.4174	-0.0031	0.7162	0.4174	-0.0054	0	0	F _{y3}
	0	0	0	0	0	0	0	0.0054	0.0250	0.0031	-0.0054	0.0500	0	0	M ₃

Eliminando Filas y columnas:

$$K = 10^9 \begin{bmatrix} 2.5005 & 0 & 0.0040 & -2.5000 & 0 & -0.0075 \\ 0 & 1.3368 & 0.0141 & 0 & -0.0035 & 0.0141 \\ 0.0040 & 0.0141 & 0.1150 & 0 & 0.0141 & 0.0375 \\ -2.5000 & 0 & 0 & 3.7503 & 0.7162 & -0.0031 \\ 0 & -0.0035 & 0 & 0.7162 & 0.4210 & -0.0086 \\ 0 & 0.0141 & 0.0375 & -0.0031 & -0.0086 & 0.1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ -120N \\ -160Nm \\ 0 \\ -220N \\ 160Nm \end{bmatrix}$$

B. Resolución con MATLAB

```
>> K1 = (10^9)*[30.0005 0 -0.0040 0 -0.0040 -0.0040 0 0 0 0 0 0; 0 1.3333 0 0  
-1.3333 0 0 0 0 0 0 0; -0.0040 0 0.0040 0.0040 0 0.0200 0 0 0 0 0; -0.0005 0  
0.0040 0.0005 0 0.0040 0 0 0 0 0; 0 -1.3333 -0.0040 0 1.3333 0 0 0 0 0 0;  
-0.0040 0 0.0200 0.0040 0 0.0040 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0  
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;  
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K1 =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

[illegible]

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

```
>> K2 = (10^9)* [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0; 0 0 0 2.5000 0 0 -2.5000 0 -0.0075 0 0 0; 0 0 0 0 0.0035 0.0141 0 -0.0035
0.0141 0 0 0; 0 0 0 0 0.0141 0.0750 0 -0.0141 0.0375 0 0 0; 0 0 0 -2.5000 0 0
2.5000 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 -0.0035 0 0.0035 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0.0141 0.0375 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

K2 =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2.5000	0	0	-2.5000	0
0	0	0	0	0.0035	0.0141	0	-0.0035
0	0	0	0	0.0141	0.0750	0	-0.0141
0	0	0	-2.5000	0	0	2.5000	0
0	0	0	0	-0.0035	0	0.0035	0
0	0	0	0	0.0141	0.0375	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.0075	0	0	0
0.0141	0	0	0
0.0375	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

```
>> K3 = (10^9)*[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0; 0 0 0 0 0 1.2503 0.7162 -0.0031 -1.2503 -0.7162 -0.0031; 0 0 0 0 0 0 0.7162
0.4174 -0.0054 -0.7162 -0.4174 0.0054; 0 0 0 0 0 -0.0031 0.0054 0.0500 0.0031
-0.0054 0.0250; 0 0 0 0 0 -1.2503 -0.7162 0.0031 0.0031 -0.0054 0.0031; 0 0 0
0 0 0 -0.7162 -0.4174 -0.0031 0.7162 0.4174 -0.0054; 0 0 0 0 0 -0.0031 0.0054
0.0250 0.0031 -0.0054 0.0500]
```

K3 =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1.2503	0.7162
0	0	0	0	0	0	0.7162	0.4174
0	0	0	0	0	0	-0.0031	0.0054
0	0	0	0	0	0	-1.2503	-0.7162
0	0	0	0	0	0	-0.7162	-0.4174
0	0	0	0	0	0	-0.0031	0.0054

Columns 9 through 12

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.0031	-1.2503	-0.7162	-0.0031
-0.0054	-0.7162	-0.4174	0.0054
0.0500	0.0031	-0.0054	0.0250
0.0031	0.0031	-0.0054	0.0031
-0.0031	0.7162	0.4174	-0.0054
0.0250	0.0031	-0.0054	0.0500

>> KT = K1 + K2 + K3

KT =

1.0e+09 *

Columns 1 through 8

0.0005	0	-0.0040	0	-0.0040	-0.0040	0	0
0	1.3333	0	0	-1.3333	0	0	0
-0.0040	0	0.0040	0.0040	0	0.0200	0	0
-0.0005	0	0.0040	2.5005	0	0.0040	-2.5000	0
0	-1.3333	-0.0040	0	1.3368	0.0141	0	-0.0035
-0.0040	0	0.0200	0.0040	0.0141	0.0790	0	-0.0141
0	0	0	-2.5000	0	0	3.7503	0.7162
0	0	0	0	-0.0035	0	0.7197	0.4174
0	0	0	0	0.0141	0.0375	-0.0031	0.0054
0	0	0	0	0	0	-1.2503	-0.7162
0	0	0	0	0	0	-0.7162	-0.4174
0	0	0	0	0	0	-0.0031	0.0054

```

Columns 9 through 12

      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
    -0.0075    0      0      0
      0.0141    0      0      0
      0.0375    0      0      0
    -0.0031   -1.2503   -0.7162   -0.0031
    -0.0054   -0.7162   -0.4174    0.0054
      0.0500    0.0031   -0.0054    0.0250
      0.0031    0.0031   -0.0054    0.0031
    -0.0031    0.7162    0.4174   -0.0054
      0.0250    0.0031   -0.0054    0.0500

>> KR = (10^9)* [ 2.5005 0 0.0040 -2.5000 0 -0.0075; 0 1.3368 0.0141 0 -0.0035
0.0141; 0.0040 0.0141 0.1150 0 -0.0141 0.0375; -2.5000 0 0 3.7503 0.7162 -0.0031;
0 -0.0035 0 0.7162 0.4210 -0.0086; 0 0.0141 0.0375 -0.0031 -0.0086 0.1250]

KR =

1.0e+09 *

      2.5005      0      0.0040     -2.5000      0     -0.0075
      0      1.3368      0.0141      0     -0.0035      0.0141
      0.0040      0.0141      0.1150      0     -0.0141      0.0375
     -2.5000      0      0      3.7503      0.7162     -0.0031
      0     -0.0035      0      0.7162      0.4210     -0.0086
      0      0.0141      0.0375     -0.0031     -0.0086      0.1250

>> f = (10^3)*[ 0; -120; -160; 0; -220; 160]

f =

      0
    -120000
    -160000
      0
    -220000
     160000

>> u = inv(KR)*f

u =

      0.0120
     -0.0001
     -0.0049
      0.0120
     -0.0209
      0.0016

>> U = [0; 0; 0; 0.0120; -0.0001; -0.0049; 0.0120; -0.0209; 0.0016; 0; 0; 0]

U =

      0
      0
      0
     0.0120
    -0.0001
     0.0049
     0.0120
    -0.0209
     0.0016
      0
      0
      0

```



```
>> F = HT * U
```

```
F =
```

```
1.0e+05 *
```

```
0.2000
```

```
1.3333
```

```
-0.5000
```

```
-0.2560
```

```
-1.0706
```

```
0.1418
```

```
0.3006
```

```
-0.9555
```

```
-2.5522
```

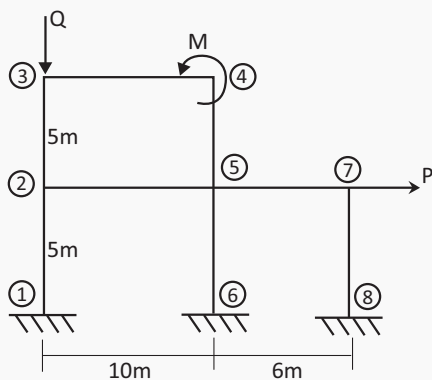
```
-0.3006
```

```
1.2430
```

```
-1.1006
```

EJERCICIO 7

Determinar los Desplazamientos y las Cargas generadas en cada nodo, en la estructura mostrada, según la secuencia indicada.



$$E = 280\text{GPa}$$

$$I = 6 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$A = 4 \times 10^{-4}\text{m}^2$$

$$P = 2000\text{N}$$

$$Q = 4000\text{N}$$

$$M = 500\text{Nm}$$

Nodos: 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4; 4 – 5; 2 – 5;
5 – 6; 5 – 7; 7 – 8

A. Resolución

Elemento	Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1	1 – 2	90°	0	1	0	1	0
2	2 – 3	90°	0	1	0	1	0
3	3 – 4	0°	1	0	1	0	0
4	4 – 5	270°	0	-1	0	1	0
5	2 – 5	0°	1	0	1	0	0
6	5 – 6	270°	0	-1	0	1	0
7	5 – 7	0°	1	0	1	0	0
8	7 – 8	270°	0	-1	0	1	0

$$K_{4-5} = \frac{E}{L} = \frac{(280 \times 10^9)}{5m} = 56000000000 [M]$$

[illegible]

$$K_{2-5} = \frac{E}{L} = \frac{(280 \times 10^9)}{10m} = 28000000000 [M]$$

[illegible]

11522560	0	0	-161280	0	-403200	0	0	0	-11200000	0	0	0	0	0	u_1	0
0	44820160	100800	0	-22400000	0	0	0	0	-20160	100800	0	0	0	0	v_1	0
0	100800	3360000	403200	0	672000	0	0	0	-100800	336000	0	0	0	0	θ_1	0
-161280	0	403200	11361280	0	403200	-11200000	0	0	0	0	0	0	0	0	u_1	0
0	-22400000	0	0	22420160	100800	0	-20160	100800	0	0	0	0	0	0	v_1	-4000
-403200	0	672000	403200	100800	2016000	0	-100800	336000	0	0	0	0	0	0	θ_1	0
0	0	0	-11200000	0	0	11361280	0	403200	-161280	0	403200	0	0	0	u_1	0
0	0	0	0	-20160	-100800	0	22420160	-100800	0	-224000000	0	0	0	0	v_1	= 0
0	0	0	0	100800	336000	403200	-100800	2016000	-403200	0	672000	0	0	0	θ_1	500
-11200000	0	0	0	0	-161280	0	-403200	30189226.67	0	0	-18666666.67	0	0	0	u_1	0
0	-20160	100800	0	0	0	-22400000	0	0	44913493.33	179200	0	-93333.33333	280000	v_1	θ_1	0
0	100800	336000	0	0	0	403200	0	672000	179200	4480000	0	-280000	560000	θ_1	θ_1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-18666666.67	0	0	18827946.67	0	403200	v_1	2000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-93333.33333	-280000	0	v_1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	280000	560000	403200	-280000	2464000	θ_1	θ_1	0

B. Resolución con MATLAB

```
>> K = [11522560 0 0 -161280 0 -403200 0 0 0 -11200000 0 0 0 0; 0 44820160 100800  
0 -22400000 0 0 0 0 -20160 100800 0 0 0; 0 100800 3360000 403200 0 672000 0 0 0 0  
-100800 336000 0 0 0; -161280 0 403200 11361280 0 403200 -11200000 0 0 0 0 0 0;  
0 -22400000 0 0 22420160 100800 0 -20160 100800 0 0 0 0 0; -403200 0 672000 403200  
100800 2016000 0 -100800 336000 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 -11200000 0 0 11361280 0 403200  
-161280 0 403200 0 0 0; 0 0 0 0 -20160 -100800 0 22420160 -100800 0 -2240000 0 0 0  
0; 0 0 0 0 100800 336000 403200 -100800 2016000 -403200 0 672000 0 0 0; -11200000  
0 0 0 0 0 -161280 0 -403200 30189226.67 0 0 -18666666.67 0 0; 0 -20160 100800 0 0  
0 0 -22400000 0 0 4491349.33 179200 0 -93333.33333 280000; 0 100800 336000 0 0 0  
403200 0 672000 0 179200 4480000 0 -280000 560000; 0 0 0 0 0 0 0 0 -18666666.67  
0 0 18827946.67 0 403200; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -93333.33333 -280000 0 22493333.33  
-280000; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 280000 560000 403200 -280000 2464000}
```

K =

1.0e+007 *

Columns 1 through 12

1.1523	0	0	-0.0161	0	-0.0403	0	0	0	-1.1200	0	0
0	4.4820	0.0101	0	-2.2400	0	0	0	0	0	-0.0020	0.0101
0	0.0101	0.3360	0.0403	0	0.0672	0	0	0	0	-0.0101	0.0336
-0.0161	0	0.0403	1.1361	0	0.0403	-1.1200	0	0	0	0	0
0	-2.2400	0	0	2.2420	0.0101	0	-0.0020	0.0101	0	0	0
-0.0403	0	0.0672	0.0403	0.0101	0.2016	0	-0.0101	0.0336	0	0	0
0	0	0	-1.1200	0	0	1.1361	0	0.0403	-0.0161	0	0.0403
0	0	0	0	-0.0020	-0.0101	0	2.2420	-0.0101	0	-0.2240	0
0	0	0	0	0.0101	0.0336	0.0403	-0.0101	0.2016	-0.0403	0	0.0672
-1.1200	0	0	0	0	0	-0.0161	0	-0.0403	3.0189	0	0
0	-0.0020	0.0101	0	0	0	0	-2.2400	0	0	0.4491	0.0179
0	0.0101	0.0336	0	0	0	0.0403	0	0.0672	0	0.0179	0.4480
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.8667	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0093	-0.0280
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0280	0.0560

Columns 13 through 15

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
-1.8667	0	0	0
0	-0.0093	0.0280	0
0	-0.0280	0.0560	0
1.8828	0	0.0403	
0	2.2493	-0.0280	
0.0403	-0.0280	0.2464	

$$K_T =$$

1.0e+008 *

Columns 1 through 12

[illegible]

Columns 13 through 24

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.1120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0002	0.0010	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0.0010	0.0034	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0.0040	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-2.2400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0040	0	0.0067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.3019	0	0	-0.0016	0	0.0040	-0.1867	0	0	0	0	0	0
	0	0.4491	0.0018	0	-0.2240	0	0	0.0009	0.0028	0	0	0
	0	0.0018	0.0448	-0.0040	0	0.0067	0	-0.0028	0.0056	0	0	0
-0.0016	0	-0.0040	0.0016	0	-0.0040	0	0	0	0	0	0	0
	0	-2.2400	0	0	0.2240	0	0	0	0	0	0	0
0.0040	0	0.0067	-0.0040	0	0.0134	0	0	0	0	0	0	0
-0.1867	0	0	0	0	0	0.1883	0	0.0040	-0.0016	0	0.0040	0
	0	-0.0009	-0.0028	0	0	0	0.2249	-0.0028	0	-0.2240	0	0
	0	0.0028	0.0056	0	0	0	0.0040	-0.0028	0.0246	-0.0040	0	0.0067
	0	0	0	0	0	0	-0.0016	0	-0.0040	0.0016	0	-0.0040
	0	0	0	0	0	0	0	-0.2240	0	0	0.2240	0
	0	0	0	0	0	0	0.0010	0	0.0067	-0.0040	0	0.0134

```
>> U = [ 0; 0; 0; 0.0060; -0.000172309; -0.0008; 0.0077; -0.00350935; -0.0001;
0.0077; 0.0000112; 0.0001; 0.0060; 0.0002; -0.0005; 0; 0; 0.0061; -0.0000174;
-0.0009; 0; 0; 0]
```

U =

```

0
0
0
0.0060
-0.0002
-0.0008
0.0077
-0.0035
-0.0001
0.0077
0.0000
0.0001
0.0060
0.0002
-0.0005
0
0
0
0.0061
-0.0000
-0.0009
0
0
0
```

```
>> F = KT * U
```

F =

```

1.0e+004 *
-0.0645
0.3860
0.1882
0.0734
7.0751
0.0144
-0.8795
-7.4821
-0.0375
0.0113
-4.4478
0.0163
-0.1213
0.8311
0.0182
-0.0766
-4.4800
0.2083
0.2488
-0.0018
0.0023
-0.0621
0.0390
0.0025
```

Desplazamientos Nodales:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0\text{m} \\
 v_1 &= 0\text{m} \\
 \theta_1 &= 0\text{rad} \\
 u_2 &= 0.005937122\text{m} \\
 v_2 &= -0.000172309\text{m} \\
 \theta_2 &= -0.00084053\text{rad} \\
 u_3 &= 0.007576456\text{m} \\
 v_3 &= -0.000350935\text{m} \\
 \theta_3 &= -5.24127\text{E} - 05\text{rad} \\
 u_4 &= 0.007567916\text{m} \\
 v_4 &= 1.1225\text{E} - 05\text{m} \\
 \theta_4 &= 0.000136983\text{rad} \\
 u_5 &= 0.006000897\text{m} \\
 v_5 &= 1.11704\text{E} - 05\text{m} \\
 \theta_5 &= -0.000526852\text{rad} \\
 u_6 &= 0\text{m} \\
 v_6 &= 0\text{m} \\
 \theta_6 &= 0\text{rad} \\
 u_7 &= 0.006074512\text{m} \\
 v_7 &= -1.74329\text{E} - 05\text{m} \\
 \theta_7 &= -0.000877584\text{rad} \\
 u_8 &= 0\text{m} \\
 v_8 &= 0\text{m} \\
 \theta_8 &= 0\text{rad}
 \end{aligned}$$

Fuerzas:

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -765.062808\text{N} \\
 F_{1y} &= -1325.5109\text{N} \\
 M_1 &= 16.65567789\text{Nm} \\
 F_{2x} &= 5000\text{N} \\
 F_{2y} &= -3.69482\text{E} - 13\text{N} \\
 M_2 &= 2.84217\text{E} - 14\text{Nm} \\
 F_{3x} &= 0\text{N} \\
 F_{3y} &= 7.10543\text{E} - 15\text{N} \\
 M_3 &= 600\text{Nm} \\
 F_{4x} &= -4233.09764\text{N} \\
 F_{4y} &= -55.44773342\text{N} \\
 M_4 &= 145.7337248\text{Nm} \\
 F_{5x} &= -1.839551812\text{N} \\
 F_{5y} &= 1380.958634\text{N} \\
 M_5 &= 29.83718616\text{Nm} \\
 F_{6x} &= -1.839551812\text{N} \\
 F_{6y} &= 1380.958634\text{N} \\
 M_6 &= 29.83718616\text{Nm} \\
 F_{7x} &= -1.839551812\text{N} \\
 F_{7y} &= 1380.958634\text{N} \\
 M_7 &= 29.83718616\text{Nm} \\
 F_{8x} &= -1.839551812\text{N} \\
 F_{8y} &= 1380.958634\text{N} \\
 M_8 &= 29.83718616\text{Nm}
 \end{aligned}$$

Columns 13 through 18

```

      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0
-1.0000      0      0      0      0      0
      0 -0.0017 0.0100      0      0      0
      0 -0.0100 0.0400      0      0      0
      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      0
-0.0230      0      0.0576      0      0      0
      0 -2.4000      0      0      0      0
-0.0576      0      0.0960      0      0      0
 1.0364      0 -0.0176 -0.0133      0      0.0400
      0 4.4017 -0.0100      0 -2.0000      0
-0.0176 -0.0100 0.4320 -0.0400      0      0.0800
-0.0133      0 -0.0400 0.0133      0 -0.0400
      0 -2.0000      0      0      2.0000      0
-0.0400      0      0.0800 -0.0400      0      0.1600

```

```

>> KR = [10363733.34 0 -176000 -230400 0 -576000 0 0 0 -10000000 0 0; 0 44016666.67
100000 0 -24000000 0 0 0 0 -16666.66667 100000; -176000 100000 432000 576000 0
960000 0 0 0 -100000 400000; -230400 0 576000 10230400 0 576000 -10000000 0 0 0
0; 0 -24000000 0 24016666.67 100000 0 -16666.66667 100000 0 0 0; -576000 0 960000
576000 100000 2720000 0 -100000 400000 0 0 0; 0 0 0 -10000000 0 0 10230400 0 576000
-230400 0 576000; 0 0 0 -16666.66667 -100000 0 24016666.67 -100000 0 -240000000 0;
0 0 0 100000 400000 576000 -100000 2720000 -576000 0 960000; -10000000 0 0 0 0
-230400 0 -576000 10363733.33 0 -176000; 0 -16666.66667 -100000 0 0 0 0 -24000000 0
44016666.67 -100000; 0 100000 400000 0 0 0 576000 0 960000 -176000 -100000 4320000]

```

KR =

1.0e+008 *

```

 0.1036      0 -0.0018 -0.0023      0 -0.0058      0      0      0 -0.1000      0      0
      0 0.4402 0.0010      0 -0.2400      0      0      0      0      0 -0.0002 0.0010
-0.0018 0.0010 0.0432 0.0058      0 0.0096      0      0      0      0 -0.0010 0.0040
-0.0023      0 0.0058 0.1023      0 0.0058 -0.1000      0      0      0      0      0
      0 -0.2400      0      0 0.2402 0.0010      0 -0.0002 0.0010      0      0      0
-0.0058      0 0.0096 0.0058 0.0010 0.0272      0 -0.0010 0.0040      0      0      0
      0      0      0 -0.1000      0      0 0.1023      0 0.0058 -0.0023      0 0.0058
      0      0      0      0 -0.0002 -0.0010      0 0.2402 -0.0010      0 -2.4000      0
      0      0      0      0 0.0010 0.0040 0.0058 -0.0010 0.0272 -0.0058      0 0.0096
-0.1000      0      0      0      0      0 -0.0023      0 -0.0058 0.1036      0 -0.0018
      0 -0.0002 -0.0010      0      0      0 -0.2400      0      0 0.4402 -0.0010
      0 0.0010 0.0040      0      0      0 0.0058      0 0.0096 -0.0018 -0.0010 0.0432

```

```

>> f = [5000; -300; -600; 0; -360; -720; 0; -360; 1520; 0; -300; 600]

```

f =

```

 5000
 -300
 -600
      0
 -360
 -720
      0
 -360
 1520
      0
 -300
 600

```



```

>> u = inv(KR)*f

u =
    0.0303
    0.0000
   -0.0038
    0.0418
    0.0000
   -0.0013
    0.0418
    0.0001
   -0.0004
    0.0300
    0.0000
   -0.0038

>> U = [0; 0; 0; 0.0303; -0.0000134; 0.0418; 0.00000553; -0.0013; 0.0418;
   -0.0001015; -0.000414511; -0.004; 0.0300; -0.0000794; -0.0038; 0; 0; 0]

U =
     0
     0
     0
    0.0303
   -0.0000
    0.0418
    0.0000
   -0.0013
    0.0418
   -0.0001
   -0.0004
   -0.0040
    0.0300
   -0.0001
   -0.0038
     0
     0
     0

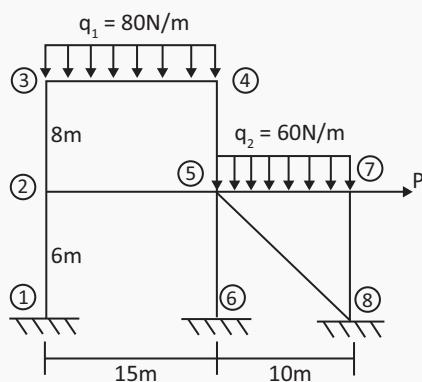
>> F = KT * U

F =
 1.0e+005 *
   -0.2076
    0.0027
    0.4556
   -0.1743
    0.3441
    2.1386
    0.4224
   -0.2711
    1.3469
   -0.1250
   -0.1181
   -0.1524
    0.1091
    0.0265
   -0.0887
   -0.0248
    0.0159
   -0.1504

```

EJERCICIO 9

Determinar los Desplazamientos y las Cargas generadas en cada nodo, en la estructura mostrada, según la secuencia indicada.



$E = 250 \text{ GPa}$

$$I = 8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$P = 2500\text{N}$$

Nodos: 1-2; 2-3; 3-4; 4-5; 5-6;
2-5; 5-7; 5-8; 7-8

A. Resolución

Elemento	Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1	1 – 2	90°	0	1	0	1	0
2	2 – 3	90°	0	1	0	1	0
3	3 – 4	0°	1	0	1	0	0
4	4 – 5	270°	0	-1	0	1	0
5	2 – 5	270°	0	-1	0	1	0
6	5 – 6	0°	1	0	1	0	0
7	5 – 7	0°	1	0	1	0	0
8	7 – 8	270°	0	-1	0	1	0
9	5 – 8	315°	0.707	-0.707	0.499	0.499	-0.499

$$K_{1-2} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{6m} = 41666666667 [M]$$

[illegible]

$$K_{4-5} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{8m} = 31250000000 [M]$$

[illegible]

$$K_{2-5} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{15\text{m}} = 16666666667 [\text{M}]$$

[illegible]

$$K_{5-6} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{6m} = 41666666667 [M]$$

[illegible]

$$K_{5-7} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{10m} = 25000000000 [M]$$

[illegible]

$$K_{7-8} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{6m} = 41666666667 [M]$$

[illegible]

$$K_{5-8} = \frac{E}{L} = \frac{(250 \times 10^9)}{11.66m} = 17680339463 [M]$$

[illegible]

B. Resolución con MATLAB

[illegible]
$$K_T =$$

1.0e+007 *

Columns 1 through 12

[illegible]

Columns 13 through 24

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.6667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0001	0.0053	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0053	0.0267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0187	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0047	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1.2500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0187	0	0.0500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.3582	0.3136	0.0188	0.0111	0	0.0300	-1.0000	0	0	-0.3539	0.3531	0.0042	0
-0.3531	3.2737	0.0109	0	-1.6667	0	0	-0.0024	0.0120	0.3531	-0.3539	0.0042	0
0.0188	0.0109	0.4232	-0.0333	0	0.0667	0	-0.0120	0.0400	-0.0042	-0.0042	0.0283	0
-0.0111	0	-0.0333	0.0111	0	-0.0333	0	0	0	0	0	0	0
0	-1.6667	0	0	1.6667	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0333	0	0.0667	-0.0333	0	0.1333	0	0	0	0	0	0	0
-1.0000	0	0	0	0	0	1.0000	0	0.0333	-0.0111	0	0.0333	0
0	-0.0024	-0.0120	0	0	0	0	1.6691	-0.0120	0	-1.6667	0	0
-0.3539	0.3531	-0.0042	0	0	0	-0.0111	0	-0.0333	0.3650	-0.3531	-0.0376	0
0.3531	-0.3539	-0.0042	0	0	0	0	-1.6667	0	-0.3531	2.0206	-0.0042	0
0.0042	0.0042	0.0283	0	0	0	0.0333	0	0.0667	-0.0376	-0.0042	0.1899	0

```
>> KR = (10^7)*[ 0.6778 0 0.0146 -0.0047 0 -0.0187 0 0 0 -0.6667 0 0 0 0; 0
2.9174 0.0053 0 -1.2500 0 0 0 0 0 -0.0007 0.0053 0 0 0; 0.0146 0.0053 0.2867 0.0187
0 0.0500 0 0 0 -0.0053 0.0267 0 0 0; -0.0047 0 0.0187 0 0 0.0187 -0.6667 0 0 0
0 0 0 0; 0 -1.2500 0 0.6714 1.2507 0.0053 0 -0.0007 0.0053 0 0 0 0 0; -0.0187
0 0.0500 0 0.0053 0.1533 0 -0.0053 0.0267 0 0 0.0187 0 0 0; 0 0 0 0.0187 0 0
0.6667 0 0.0187 -0.0047 0 0 0 0; 0 0 0 -0.6667 -0.0007 -0.0053 0 1.2507 -0.0053
0 -1.2500 0 0 0 0; 0 0 0 0.0053 0.0267 0.0187 -0.0053 0.1533 -0.0187 0 0.0500 0
0 0; -0.6667 0 0 0 0 -0.0047 0 -0.0187 1.3582 0.3136 0.0188 -1 0 0; 0 -0.0007
-0.0053 0 0 0 -1.2500 0 -0.3531 3.2737 0.0109 0 -0.0024 0.0120; 0 0.0053 0.0267
0 0 0 0.0187 0 0.0500 0.0188 0.0109 0.4232 0 -0.0120 0.0400; 0 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 1 0 0.0333; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.0024 -0.0120 0 1.6691 -0.0120; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0.0120 0.0400 0.0333 -0.0120 0.2133]
```

KR =

1.0e+007 *

Columns 1 through 12

0.6778	0	0.0146	-0.0047	0	-0.0187	0	0	0	-0.6667	0	0
0	2.9174	0.0053	0	-1.2500	0	0	0	0	0	-0.0007	0.0053
0.0146	0.0053	0.2867	0.0187	0	0.0500	0	0	0	0	-0.0053	0.0267
-0.0047	0	0.0187	0	0	0.0187	-0.6667	0	0	0	0	0
0	-1.2500	0	0.6714	1.2507	0.0053	0	-0.0007	0.0053	0	0	0
-0.0187	0	0.0500	0	0.0053	0.1533	0	-0.0053	0.0267	0	0	0.0187
0	0	0	0.0187	0	0	0.6667	0	0.0187	-0.0047	0	0
0	0	0	-0.6667	-0.0007	-0.0053	0	1.2507	-0.0053	0	-1.2500	0
0	0	0	0	0.0053	0.0267	0.0187	-0.0053	0.1533	-0.0187	0	0.0500
-0.6667	0	0	0	0	0	-0.0047	0	-0.0187	1.3582	0.3136	0.0188
0	-0.0007	-0.0053	0	0	0	0	-1.2500	0	-0.3531	3.2737	0.0109
0	0.0053	0.0267	0	0	0	0.0187	0	0.0500	0.0188	0.0109	0.4232
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0024	-0.0120
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0120	0.0400

Columns 13 through 15

```

0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
0      0      0
-1.0000 0      0
0      -0.0024 0.0120
0      -0.0120 0.0400
1.0000 0      0.0333
0      1.6691 -0.0120
0.0333 -0.0120 0.2133

>> f = [ 0; 0; 0; -600; 0; -1500; -600; 0; 1500; -300; 0; -500; -300; 2500; 500]

f =

      0
      0
      0
    -600
      0
   -1500
    -600
      0
    1500
    -300
      0
    -500
    -300
    2500
     500

>> U = inv(KR)*f

U =

-0.0024
 0.0028
 0.0009
-0.0070
 0.0066
-0.0021
 0.0001
-0.0065
 0.0007
-0.0024
-0.0027
-0.0002
-0.0024
 0.0002
 0.0008

```

Desplazamientos Nodales:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0\text{m} \\
 v_1 &= 0\text{m} \\
 \theta_1 &= 0\text{rad} \\
 u_2 &= 0.0028\text{m} \\
 v_2 &= -0.0003\text{m} \\
 \theta_2 &= 0.0202\text{rad} \\
 u_3 &= -0.3941\text{m} \\
 v_3 &= -0.0006\text{m} \\
 \theta_3 &= 0.0330\text{rad} \\
 u_4 &= -0.3953\text{m} \\
 v_4 &= 0.0010\text{m} \\
 \theta_4 &= 0.0454\text{rad} \\
 u_5 &= 0.0051\text{m} \\
 v_5 &= 0.0006\text{m} \\
 \theta_5 &= -0.0040\text{rad} \\
 u_6 &= 0\text{m} \\
 v_6 &= 0\text{m} \\
 \theta_6 &= 0\text{rad} \\
 u_7 &= 0.0062\text{m} \\
 v_7 &= -0.6290\text{m} \\
 \theta_7 &= -0.0354\text{rad} \\
 u_8 &= 0\text{m} \\
 v_8 &= 0\text{m} \\
 \theta_8 &= 0\text{rad}
 \end{aligned}$$

Fuerzas:

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= -0.0007\text{KN} \\
 F_{1y} &= 0.0005\text{KN} \\
 M_1 &= 0.0014\text{KNm} \\
 F_{2x} &= 0\text{KN} \\
 F_{2y} &= 0\text{KN} \\
 M_2 &= 0\text{KNm} \\
 F_{3x} &= -0.5271\text{KN} \\
 F_{3y} &= 0\text{KN} \\
 M_3 &= -0.0002\text{KNm} \\
 F_{4x} &= 0.5270\text{N} \\
 F_{4y} &= 0.0001\text{KN} \\
 M_4 &= 0.0149\text{N} \\
 F_{5x} &= -0.0037\text{KN} \\
 F_{5y} &= -0.0037\text{KN} \\
 M_5 &= 0.0148\text{KNm} \\
 F_{6x} &= 0.0001\text{KN} \\
 F_{6y} &= -0.0010\text{KN} \\
 M_6 &= -0.0001\text{KNm} \\
 F_{7x} &= -0.0001\text{KN} \\
 F_{7y} &= -1.0494\text{KN} \\
 M_7 &= 0\text{KNm} \\
 F_{8x} &= -0.0005\text{KN} \\
 F_{8y} &= 1.0499\text{KN} \\
 M_8 &= -0.0022\text{KNm}
 \end{aligned}$$

$$K_{6-7} = \frac{E}{L} = \frac{(300 \times 10^9)}{6m} = 5 \times 10^{10} [M]$$

[illegible]

$$K_{7-8} = \frac{E}{L} = \frac{(300 \times 10^9)}{6m} = 5 \times 10^{10} [M]$$

[illegible]

$$K_{3-6} = \frac{E}{L} = \frac{(300 \times 10^9)}{10\text{m}} = 30000000000 [\text{M}]$$

[illegible]

$$K_{2-7} = \frac{E}{L} = \frac{(300 \times 10^9)}{10\text{m}} = 30000000000 [\text{N/m}]$$

[illegible]

$$KT =$$

Columns 1 through 10

[illegible]

Columns 11 through 20

[illegible]

Columns 21 through 24

	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
108000	0	0	0	0
360000	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-600000	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1200000	0	0	0	0
600000	0	0	0	0
-108000	0	0	0	0
3120000	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

```
>> KR = [ 15200000 0 0 -100000 0 -300000 0 0 0 0 0 0 0 -15000000 0 0; 0 50021600
108000 0 -25000000 0 0 0 0 0 0 0 0 -21600 108000; 0 108000 3120000 300000 0
600000 0 0 0 0 0 0 0 -108000 360000; -100000 0 300000 15437500 0 131250 -337500
0 -168750 0 0 0 -15000000 0 0 0 0; 0 -25000000 0 0 62521600 108000 0 -37500000 0
0 0 0 -21600 108000 0 0 0; -300000 0 600000 131250 108000 3720000 168750 0 900000
0 0 0 -108000 360000 0 0 0; 0 0 0 -337500 0 168750 15337500 0 168750 -15000000 0
0 0 0 0 0; 0 0 0 -37500000 0 0 37521600 108000 0 -21600 1080000 0 0 0 0 0;
0 0 0 -168750 0 900000 168750 108000 2520000 0 -108000 360000 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 -15000000 0 0 15337500 0 -168750 -337500 0 -168750 0 0 0; 0 0 0 0 0 -21600
-108000 0 37521600 -1080000 0 -37500000 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 108000 360000 -168750
-108000 2520000 168750 0 9000000 0 0 0; 0 0 0 -15000000 0 0 0 0 -337500 0 168750
15537500 0 -431250 -20000 0 -600000; 0 0 0 0 -21600 -108000 0 0 0 0 -37500000 0 0
87521600 -108000 0 -50000000 0; 0 0 0 108000 360000 0 0 0 -168750 0 900000 -431250
-108000 4920000 600000 0 1200000; -185000000 0 0 0 0 0 0 0 -200000 0 600000
15200000 0 600000; 0 -21600 -108000 0 0 0 0 0 0 0 -50000000 0 0 50021600
-108000; 0 108000 360000 0 0 0 0 0 0 0 -600000 0 1200000 600000 -108000 3120000]
```

KR =

Columns 1 through 10

15200000	0	0	-100000	0	-300000	0	0	0	0
0	50021600	108000	0	-25000000	0	0	0	0	0
0	108000	3120000	300000	0	600000	0	0	0	0
-100000	0	300000	15437500	0	131250	-337500	0	-168750	0
0	-25000000	0	0	62521600	108000	0	-37500000	0	0
-300000	0	600000	131250	108000	3720000	168750	0	900000	0
0	0	0	-337500	0	168750	15337500	0	168750	-15000000
0	0	0	0	-37500000	0	0	37521600	108000	0
0	0	0	-168750	0	900000	168750	108000	2520000	0
0	0	0	0	0	0	-15000000	0	0	15337500
0	0	0	0	0	0	0	-21600	-108000	0
0	0	0	0	0	0	0	108000	360000	-168750
0	0	0	-15000000	0	0	0	0	0	-337500
0	0	0	0	-21600	-108000	0	0	0	0
0	0	0	0	108000	360000	0	0	0	-168750
-185000000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-21600	-108000	0	0	0	0	0	0	0
0	108000	360000	0	0	0	0	0	0	0

Columns 11 through 18

0	0	0	0	0	-1500000	0	0
0	0	0	0	0	0	-21600	108000
0	0	0	0	0	0	-108000	360000
0	0	-1500000	0	0	0	0	0
0	0	0	-21600	108000	0	0	0
0	0	0	-108000	360000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-21600	108000	0	0	0	0	0	0
-108000	360000	0	0	0	0	0	0
0	-168750	-337500	0	-168750	0	0	0
375216000	-1080000	0	-37500000	0	0	0	0
-108000	2520000	168750	0	9000000	0	0	0
0	168750	15537500	0	-431250	-20000	0	-600000
-37500000	0	0	87521600	-108000	0	-50000000	0
0	900000	-431250	-108000	4920000	600000	0	1200000
0	0	-200000	0	600000	15200000	0	600000
0	0	0	-50000000	0	0	50021600	-108000
0	0	-600000	0	1200000	600000	-108000	3120000

```
>> f = [ 3000; 0; 0; 5000; 0; 0; 0; 500; 833.33; 0; -500; 833.33; 5000; 0; 0; 3000; 0; 0]
```

```
f =
```

```
1.0e+003 *
```

```
3.0000
```

```
0
```

```
0
```

```
5.0000
```

```
0
```

```
0
```

```
0
```

```
0.5000
```

```
0.8333
```

```
0
```

```
-0.5000
```

```
0.8333
```

```
5.0000
```

```
0
```

```
0
```

```
3.0000
```

```
0
```

```
0
```

```
>> u = inv(KR)*f
```

```
u =
```

```
0.0000
```

```
-0.0450
```

```
0.0668
```

```
-0.8637
```

```
-0.0900
```

```
0.1307
```

```
-0.6503
```

```
-0.1205
```

```
-0.2102
```

```
-0.6464
```

```
0.0033
```

```
1.0837
```

```
-0.8698
```

```
0.0028
```

```
-0.2893
```

```
0.0030
```

```
0.0028
```

```
-0.0626
```

```
>> U = [ 0; 0; 0; 0; -0.0450; 0.0668; -0.8637; -0.0900; 0.1307; -0.6503; -0.1205;
-0.2102; -0.6464; 0.0033; 1.0837; -0.8698; 0.0028; -0.2893; 0.0030; 0.0028;
-0.0626; 0; 0; 0]
```

```
U =
```

```

0
0
0
0
-0.0450
0.0668
-0.8637
-0.0900
0.1307
-0.6503
-0.1205
-0.2102
-0.6464
0.0033
1.0837
-0.8698
0.0028
-0.2893
0.0030
0.0028
-0.0626
0
0
0
```

```
>> F = KT * U
```

```
F =
```

```
1.0e+006 *
```

```

-0.0200
1.1250
0.0401
0.0022
-0.0006
0.0000
0.0058
4.7827
0.1701
0.0001
0.0013
0.0007
-0.0002
2.2835
-0.0027
0.0037
0.0004
0.0006
0.0084
0.0006
-0.0026
0
0
0
```


[illegible]

K2 =

1.0e+007 *

Columns 1 through 17

[illegible]

Columns 18 through 24

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0.0383	0	0	0	0	0	0
0.1790	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0383	0	0	0	0	0	0
0.3580	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

```
>> K7 = (1.79*10^10)*[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4*10^-4 0 0 -4*10^-4
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
3.06*10^-7 -2.14*10^-6 0 -3.06*10^-7 -2.14*10^-6; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.14*10^-6 2*10^-5 0 -2.14*10^-6 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4*10^-4
0 0 4*10^-4 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 -3.06*10^-7 2.14*10^-6 0 0 2.14*10^-6; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -2.14*10^-6 1*10^-5 0
-2.14*10^-6 2*10^-5]
```

K7 =

1.0e+006 *

Columns 1 through 17

[illegible]

Columns 18 through 24

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	7.1600	0	0	-7.1600	0	0
0	0	0.0055	-0.0383	0	-0.0055	-0.0383
0	0	-0.0383	0.3580	0	-0.0383	0
0	-7.1600	0	0	7.1600	0	0
0	0	-0.0055	0.0383	0	0	0.0383
0	0	-0.0383	0.1790	0	-0.0383	0.3580


```
>> kr = (10^7)*[1.0120 0 0.0300 -1.0000 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 2.0015 0.0075 0
-0.0015 0.0075 0 0 0 0 0 0 0 0; 0.0300 0.0075 0.1500 0 0.0075 0.0250 0 0
0 0 0 0 0 0; -1.0000 0 0 1.7230 0 -0.0208 -0.0070 0 -0.0208 0 0
0 -0.7160 0 0; 0 -0.0015 -0.0075 0 1.6684 -0.0037 0 -1.6664 0 0 0 0 0 -0.0005
0.0038; 0 0.0075 0.0250 -0.0208 0.0113 0.1691 0.0208 0 0.0042 0 0 0 0 0.0038
0.0179; 0 0 0 -0.7090 0 0.0208 0.7230 0 0.0208 -0.7160 0 0 0.7160 0 0; 0 0
0 0 -1.6669 -0.0038 0 1.6741 0.0038 0 -0.0077 0.0038 0 0.0005 -0.0038; 0 0 0
-0.0208 0.0038 0.0221 0.0208 0.0038 0.1191 0 0.0038 0.0179 0 0.0038 0.0358; 0
0 0 0 0 -0.7160 0 0 0.7230 0 0.0208 -0.0070 0 0.0208; 0 0 0 0 0 0 0 -0.0077
-0.0038 0 1.6757 -0.0038 0 -1.6680 0; 0 0 0 0 0 0 0.0038 0.0179 0.0208 0.0038
0.1192 0 0.0417; 0 0 0 0 0 0 0 0 -0.0070 0 0 -0.0209 0 0; 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -1.6680 0 0.0070 1.6680 0; 0 0 0 0 0 0 0 -0.0209 0 0.0417 0 0 0.0834]
```

```
kr =
```

```
1.0e+007 *
```

1.0120	0	0.0300	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2.0015	0.0075	0	-0.0015	0.0075	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0300	0.0075	0.1500	0	0.0075	0.0250	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.0000	0	0	1.7230	0	-0.0208	-0.0070	0	-0.0208	0	0	0	-0.7160	0	0
0	-0.0015	-0.0075	0	1.6684	-0.0037	0	-1.6664	0	0	0	0	0	-0.0005	0.0038
0	0.0075	0.0250	-0.0208	0.0113	0.1691	0.0208	0	0.0042	0	0	0	0	0.0038	0.0179
0	0	0	-0.7090	0	0.0208	0.7230	0	0.0208	-0.7160	0	0	0.7160	0	0
0	0	0	0	-1.6669	-0.0038	0	1.6741	0.0038	0	-0.0077	0.0038	0	0.0005	-0.0038
0	0	0	-0.0208	0.0038	0.0221	0.0208	0.0038	0.1191	0	0.0038	0.0179	0	0.0038	0.0358
0	0	0	0	0	0	-0.7160	0	0	0.7230	0	0.0208	-0.0070	0	0.0208
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0077	-0.0038	0	1.6757	-0.0038	0	-1.6680
0	0	0	0	0	0	0	0.0038	0.0179	0.0208	0.0038	0.1192	0	0	0.0417
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0070	0	0	-0.0209	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.6680	0	0.0070	1.6680	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0209	0	0.0417	0	0	0.0834

```
>> F=[-3000; 0; 0; 0; 0; 0; -4000; 0; 0; -2000; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
F =
```

```
-3000
0
0
0
0
0
-4000
0
0
-2000
0
0
0
0
0
```

```
>> u = inv(kr)*F
```

```
u =
```

```
0.0583
-0.0002
-0.0140
0.0588
-0.1098
0.0470
-0.1783
-0.1101
0.0598
-0.1757
-0.1077
0.0534
0.0589
-0.1080
-0.0707
```

```
>> ut = [0; 0; 0; 0.0583; -0.0002; -0.0140; 0.0588; -0.1098; 0.0470; -0.1783; -0.1101;
0.0598; -0.1757; -0.1077; 0.0534; 0.0589; -0.1080; -0.0707; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
ut =
```

```

0
0
0
0.0583
-0.0002
-0.0140
0.0588
-0.1098
0.0470
-0.1783
-0.1101
0.0598
-0.1757
-0.1077
0.0534
0.0589
-0.1080
-0.0707
0
0
0
0
0
0
0
```

```
>> FT = KT*ut
```

```
FT =
```

```

1.0e+005 *
-0.0280
0.0400
0.1049
-0.0220
0.0012
-0.0001
-0.0147
-0.0004
-0.0016
8.2987
0.0007
-0.0022
-0.0133
0.0085
-0.1238
0.1634
-0.0500
0.1222
0
0
0
0
0
0
0
```


[illegible]

[illegible]

[illegible]


```
>> u = inv(KRD)*f
```

```
u =
```

```
0.0000
-0.0002
0.0008
-0.0036
-0.0000
-0.0011
-0.0036
-0.0000
0.0013
0.0001
-0.0000
-0.0001
```

```
>> U = [ 0; 0; 0; 0; 0; -0.0002; 0.0008; -0.0036; 0; -0.0011; -0.0036; 0; 0.0013;
0.0001; 0; -0.0001; 0; 0; 0]
```

```
U =
```

```
0
0
0
0
-0.0002
0.0008
-0.0036
0
-0.0011
-0.0036
0
0.0013
0.0001
0
-0.0001
0
0
0
```

```
>> F = K1 * U
```

```
F =
```

```
1.0e+003 *
-0.1864
5.6040
0.5600
-1.4936
-3.0840
-0.5268
0
0.0168
-0.0700
-0.8158
-0.0168
0.6388
0.1652
-2.5200
0.9694
2.3271
0
2.2650
```


Por lo tanto:

$\gamma_1 = 0$	$\mu_1 = 0$	$\theta_1 = 0$
$\gamma_2 = 0$	$\mu_2 = -0.0002 \text{ m}$	$\theta_2 = 0.0008 \text{ rad}$
$\gamma_3 = -0.0036 \text{ m}$	$\mu_3 = 0$	$\theta_3 = -0.0011 \text{ rad}$
$\gamma_4 = -0.0036 \text{ m}$	$\mu_4 = 0$	$\theta_4 = 0.0013 \text{ rad}$
$\gamma_5 = 0.0001 \text{ m}$	$\mu_5 = 0$	$\theta_5 = -0.0001 \text{ rad}$
$\gamma_6 = 0$	$\mu_6 = 0$	$\theta_6 = 0$

Fuerzas:

$$(-0.007 \times 10^7)(0) + (-0.0233 \times 10^7)(0.0008) = F_{1x} - 650$$

$$F_{1x} = 463.6 \text{ N}$$

$$(-2.8020 \times 10^7)(-0.0002) = F_{1y}$$

$$F_{1y} = 5604 \text{ N}$$

$$(0.0233 \times 10^7)(0) + (0.0700 \times 10^7)(0.0008) = M_1$$

$$M_1 = 560 \text{ Nm}$$

$$(0.0079 \times 10^7)(0.0001) + (-2.3350 \times 10^7)(0.0001) = F_{5x} - 650$$

$$F_{5x} = 2992.9 \text{ N}$$

$$(-2.8020 \times 10^7)(0) = F_{5y}$$

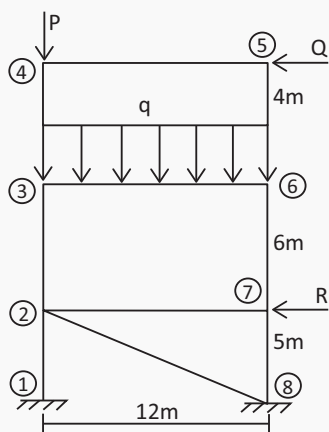
$$F_{5y} = 0$$

$$(2.3350 \times 10^7)(0.0001) + (0.0700 \times 10^7)(0.0001) = M_5$$

$$M_5 = 2265 \text{ Nm}$$

EJERCICIO 13

Determinar los Desplazamientos y las Cargas generadas en cada nodo, en la estructura mostrada, según la secuencia indicada.



$E = 250 \text{ GPa}$

$$I = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$P = 3000 \text{ N}$$

$$Q = 4000 \text{ N}$$

$$R = 5000 \text{ N}$$

$$q = 60 \text{ N/m}$$

Nodos: 1 – 2; 2 – 3; 3 – 4; 4 – 5; 5 – 6;
6 – 7; 7 – 8; 3 – 6; 2 – 8; 1 – 7

A. Resolución

Nodo	θ	C	S	C^2	S^2	SC
1 – 2	90°	0	1	0	1	0
2 – 3	90°	0	1	0	1	0
3 – 4	90°	0	1	0	1	0
4 – 5	0°	1	0	1	0	0
5 – 6	270°	0	-1	0	1	0
6 – 7	270°	0	-1	0	1	0
7 – 8	270°	0	-1	0	1	0
3 – 6	0°	1	0	1	0	0
2 – 8	308.66°	0.62	-0.78	0.39	0.61	-0.49
1 – 7	51.34°	0.62	0.78	0.39	0.61	0.49

$$K_1 = 10^7$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Columns 18 through 24

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0241	0	0	0	0	0	0
0.0401	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0241	0	0	0	0	0	0
0.0802	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

```
>> P= (250*10^9/7.07);
```

```
>> a9= (2*10^-4*0.499)+ 12*(4*10^-6*0.499/7.07^2);
```

```
>> b9= (2*10^-4- 12*4*10^-6/7.07^2)*-0.499;
```

```
>> c9= 6*(4*10^-6*-0.707/7.07);
```

```
>> d9= (2*10^-4*0.499)+ 12*(4*10^-6*0.499/7.07^2);
```

```
>> e9= 6*(4*10^-6*0.707/7.07);
```

```
>> f9= 4*(4*10^-6);
```

```
>> g9= 2*(4*10^-6);
```

```
>> k9= P* [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
a9 b9 -c9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -a9 -b9 -c9; 0 0 0 b9 d9 e9 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 -b9 -d9 e9; 0 0 0 -c9 e9 f9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 c9 -e9
g9; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0; 0 0 0 -a9 -b9 c9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a9 b9 c9; 0 0 0 -b9 -d9 -e9
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;b9 d9 -e9; 0 0 0 -c9 e9 g9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 c9 -e9 f9]
```



```
>> KT = k1 + k2 + k3 + k4 + k5 + k6 + k7 + k8 + k9
```

KT =

1.0e+007 *

Columns 1 through 17

0.0096	0	-0.0240	-0.0096	0	-0.0240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.0000	0.0240	0	-1.0000	0.0240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0240	0.0240	0.0800	0.0240	-0.0240	0.0400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0096	0	0.0240	0.3722	-0.3512	0.0125	-0.0080	0	-0.0200	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1.0000	-0.0240	-0.3512	2.1879	-0.0045	0	-0.8333	0.0200	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0240	0.0240	0.0400	0.0125	0.0045	0.2032	0.0200	-0.0200	0.0333	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.0080	0	0.0200	1.0288	0.9923	-0.0175	-0.0187	0	-0.0375	0	0	0	-1.0020	-0.9923
0	0	0	0	-0.8333	-0.0200	0.9923	2.0930	0.0041	0	-1.2500	0	0	0	0	-0.9923	-0.0097
0	0	0	-0.0200	0.0200	0.8333	-0.0175	0.0041	0.2468	0.0375	0	0.0500	0	0	0	0	-0.0241
0	0	0	0	0	0	-0.0187	0	0.0375	1.0208	1.0020	0.0375	-1.0020	-1.0020	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1.2500	0	1.0020	1.2597	0.0241	-1.0020	-0.0097	0.0241	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.0375	0	0.0500	0.0375	0.0241	0.1802	0	-0.0241	0.0401	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0020	-1.0020	0	1.0140	1.0020	0.0375	-0.0120	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0020	-0.0097	-0.0241	1.0020	1.2597	-0.0241	0	-1.2500	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0241	0.0401	0.0375	-0.0241	0.1802	-0.0375	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.0020	-0.9923	0	0	0	-0.0120	0	-0.0375	1.0196	0.9923	0
0	0	0	0	0	0	-0.9923	-0.0097	-0.0241	0	0	0	0	-1.2500	0	0.9923	2.0930
0	0	0	0	0	0	0	0.0241	0.0401	0	0	0	0.0375	0	0.0500	-0.0208	-0.0241
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0056	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.8333
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0167
0	0	0	-0.3546	0.3512	-0.0085	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.3512	-0.3546	-0.0085	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0085	0.0085	0.0283	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 18 through 24

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.3546	0.3512	0.0085
0	0	0	0	0.3512	-0.3546	0.0085
0	0	0	0	-0.0085	-0.0085	0.0283
0	0	0	0	0	0	0
-0.0241	0	0	0	0	0	0
0.0401	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0.0375	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0.0500	0	0	0	0	0	0
-0.0208	-0.0056	0	0.0167	0	0	0
-0.0241	0	-0.8333	0	0	0	0
0.0468	-0.0167	0	0.0333	0	0	0
-0.0167	0.0122	0	0.0073	-0.0096	0	0.0240
0	0	1.8333	0	0	-1.0000	0
0.0333	0.0073	0	0.1467	-0.0240	0	0.0400
0	-0.0096	0	-0.0240	0.3642	-0.3512	-0.0325
0	0	-1.0000	0	-0.3512	1.3546	-0.0085
0	0.0240	0	0.0400	-0.0325	-0.0085	0.1366

Desplazamientos:

$$u = \text{inv}(k) * F$$

$$u = \begin{bmatrix} -0.0005\text{m} \\ -0.0004\text{m} \\ 0.0002\text{rad} \\ -0.0003\text{m} \\ -0.0008\text{m} \\ -0.0006\text{rad} \\ 0.0010\text{m} \\ -0.0010\text{m} \\ -0.0000\text{rad} \\ 0.0010\text{m} \\ 0.0005\text{m} \\ -0.0004\text{rad} \\ -0.0003\text{m} \\ 0.0005\text{m} \\ -0.0001\text{rad} \\ -0.0049\text{m} \\ 0.0005\text{m} \\ 0.0003\text{rad} \end{bmatrix}$$

Fuerzas:

$$F = K * u$$

$$F = 10^3 \begin{bmatrix} 4.3380\text{N} \\ 9.4541\text{N} \\ -0.0759\text{Nm} \\ 0.0798\text{N} \\ -0.6627\text{N} \\ 0.0379\text{Nm} \\ -0.0743\text{N} \\ -0.9049\text{N} \\ -0.6833\text{Nm} \\ -0.0187\text{N} \\ -2.3021\text{N} \\ 0.0583\text{Nm} \\ -4.0479\text{N} \\ 0.0271\text{N} \\ 0.0646\text{Nm} \\ 0.0368\text{N} \\ -0.3326\text{N} \\ 0.8000\text{Nm} \\ -5.0252\text{N} \\ -0.4708\text{N} \\ -0.0074\text{Nm} \\ 0.3941\text{N} \\ -4.9274\text{N} \\ -1.0456\text{Nm} \end{bmatrix}$$

[illegible]

$K_4 = 10^4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	18	-16	0	18	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1200	0	0	-1200	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	72	-18	0	36	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	0	-18	6	0	-18	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1200	0	0	1200	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	36	-18	0	72	0	

[illegible]

[illegible]

K3 =

Columns 1 through 6

[illegible]

Columns 7 through 12

[illegible]

Columns 13 through 18

[illegible]


```
>> KT = K1 + K2 + K3 + K4 + K5 + K6
```

```
KT =
```

```
1.0e+010 *
```

```
Columns 1 through 8
```

1.0000	0	-0.0000	-1.0000	0	-0.0000	0	0
0	0.0012	0	0	-0.0012	0	0	0
-0.0000	0	0.0001	0.0000	0	0.0000	0	0
-1.0000	0	0.0000	1.0002	0.0003	-0.0000	-0.0000	0
0	-0.0012	0	0.0003	0.0030	-0.0000	0	0
-0.0000	0	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0002	0.0000	-0.0014
0	0	0	-0.0000	0	0.0000	0.0006	0
0	0	0	0	-0.0014	0	0	0.0000
0	0	0	-0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0014
0	0	0	-0.0002	-0.0003	-0.0000	-0.0006	0
0	0	0	-0.0003	-0.0004	0.0000	0	-0.0000
0	0	0	0.0000	-0.0000	0.0000	0	0.0000
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

```
Columns 9 through 16
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-0.0000	-0.0002	-0.0003	0.0000	0	0	0	0
0	-0.0003	-0.0004	-0.0000	0	0	0	0
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	-0.0006	0	0	0	0	0	0
0.0000	0	-0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0001	0	-0.0000	0.0000	0	0	0	0
0	0.0006	0	-0.0000	0	0	0	0
-0.0000	0	0.0000	-0.0000	0	0	0	0
0.0000	0	0.0000	0.0004	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0000	0	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0	0.0024	0	0
0	0	0	0	0.0000	0	0.0001	-0.0000
0	0	0	0	-0.0000	0	-0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	-0.0024	0	0
0	0	0	0	0.0000	0	0.0001	-0.0000

```
Columns 17 through 18
```

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0.0000
-0.0024	0
0	0.0001
0	-0.0000
0.0024	0
0	0.0001

```
>> KR = [10001850415 2505153.891 -49695.80114 -103680 0 -259200 -1746735.237
-2505153.891 29504.19886 0 0 0; 2505153.891 30009253.37 -20509.01628 0 -14400000
0 -2505153.891 -3609253.374 -20509.01628 0 0 0; -49695.80114 -20509.01628
1905907.601 259200 0 432000 29504.19886 20509.01628 160953.8003 0 0 0; -103680
0 259200 6103680 0 259200 -6000000 0 0 0 0 0; 0 -14400000 0 0 14407500 45000
0 -7500 45000 0 0 0; -259200 0 432000 259200 45000 1224000 0 -45000 180000 0 0
0; -1746735237 -2505153.891 -29504.19886 -6000000 0 0 7850415.237 2505153.891
229695.8011 -103680 0 259200; 29504.19886 -3609253.374 20509.01628 0 -7500 -45000
-2505153.891 18016753.37 -24490.98372 0 -14400000 0; 0 -20509.01628 160953.8003
0 4500 180000 229695.8011 20509.01628 1545907.601 -259200 0 432000; 0 0 0 0 0
-103680 0 -259200 163680 0 -75200; 0 0 0 0 0 0 -14400000 0 0 26400000 0; 0 0 0
0 0 0 259200 0 432000 -79200 0 1584000]
```

KR =

1.0e+010 *

Columns 1 through 8

1.0002	0.0003	-0.0000	-0.0000	0	-0.0000	-0.0002	-0.0003
0.0003	0.0030	-0.0000	0	-0.0014	0	-0.0003	-0.0004
-0.0000	-0.0000	0.0002	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0000	0	0.0000	0.0006	0	0.0000	-0.0006	0
0	-0.0014	0	0	0.0014	0.0000	0	-0.0000
-0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0	-0.0000
-0.1747	-0.0003	-0.0000	-0.0006	0	0	0.0008	0.0003
0.0000	-0.0004	0.0000	0	-0.0000	-0.0000	-0.0003	0.0018
0	-0.0000	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	-0.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0014
0	0	0	0	0	0	0.0000	0

Columns 9 through 12

0.0000	0	0	0
-0.0000	0	0	0
0.0000	0	0	0
0	0	0	0
0.0000	0	0	0
0.0000	0	0	0
0.0000	-0.0000	0	0.0000
-0.0000	0	-0.0014	0
0.0002	-0.0000	0	0.0000
-0.0000	0.0000	0	-0.0000
0	0	0.0026	0
0.0000	-0.0000	0	0.0002

Desplazamientos:

$u = \text{inv}(k) * F$

$$u = \begin{bmatrix} 0m \\ 0m \\ -2.676 \times 10^7 rad \\ -0.0003m \\ 0.00108m \\ -0.002rad \\ 0.0010m \\ -0.0010m \\ -0.0000rad \\ 0.0010m \\ 0.0005m \\ -0.0004rad \\ -0.0003m \\ 0.0005m \\ -0.0001rad \\ -0.0049m \\ 0.0005m \\ 0.0003rad \end{bmatrix}$$

Fuerzas:

$F = K \times u$

$$F = 10^3 \begin{bmatrix} 4.3380N \\ 9.4541N \\ -0.0759Nm \\ 0.0798N \\ -0.6627N \\ 0.0379Nm \\ -0.0743N \\ -0.9049N \\ -0.6833Nm \\ -0.0187N \\ -2.3021N \\ 0.0583Nm \\ -4.0479N \\ 0.0271N \\ 0.0646Nm \\ 0.0368N \\ -0.3326N \\ 0.8000Nm \\ -5.0252N \\ -0.4708N \\ -0.0074Nm \\ 0.3941N \\ -4.9274N \\ -1.0456Nm \end{bmatrix}$$

· APLICACIONES EN LA INGENIERÍA

TRABAJO DE APLICACIÓN EN INGENIERÍA: ANÁLISIS MATRICIAL DE UN TRAMO DEL MUELLE DE PIMENTEL, CHICLAYO

INTRODUCCIÓN

El presente proyecto se desarrollará en la región de Lambayeque, distrito de Pimentel el cual dicho muelle tiene más de 90 años de función de los pobladores del distrito y turistas en general. Hoy en día este muelle se ha deteriorado debido a los años que esta estructura tiene, habiendo sufrido maltrato por parte de la naturaleza encontrándose en desuso por inactividad por carecer de operación y mantenimiento.

Debido a esta necesidad, es básica la implementación de un nuevo muelle con mayores beneficios tantos turísticos como para el traslado de las personas el cual requiere de un estudio. Motivo por el cual se desarrollará este trabajo, estudiando el periodo de las vigas del muelle para así reducir y controlar el peligro y deterioro que puede causar un mal estudio de la estructura del muelle de Pimentel.

El objetivo es realizar un estudio sobre las diversas deformaciones de vigas existentes tomando como base en un tramo del muelle de Pimentel.

Por medio de los conocimientos obtenidos en la asignatura, se estudiará la resistencia de cada uno de los materiales empleados, en este caso, el acero, la madera solo para el revestimiento; hallando así los momentos, reacciones, fuerzas y esfuerzos utilizando el método matricial con el cual se obtendrán los desplazamientos, momentos y las fuerzas, tanto internas como externas en cada nodo establecido de acuerdo con lo tomado en la investigación.

Sobre la base de los resultados analizados, se espera que pueda ser de gran apoyo a la región, para que así se pueda implementar dicho muelle con una mejor tecnología el cual obtendrá mayores beneficios tanto económicos como turísticos.

1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Se sabe que el muelle de Pimentel tiene más de 90 años en función de los pobladores del distrito y turistas en general. Sin embargo, hoy en día este muelle se ha deteriorado debido a los años que esta estructura tiene; además de no haber tenido un adecuado mantenimiento.

Esta es la preocupación por la cual se desarrollará este trabajo; estudiar el periodo de las vigas del muelle para así reducir y controlar el peligro y el deterioro que puede ocasionar un mal estudio de la estructura del muelle de Pimentel.

1.2. ANTECEDENTES

El muelle de Pimentel cuya construcción se realizó en el año 1913 (I tramo), 1915 (II tramo) y 1961 (III tramo) que ha sufrido a través del tiempo el desgaste de sus estructuras que la han deteriorado lo cual ha originado que los pobladores de distrito de Pimentel y visitantes nacionales y extranjeros quienes son los que hacen uso de ella a través de sus representantes han venido solicitando se les incluya en el financiamiento de la rehabilitación del muelle de Pimentel al Gobierno Regional de Lambayeque, así como entidades públicas que han priorizado dentro de su presupuesto participativo el proyecto.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Realizar un estudio sobre las diversas deformaciones de vigas existentes, tomando como base en un tramo del muelle de Pimentel; aplicando los conocimientos obtenidos en la asignatura, mediante un análisis estructural de vigas en el muelle de Pimentel.

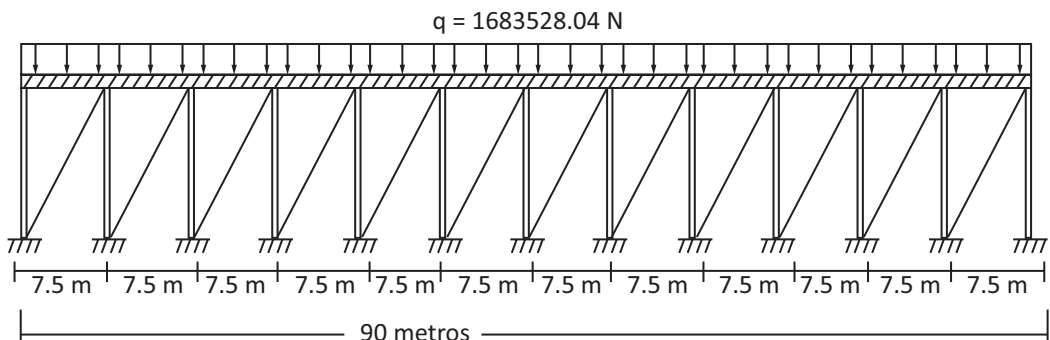
1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

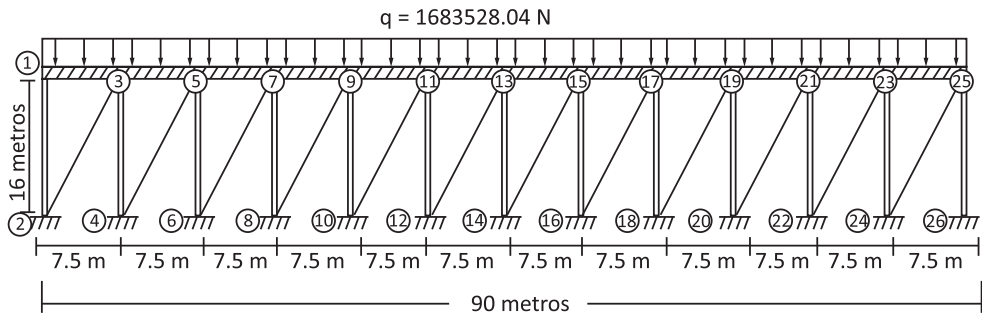
- Realizar el modelo matemático de la estructura.
- Plantear la ecuación matricial.
- Resolver la matriz ensamblada obtenida a través del software MATLAB.
- Interpretar los resultados de manera que sea un aporte para la continuación de este proyecto.



2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

2.1. MODELO MATEMÁTICO

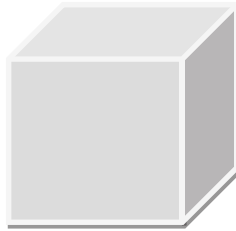




2.2 ANÁLISIS DE FUERZAS Y MOMENTOS

Para hallar los desplazamientos correspondientes, se necesita primero hallar la carga y la matriz K (se halla momento de inercia, elasticidad y las distancias de cada tramo).

2.3. CÁLCULO DEL ÁREA



$$A = 2 \times (ab + ac + cb)$$

$$A = 2 \times (1.34 + 1440 + 201.6)$$

$$A = 5551.2 \text{ m}^2$$

2.4. MÓDULO DE ELASTICIDAD DEL ACERO

$$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2 = 2.1 \times 10^{10}$$

Calcule la cantidad máxima de personas que pueden estar en el tramo del muelle evaluado al mismo tiempo.

$$\text{PESO} = 20\,400 \text{ visitas} \times 65 \text{ Kg} = 1132600 \text{ Kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 13\,008\,060 \text{ N}$$

La carga generada en toda la longitud del muelle es 13008.060 KN. Siendo el análisis de un tramo del muelle entonces:

$$695.40 \text{ m} \text{ ————— } 13008060 \text{ N}$$

$$90 \text{ m} \text{ ————— } X$$

$$X = 1683528.041 \text{ N}$$

Por tanto, la carga generada en el tramo del muelle evaluado será 1683.528KN.

Momento de inercia

$$I_{\text{total}} = \frac{b \times h^2}{12}$$

$$I_{\text{total}} = \frac{90 \times 16^2}{12}$$

$$I_{\text{total}} = 30720 \text{ m}^4$$

Momento de inercia de cada tramo

$$I = \frac{7.5 \times 16^2}{12}$$

$$I = 2560 \text{ m}^4$$

2.7. ANÁLISIS DE LOS ÁNGULOS RESPECTIVOS

Elemento viga	θ	Coseno	Seno
1-2	270°	0	−1
1-3	45°	0.7071	0.7071
2-3	0°	1	0
3-4	270°	0	−1
3-5	45°	0.7071	0.7071
4-5	0°	1	0
5-6	270°	0	−1
5-7	45°	0.7071	0.7071
6-7	0°	1	0
7-8	270°	0	−1
7-9	45°	0.7071	0.7071
8-9	0°	1	0
10-11	270°	0	−1
10-12	45°	0.7071	0.7071
11-12	0°	1	0
13-14	270°	0	−1
13-15	45°	0.7071	0.7071
14-15	0°	1	0
16-17	270°	0	−1
16-18	45°	0.7071	0.7071
17-18	0°	1	0
19-20	270°	0	−1
19-21	45°	0.7071	0.7071
20-21	0°	1	0
22-23	270°	0	−1
22-24	45°	0.7071	0.7071
23-24	0°	1	0
23-25	270°	0	−1
24-25	45°	0.7071	0.7071
25-26	0°	1	0

Determinación de las constantes

K_1 (1-2)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_1 = \begin{pmatrix} 158E+11 & 0 & 126E+12 & -1.575E+11 & 0 & 126E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 126E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K_2 (1-3)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_2 = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K_3 (2-3)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_3 = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.1693E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₄ (3-4)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₅ (3-5)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

K₆ (4-5)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_6 = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.1693E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₇ (5-6)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_7 = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₈ (5-7)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_8 = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₉ (6-7)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_9 = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₁₀ (7-8)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{10} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₁₁ (7-9)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{11} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₁₂ (8-9)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{12} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₁₃ (9-10)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{13} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K_{14} (9-11)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{14} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K_{15} (10-11)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{15} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K_{16} (11-12)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{16} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K_{17} (11-13)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{17} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K_{18} (12-13)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{18} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K_{19} (13-14)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{19} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₀ (13-15)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{20} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₁ (14-15)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{21} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₂ (15-16)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{22} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K_{23} (15-17)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{23} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K_{24} (16-17)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{24} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K_{25} (17-18)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{25} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₆ (17-19)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{26} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₇ (18-19)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{27} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₈ (19-20)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{28} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₂₉ (19-21)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{29} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₃₀ (20-21)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{30} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₃₁ (21-22)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{31} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K_{32} (21-23)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{32} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K_{33} (22-23)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{33} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K_{34} (23-24)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0	2560	16	-1	2.10E+10

$$K_{34} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

K₃₅ (23-25)

A	C	I	L	S	E
5551.2	0.7071	2560	7.5	0.7071	2.10E+10

$$K_{35} = \begin{pmatrix} 8.536E+12 & 7.007E+12 & -4.05E+12 & -8.54E+12 & -7.01E+12 & -4.05E+12 \\ 7.007E+12 & 8.536E+12 & 4.055E+12 & -7.01E+12 & -8.54E+12 & 4.055E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 2.867E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 1.434E+13 \\ -8.54E+12 & -7.01E+12 & 4.055E+12 & 8.536E+12 & 7.007E+12 & 4.055E+12 \\ -7.01E+12 & -8.54E+12 & -4.05E+12 & 7.007E+12 & 8.536E+12 & -4.05E+12 \\ -4.05E+12 & 4.055E+12 & 1.434E+13 & 4.055E+12 & -4.05E+12 & 2.867E+13 \end{pmatrix}$$

K₃₆ (24-25)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{36} = \begin{pmatrix} 6.5974E+12 & 0 & 0 & -6.5974E+12 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1693E+11 & 1.0331E+12 & 0 & -1.1693E+11 & 1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 1.217E+13 & 0 & -1.0331E+12 & 6.0849E+12 \\ -6.5974E+12 & 0 & 0 & 6.59735E+12 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1693E+11 & -1.0331E+12 & 0 & 1.16931E+11 & -1.0331E+12 \\ 0 & 1.0331E+12 & 6.0849E+12 & 0 & -1.0331E+12 & 1.217E+13 \end{pmatrix}$$

K₃₇ (25-26)

A	C	I	L	S	E
5551.2	1	2560	17.67	0	2.10E+10

$$K_{37} = \begin{pmatrix} 1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 & -1.575E+11 & 0 & 1.26E+12 \\ 0 & 7.28595E+12 & 0 & 0 & -7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 & -1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 \\ -1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 & 1.575E+11 & 0 & -1.26E+12 \\ 0 & -7.28595E+12 & 0 & 0 & 7.28595E+12 & 0 \\ 1.26E+12 & 0 & 6.72E+12 & -1.26E+12 & 0 & 1.344E+13 \end{pmatrix}$$

2.8 RESULTADOS EN MATLAB

	X 10 ⁻⁶ (m)
δ_{2x}	0.0334m
δ_{2y}	0.8214m
θ_2	0.2463rad
δ_{4x}	-0.0155m
δ_{4y}	0.8695m
θ_4	-0.1486 rad
δ_{6x}	-0.0120m
δ_{6y}	0.8645m
θ_6	0.1525 rad
δ_{8x}	0.0125m
δ_{8y}	0.8409m
θ_8	-0.1376 rad
δ_{10x}	-0.0144m
δ_{10y}	0.8664m
θ_{10}	0.1538 rad
δ_{12x}	0.0115m
δ_{12y}	0.8416m
θ_{12}	-0.1380 rad
δ_{14x}	-0.0145m
δ_{14y}	0.8663m

	X 10 ⁻⁶ (m)
θ_{14}	0.1538 rad
δ_{16x}	0.0115m
δ_{16y}	0.8415m
θ_{16}	-0.1380 rad
δ_{18x}	-0.0145m
δ_{18y}	0.8662m
θ_{18}	0.1538 rad
δ_{20x}	0.0110m
δ_{20y}	0.8416m
θ_{20}	-0.1379 rad
δ_{22x}	-0.0147m
δ_{22y}	0.8658m
θ_{22}	0.1531 rad
δ_{24x}	0.0300m
δ_{24y}	0.8216m
θ_{24}	-0.1448 rad
δ_{26x}	-0.0588m
δ_{26y}	0.9070m
θ_{26}	0.2153 rad

2.9 CÁLCULO DE FUERZAS Y MOMENTOS

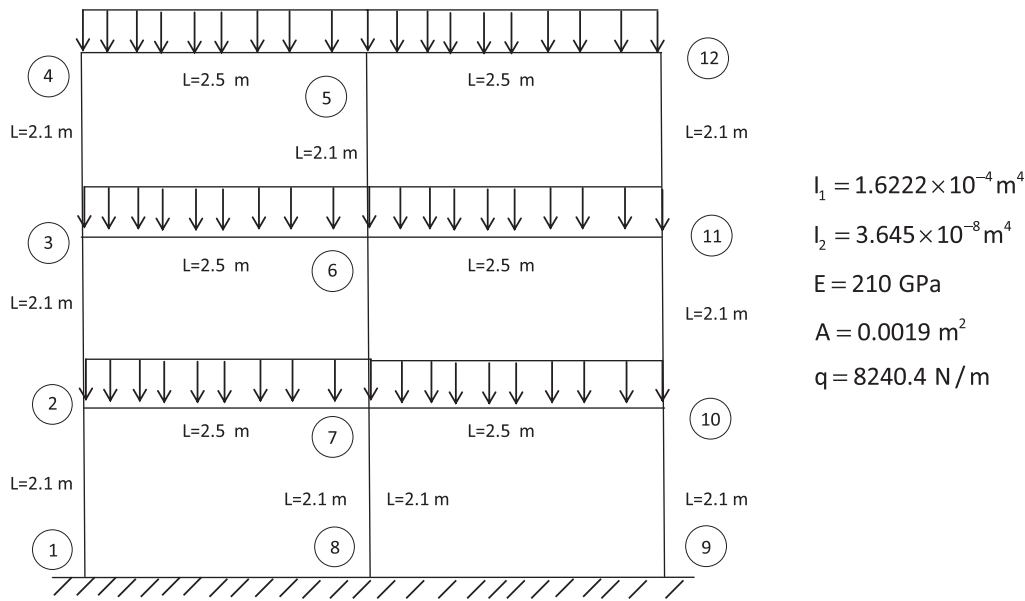
Fuerzas y momentos	
F_{2x}	-8.47E+04 KN
F_{2y}	6.34E+06KN
M_2	7.11E+06 KNm
F_{5x}	8.25E+04 KN
F_{5y}	-6.25E+06 KN
M_5	1.03E+06 KNm
F_{8x}	2.58E+05 KN
F_{8y}	6.08E+06 KN
M_8	-2.67E+06 KNm
F_{11x}	-8.07E+04 KN
F_{11y}	-6.39E+06 KN
M_{11}	8.89E+05 KNm
F_{14x}	-2.92E+05 KN
F_{14y}	-6.31E+06 KN

Fuerzas y momentos	
M_{14}	4.85E+06 KNm
F_{17x}	1.20E+05 KN
F_{17y}	-6.27E+06 KN
M_{17}	1.08E+06 KNm
F_{20x}	2.48E+05 KN
F_{20y}	6.09E+06 KN
M_{20}	-2.68E+06 KNm
F_{23x}	-9.02E+04 KN
F_{23y}	-6.25E+06 KN
M_{23}	8.15E+05 KNm
F_{26x}	-2.81E+05 KN
F_{26y}	6.61E+06 KN
M_{26}	2.97E+06 KNm

DISEÑO ESTRUCTURAL DE UN SISTEMA DE PLATAFORMA DE ELEVACIÓN DE AUTOMÓVILES A TRAVÉS DEL MÉTODO MATRICIAL EN UNA PLAYA DE ESTACIONAMIENTO



Modelamiento del sistema estructural del elevador de automóviles:



0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	8 veces	0	1.90E-03	0.00E+00	0.00E+00	-1.60E+08	0.00E+00	0.00E+00	0	21 veces	:
:	8 veces	0	0.00E+00	2.62E+07	3.27E+07	0.00E+00	2.20E+18	2.75E+18	0	21 veces	:
:	8 veces	0	0.00E+00	2.75E+18	5.45E+07	0.00E+00	2.31E+29	2.73E+07	0	21 veces	:
:	8 veces	0	1.34E+19	0.00E+00	0.00E+00	1.60E+08	0.00E+00	0.00E+00	0	21 veces	:
:	8 veces	0	0.00E+00	1.85E+29	-1.94E+40	0.00E+00	2.20E+18	2.31E+29	0	21 veces	:
:	8 veces	0	0.00E+00	2.31E+29	2.29E+18	0.00E+00	1.94E+40	4.58E+18	0	21 veces	:
36 veces	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	36 veces
:	:	:	42 veces	42 veces	42 veces	42 veces	42 veces	42 veces	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0

0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0
:	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	12 veces	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	12 veces	0	4.41E+07	2.68E-08	4.63E+07	-4.41E+18	-2.68E+03	4.63E+18	0	18 veces	0
0	12 veces	0	2.68E+03	1.90E-03	-8.52E-09	-2.68E+14	-1.90E+08	-8.52E+02	0	18 veces	0
0	12 veces	0	4.63E+18	-8.52E+02	6.49E+07	-4.63E+18	8.52E+13	-8.52E+02	0	18 veces	0
0	12 veces	0	-4.41E+29	-2.68E+25	-4.63E+29	4.41E+18	2.68E+14	-4.63E+29	0	18 veces	0
0	12 veces	0	-2.68E+14	-1.90E+19	8.52E+24	2.68E+25	1.90E+08	8.52E+13	0	18 veces	0
0	12 veces	0	4.63E+29	-8.52E+13	3.24E+18	-4.63E+40	8.52E+24	6.49E+18	0	18 veces	0
:	:	:	0	0	0	0	0	0	0	:	0
36 veces	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	36 veces
:	:	:	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	15 veces	0	4.41E+07	2.68E-08	4.63E+07	-4.41E+18	-2.68E+03	4.63E+18	0	15 veces	:
:	15 veces	0	2.68E+03	1.90E-03	-8.52E-09	-2.68E+14	-1.90E+08	-8.52E+02	0	15 veces	:
:	15 veces	0	4.63E+18	-8.52E+02	6.49E+07	-4.63E+18	8.52E+13	3.24E+07	0	15 veces	:
:	15 veces	0	-4.41E+29	-2.68E+25	-4.63E+29	4.41E+18	2.68E+14	-4.63E+29	0	15 veces	:
:	15 veces	0	-2.68E+14	-1.90E+19	8.52E+24	2.68E+25	1.90E+08	8.52E+13	0	15 veces	:
:	15 veces	0	4.63E+29	-8.52E+13	3.24E+18	-4.63E+40	8.52E+24	6.49E+18	0	15 veces	:
:	:	:	0	0	0	0	0	0	:	:	:
36 veces	:	:	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	15 veces	:	:	36 veces
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0

0	...	...	...	36 veces	...	...	...	...
⋮	0	0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	0	0	30 veces	30 veces	30 veces	30 veces	30 veces	30 veces
⋮	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	30 veces	0	4.41E+07	8.93E-09	-4.63E+07	-4.41E+18	-8.93E+02	-4.63E+18
⋮	30 veces	0	8.93E+02	1.90E-03	2.84E-09	-8.93E+13	-1.90E+08	2.84E+02
⋮	30 veces	0	-4.63E+18	2.84E+02	6.49E+07	4.63E+18	-2.84E+13	3.24E+07
⋮	30 veces	0	-4.41E+29	-8.93E+24	4.63E+29	4.41E+18	8.93E+13	4.63E+29
36 veces	30 veces	0	-8.93E+13	-1.90E+19	-2.84E+24	8.93E+24	1.90E+08	-2.84E+13
0	30 veces	0	-4.63E+29	2.84E+13	3.24E+18	4.63E+40	-2.84E+24	6.49E+18

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	9 veces	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	9 veces	0	1.90E-03	0.00E+00	0.00E+00	-1.60E+08	0.00E+00	0.00E+00	0	21 veces	⋮
⋮	9 veces	0	0.00E+00	5.88E+03	7.35E+03	0.00E+00	-4.94E+14	6.17E+14	0	21 veces	⋮
⋮	9 veces	0	0.00E+00	6.17E+14	1.22E+04	0.00E+00	-5.18E+25	6.12E+03	0	21 veces	⋮
⋮	9 veces	0	-1.34E+19	0.00E+00	0.00E+00	1.60E+08	0.00E+00	0.00E+00	0	21 veces	⋮
⋮	9 veces	0	0.00E+00	-4.15E+25	-4.36E+36	0.00E+00	4.94E+14	-5.18E+25	0	21 veces	⋮
36 veces	9 veces	0	0.00E+00	5.18E+25	5.14E+14	0.00E+00	-4.36E+36	1.03E+15	0	21 veces	36 veces
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	21 veces	21 veces	21 veces	21 veces	21 veces	21 veces	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	...	...	...	...	36 veces	...	...	...	...	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	12 veces	12 veces	12 veces	12 veces	12 veces	12 veces	12 veces
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	9 veces	0	0	0.0019	0	0	-159600000	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮	7348.32	⋮	0	-4.9381E+14	6.1726E+14
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮	12247.2	⋮	0	-5.185E+25	6123.6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋮	0	⋮	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
36 veces	⋮	⋮	⋮	⋮	18 veces	⋮	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces	18 veces
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	0	0	⋮	0	0	0
⋮	⋮	9 veces	0	0	-1.34064E+19	0	0	⋮	159600000	0	0
⋮	⋮	9 veces	0	0	0	-4.148E+25	4.3554E+36	⋮	0	4.9381E+14	-5.185E+25
0	0	9 veces	0	0	0	5.185E+25	5.1438E+14	⋮	0	-4.3554E+36	1.0288E+15

[illegible][illegible]

DISEÑO ESTRUCTURAL A TRAVÉS DEL ANÁLISIS MATRICIAL DE UNA TRIBUNA EN LA CANCHA DEPORTIVA EN UNA UNIVERSIDAD

INTRODUCCIÓN

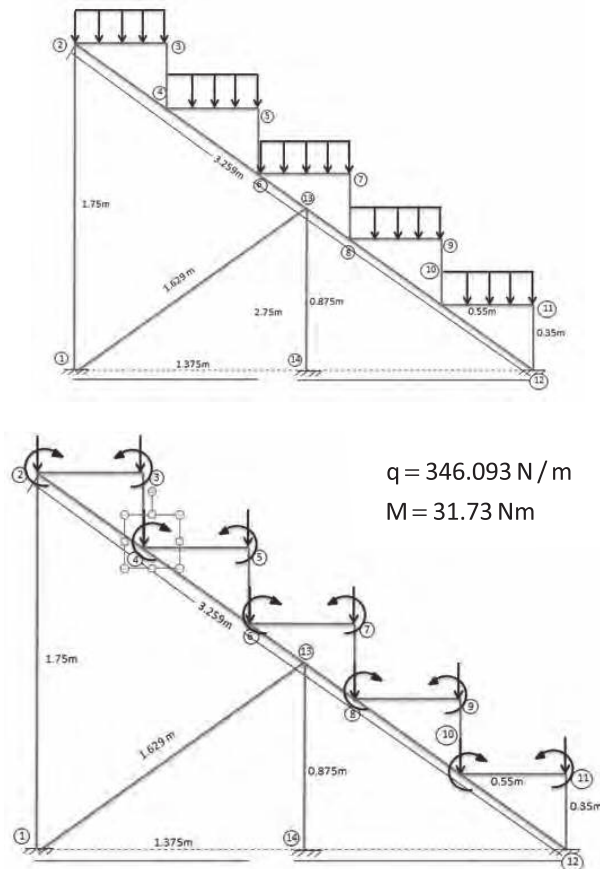
En la actualidad muchas universidades no cuenta con una tribuna segura y estable en sus canchas deportivas de futbol que poseen, debido a esto cada vez que se presenta un evento deportivo o social en estas, se arman y se colocan tribunas temporales que ponen en peligro la seguridad de los estudiantes y docentes, aparte de generar gastos innecesarios para el alquiler del equipo para su construcción; razón por la cual se hace necesario construir una tribuna.

El presente trabajo a desarrollar tiene como objetivo diseñar dos tribunas estables y resistentes para 200 personas.

Para el desarrollo del modelo matemático de este diseño se utilizara las matrices de rigidez las cuales serán resueltas a través del software MATLAB.

Se espera que los desplazamientos nodales estén dentro de un rango permisible para la construcción de la tribuna, ofreciendo la seguridad y comodidad.

APLICACIÓN:



$$K = \frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12IS^2}{L^2} & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & -\frac{6I}{L}S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2}S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & -\frac{6I}{L}S \\ \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2}C^2 & \frac{6I}{L}C & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2}C^2\right) & \frac{6I}{L}C \\ -\frac{6I}{L}S & \frac{6I}{L}C & 4I & \frac{6I}{L}S & & 2I \\ -\left(AC^2 + \frac{12IS^2}{L^2}\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & \frac{6I}{L}S & AC^2 + \frac{12IS^2}{L^2} & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & \frac{6I}{L}S \\ -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2}C^2\right) & -\frac{6I}{L}C & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS & AS^2 + \frac{12I}{L^2}C^2 & -\frac{6I}{L}C \\ -\frac{6I}{L}S & \frac{6I}{L}C & 2I & \frac{6I}{L}S & -\frac{6I}{L}C & 4I \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{E}{L} \times \begin{bmatrix} a & b & -c & -a & -b & -c \\ b & d & e & -b & -d & e \\ -c & e & f & c & -e & g \\ -a & -b & c & a & b & c \\ -b & -d & -e & b & d & -e \\ -c & e & g & c & -e & f \end{bmatrix}$$

$$a = AC^2 + \frac{12IS^2}{L^2}$$

$$b = \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)CS$$

$$c = \frac{6IS}{L}$$

$$d = AS^2 + \frac{12IC^2}{L^2}$$

$$e = \frac{6IC}{L}$$

$$f = 4I$$

$$g = 2I$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2	346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_2	-31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_3	-346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_3	31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_4	-346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_4	31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_5	-346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_5	31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_6	-346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_6	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_6	-31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_7	-346.0930N
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_7	0
0.0787	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_7	31.7300N
0.1542	-0.0096	0	0	-1.3649	0.7678	0.0307	0	0	0	0	u_8	-346.0930N
2.6772	0	-0.4553	2.6469	0.7678	0.0307	0.0483	0	0	0	0	v_8	0
0.1923	0	-2.6469	0.0005	-0.0307	-0.0483	0.0124	0	0	0	0	θ_8	-31.7300N
0	0.3510	0	0.0597	-0.3414	0	0.0597	0	0	0	0	u_9	-346.0930N
0	0	1.2602	-2.6469	0	-0.8049	0	0	0	0	0	v_9	0
0.0005	0.0597	-2.6469	0.0149	-0.0597	0	0.0070	0	0	0	0	θ_9	31.7300N
0	-0.0597	3.0809	-1.5355	-0.0597	-0.0096	0	0	0	0	0	u_{10}	-346.0930N
-0.8049	0.0597	-1.5355	1.8836	2.6469	0	-0.4553	2.6469	0	0	0	v_{10}	0
0	0.0070	-0.0597	2.6469	0.0643	0	-2.6469	0.0005	0	0	0	θ_{10}	-31.7300N
0	0	-0.0096	0	0	0.3510	0	0.0597	0	0	0	u_{11}	-346.0930N
0	0	0	-0.4553	0	0	1.2602	-2.6469	0	0	0	v_{11}	0
0	0	0	2.6469	0.0005	0.0597	-2.6469	0.0149	0	0	0	θ_{11}	31.7300N
0	0	0	0	0	0	0	0	0.2811	0.1707	-0.0060	u_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.1707	0.4822	-0.0038	v_{13}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0060	-0.0038	0.0099	θ_{13}	0

Desplazamientos Nodales:

$u = inv(k) \times F$

$U = 10^{-7}$

0m
0m
0rad
-0.1167m
-0.0758m
0.0959rad
-0.1182m
-0.0006m
0.2203rad
-0.0442m
-0.0392m
0.1973rad
-0.0077m
0.0785m
0.0516rad
-0.0051m
0.0789m
-0.0730rad
-0.0150m
-0.0004m
-0.0281rad
-0.0273m
-0.0012m
-0.0242rad
-0.0157m
-0.0006m
-0.0099rad
-0.0160m
-0.0018m
-0.0001rad
-0.0102m
-0.0022m
-0.0007rad
0m
0m
0rad
0m
0m
0rad
0m
0m
0rad

Fuerzas:

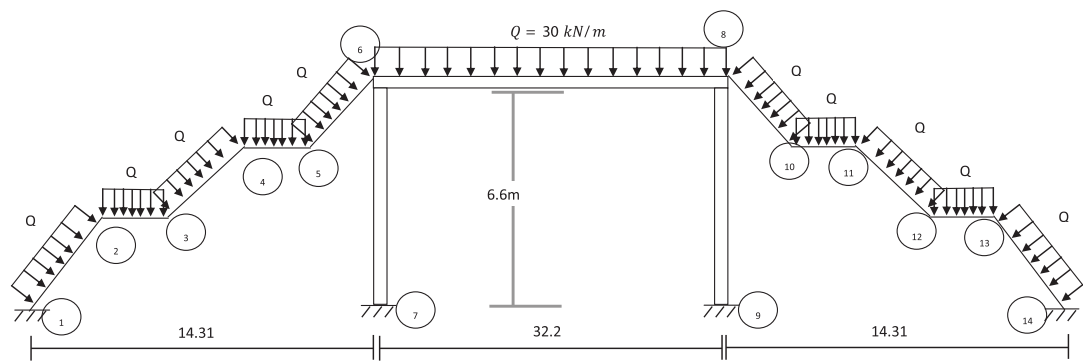
$F = K \times u$

$F = 10^3$

0.9103N
2.1074N
-1.4760Nm
-0.3383N
-0.0070N
-0.0336Nm
-0.3562N
0.0105N
0.0292Nm
-0.3460N
-0.0081N
-0.0342Nm
-0.3240N
0.0030N
0.0340Nm
-0.3682N
-0.0037N
-0.0321Nm
-0.3433N
-0.0045N
-0.7843Nm
-1.2966N
-9.0794N
-0.9079Nm
-0.0383N
2.7443N
-0.1730Nm
-0.3390N
0.0127N
-0.0195Nm
-0.3468N
-0.0100N
0.0439Nm
2.1939N
-0.9373N
-0.1194Nm
0N
0N
0Nm
0m
0N
0Nm

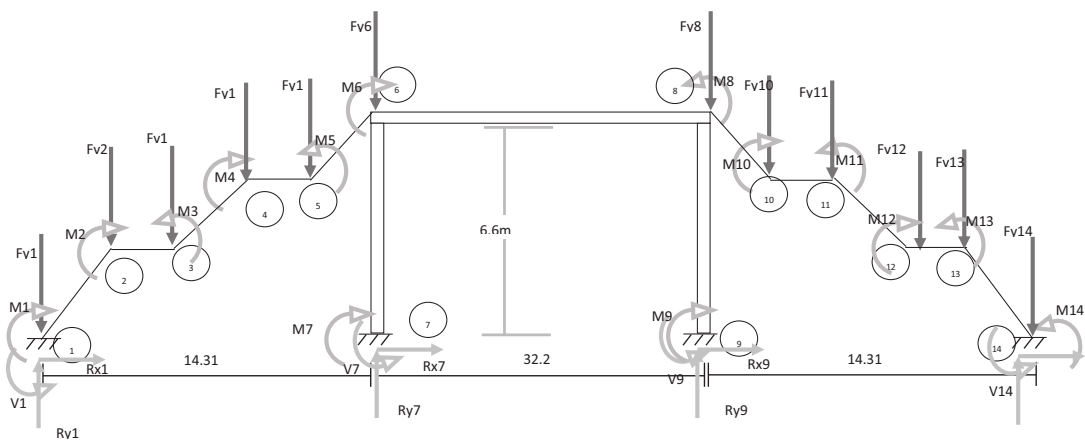
DISEÑO DE UN PUENTE PEATONAL

Modelo matemático:



nodos	ángulo	radianes	c	s	C ²	s ²	cs	A	I	E	L	L
1--2	30	0.523599	0.8660254	0.5	0.75	0.25	0.4330127	7.48	4.437E+09	2100000000	4.16	17.3056
2--3	0	0.008727	0.9999619	0.00872654	0.99992385	7.615E-05	0.0087262	4.16	4.437E+09	2100000000	2	4
3--4	30	0.523599	0.8660254	0.5	0.75	0.25	0.4330127	7.48	4.437E+09	2100000000	4.16	17.3056
4--5	0	0.008727	0.9999619	0.00872654	0.99992385	7.615E-05	0.0087262	8.32	4.437E+09	2100000000	2	4
5--6	30	0.5235988	0.8660254	0.5	0.75	0.25	0.4330127	3.79	4.437E+09	2100000000	3.6	12.96
6--7	270	4.712389	-1.84E-16	-1	3.3772E-32	1	1.8377E-16	10.56	4.437E+09	2100000000	6.6	43.56
6--8	0	0.0087266	0.9999619	0.00872654	0.99992385	7.615E-05	0.0087262	212.52	4.437E+09	2100000000	32.2	1036.84
8--9	270	4.712389	-1.84E-16	-1	3.3772E-32	1	1.8377E-16	10.56	4.437E+09	2100000000	6.6	43.56
8--10	330	5.7595865	0.8660254	-0.5	0.75	0.25	-0.4330127	3.79	4.437E+09	2100000000	3.6	12.96
10--11	0	0.0087266	0.9999619	0.00872654	0.99992385	7.615E-05	0.0087262	8.32	4.437E+09	2100000000	2	4
11--12	330	5.7595865	0.8660254	-0.5	0.75	0.25	-0.4330127	7.48	4.437E+09	2100000000	4.16	17.3056
12--13	0	0.0087266	0.9999619	0.00872654	0.99992385	7.615E-05	0.0087262	4.16	4.437E+09	2100000000	2	4
13--14	330	5.7595865	0.8660254	-0.5	0.75	0.25	-0.4330127	7.48	4.437E+09	2100000000	4.16	17.3056

Análisis de las cargas:



Nodos	Fxi(N)	Fyi(N)	Mi(Nm)
1	Fx1	-62400+A	-43264+A
2	0	-30000	-10000
3	13000	30000	10000
4	0	-62400	-43264
5	20000	30000	10000
6	0	-54000	-32400
7	F7x	99000+B	108900+B
8	-10000	-99000	-108900
9	F9x	99000+M	108900+M
10	0	54000	32400
11	40000	-62400	-43264
12	0	30000	10000
13	0	-62400	-43264
14	F14x	-62400+C	43264+C

[illegible][illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Aplicando la opción inversa de la matriz se obtiene los desplazamientos y fuerzas en cada nodo:

	DESPLAZAMIENTOS	UNIDADES		FUERZAS	UNIDADES
U1	0	m	F1x	-49756.52	N
V1	0	m	F1y	104934.06	N
θ1	0	rad	M1	1155574.04	N/m
U2	-2.15055E-06	m	F2x	0.00	N
V2	-1.24162E-06	m	F2y	-30000.00	N
θ2	-4.08399E-13	rad	M2	-10000.00	N/m
U3	9.09003E-06	m	F3x	13000.00	N
V3	-1.14353E-06	m	F3y	29999.99	N
θ3	-5.34746E-13	rad	M3	10000.01	N/m
U4	4.35736E-06	m	F4x	0.00	N
V4	-3.87594E-06	mF	4y	-62399.94	N
θ4	-6.66916E-13	rad	M4	43264.03	N/m
U5	8.52203E-06	m	F5x	20000.00	N
V5	-3.83959E-06	m	F5y	29999.96	N
θ5	-6.81773E-13	rad	M5	10000.02	N/m
U6	2.09083E-12	m	F6x	0.00	N
V6	-8.75979E-06	m	F6y	-53999.99	N
θ6	-6.46315E-13	rad	M6	-32400.00	N/m
U7	0	m	F7x	16337.94	N
V7	0	m	F7y	29432.90	N
θ7	0	rad	M7	858596.52	N/m
U8	1.38476E-12	m	F8x	-10000.02	N
V8	-8.75982E-06	m	F8y	-98999.99	N
θ8	-4.45193E-13	rad	M8	108900.02	N/m
U9	0	m	F9x	32818.62	N
V9	0	m	F9y	29433.01	N
θ9	0	rad	M9	520252.18	N/m
U10	-1.18295E-05	m	F10x	0.00	N
V10	-1.93005E-06	m	F10y	53999.96	N
θ10	-4.56306E-13	rad	M10	32399.96	N/m
U11	-1.44258E-05	m	F11x	39999.99	N
V11	-1.95271E-06	m	F11y	-62399.97	N
θ11	-4.65422E-13	rad	M11	43263.95	N/m
U12	-3.02603E-05	m	F12x	0.00	N
V12	7.18933E-06	m	F12y	30000.01	N
θ12	-4.84475E-13	rad	M12	9999.98	N/m
U13	-19858.53189	m	F13x	-62400.00	N
V13	-173.3027844	m	F13y	0.00	N
θ13	-9.58761E-06	rad	M13	-43264.00	N/m
U14	0	m	F14x	0.00	N
V14	0	m	F14y	0.00	N
θ14	0	rad	M14	0.00	N/m

Impreso en los Talleres Gráficos de



Surquillo