

[ingenieriacivilyconstruccion.com](http://ingenieriacivilyconstruccion.com)

## Compartimos:

Libros  
Plantillas Excel  
Revistas  
Manuales  
Cursos  
Expedientes Técnicos



**Ingeniería Civil  
y Construcción**

Diplomados  
Planos  
Softwares  
Archivos Autocad  
Archivos Revit  
Tutoriales y Más

## SÍGUENOS EN:

Ingeniería Civil y Construcción



UNIVERSIDAD DE HUÁNUCO

FACULTAD DE INGENIERÍA

E.A.P. DE INGENIERÍA CIVIL



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I


**UNIDAD 5: MÉTODO DE LAS FUERZAS**

**DOCENTE: Mg. Luis Fernando Narro Jara**

HUÁNUCO, 2020

# **Unidad 5. MÉTODO DE LAS FUERZAS**

## **CONTENIDO**

- 1. INTRODUCCIÓN**
  - 2. GRADO DE INDETERMINACIÓN DEL SISTEMA**
  - 3. ELECCIÓN DEL SISTEMA PRINCIPAL**
  - 4. SISTEMA DE ECUACIONES CANÓNICAS**
  - 5. DIAGRAMAS FINALES DE FUERZAS INTERNAS**
  - 6. EFECTO DE LA VARIACIÓN DE TEMPERATURA**
  - 7. EFECTO DE ASENTAMIENTO O DESPLAZAMIENTO DE APOYOS**
- 


# **1. INTRODUCCIÓN**

En esta unidad estudiaremos la formulación general del método de las fuerzas (flexibilidades) llamado método de las deformaciones para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

El método, que fue introducido por James C. Maxwell en 1864, esencialmente implica la remoción de las restricciones necesarias de la estructura indeterminada para convertirla en estáticamente determinada. Esta estructura determinada, la cual debe ser estáticamente (y geoméricamente) estable se conoce como estructura primaria.

Al exceso de restricciones removidas de la estructura indeterminada para convertirla en estructura primaria determinada se le llama restricciones redundantes, y las reacciones o fuerzas internas asociadas con estas restricciones se denominan redundantes. Las redundantes entonces se aplican como cargas desconocidas en la estructura primaria, y sus valores se determinan resolviendo las ecuaciones de compatibilidad basadas en la condición de que las deformaciones de la estructura primaria causadas por la combinación de efectos de las redundantes y las cargas externas dadas deben ser las mismas que las deformaciones de la estructura indeterminada original.

Debido a que las variables independientes o incógnitas en el método de las deformaciones consistentes son fuerzas redundantes (y/o momentos), los cuales deben determinarse antes de que otras características de respuesta puedan evaluarse (por ejemplo, desplazamientos), el método es clasificado como método de las fuerzas.



## 2. GRADO DE INDETERMINACIÓN DEL SISTEMA

Para determinar el grado de indeterminación de una estructura, esta dada por la suma entre el grado de indeterminación externa más el grado de indeterminación interna:

$$GI = GIE + GII$$

**HIPERESTATICIDAD EXTERNA:** En general en todos los casos:

$$GIE = R - 3 - E$$

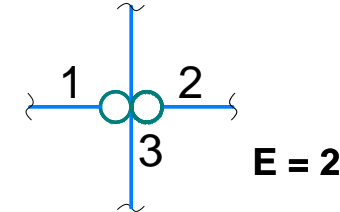
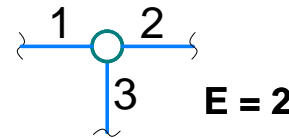
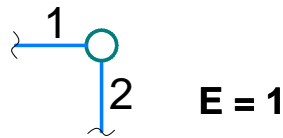
➤ **Armaduras:** Aquellas estructuras constituidas por elementos articulados en sus extremos.

$$GI = B + R - 2N$$

➤ **Estructuras aporricadas o continuas:**

$$GI = 3B + R - 3N - E$$

$$E = B - 1$$



Donde:

**GI:** grado de indeterminación del sistema

**E:** número de ecuaciones especiales

**GIE:** grado de indeterminación externa

**B:** número total de barras o elementos

**GII:** grado de indeterminación interna

**N:** número total de nudos incluyendo los apoyos

**R:** número total de reacciones en los apoyos

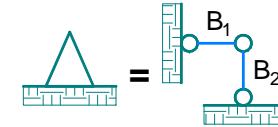
Veamos otras formas para determinar el grado de indeterminación de una estructura:

## 2.1 Armaduras: $GI = B - 2N$

Donde:

**B:** Número de barras incluido los apoyos.

**N:** Número de nudos.



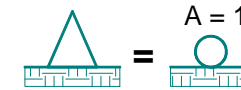
## 2.2 Estructuras aperticadas: $GI = 3C - A$

Donde:

**C:** Número de contornos cerrados.

**A:** Número de articulaciones o rótulas incluidos los apoyos.

La rótula que une "n" barras, es equivalente a (n - 1) rótulas simples.

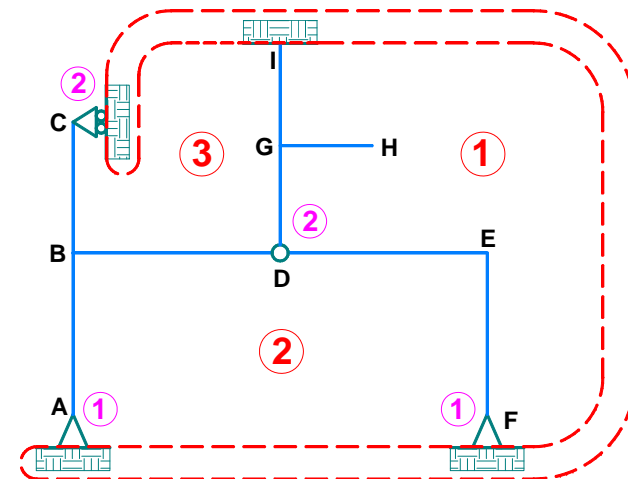


**Ejemplo:** Determine el grado de indeterminación del pórtico mostrado.

**Solución.**

👉 Calculamos el:  $GI = 3C - A = 3(3) - (6) = 3$

El pórtico tiene un grado de indeterminación 3.



### **3. ELECCIÓN DEL SISTEMA PRINCIPAL**

Después de haber determinado el grado de indeterminación del sistema, se analizan las posibles variantes de eliminación de las conexiones adicionales. El sistema principal del método de las fuerzas se determina a partir de la eliminación de “n” conexiones adicionales del pórtico hiperestático inicial.

En los pórticos hiperestáticos se distinguen las conexiones absolutamente necesarias y probablemente necesarias.

**Las conexiones absolutamente necesarias**, son aquellas, cuya eliminación de una de ellas, transforma al pórtico hiperestático en inestable. No se permite la eliminación de estas conexiones en la elección del sistema principal.



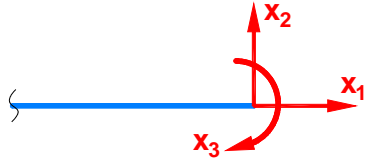




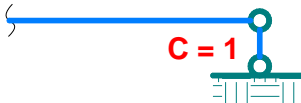


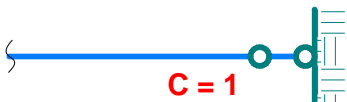
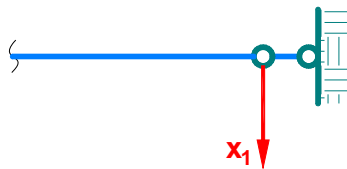
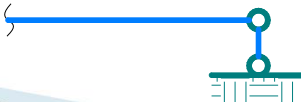

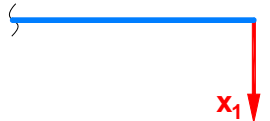
**Las conexiones probablemente necesarias**, son aquellas, cuya eliminación no permite transformar al pórtico hiperestático en inestable.

**Para la elección del sistema principal se permite eliminar solamente las conexiones probablemente necesarias.**

En el sistema principal deben surgir las mismas fuerzas que en el sistema inicial. Por ello, en el sistema principal, en lugar de las conexiones eliminadas, se reemplazan por fuerzas que surgen en ellas en el sistema inicial.

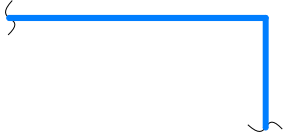
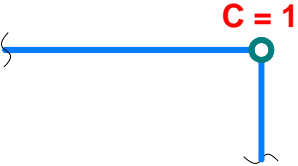
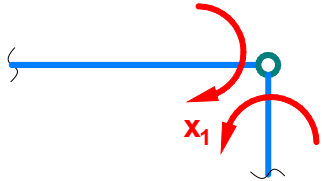
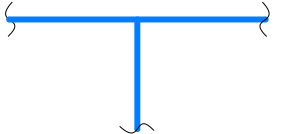
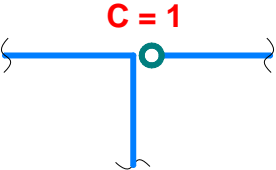
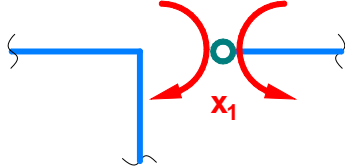
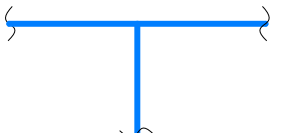
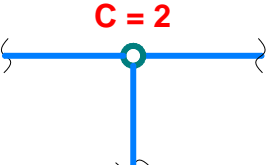
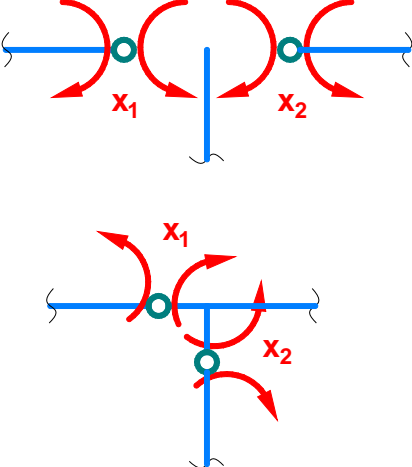


### 3.1 Ejemplos de eliminación de conexiones y su reemplazo por fuerzas o momentos

NUDOS DEL PÓRTICO INICIAL	NUDOS DEL SISTEMA PRINCIPAL CANTIDAD DE CONEXIONES ELIMINADAS	FUERZAS QUE REEMPLAZAN A LAS CONEXIONES ELIMINADAS
	 <p><math>C = 3</math></p>	
	 <p><math>C = 1</math></p>	
	 <p><math>C = 1</math></p>	
	 <p><math>C = 1</math></p>	
	 <p><math>C = 1</math></p>	





NUDOS DEL PÓRTICO INICIAL	NUDOS DEL SISTEMA PRINCIPAL CANTIDAD DE CONEXIONES ELIMINADAS	FUERZAS QUE REEMPLAZAN A LAS CONEXIONES ELIMINADAS
		
		
		

## 4. SISTEMA DE ECUACIONES CANÓNICAS

### 4.1 Armaduras:

La indeterminación de una armadura puede deberse a apoyos sobrantes o a barras sobrantes o a ambas cosas a la vez.

Si existe apoyos sobrantes, se elimina y se introduce en estos sitios las acciones hiperestáticas ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) respectivamente, consiguiendo de esta manera llevar la armadura a una condición de determinación y estabilidad.

Si el elemento sobrante es una barra, entonces ésta debe ser cortada en una sección y reemplazada por dos fuerzas axiales iguales y opuestas que serán hiperestáticas y representan la acción interna en esa barra.

La ecuación de condición es que el desplazamiento del apoyo o desplazamiento relativo entre los dos lados de la sección cortada producido por los efectos combinados de la carga inicial y las acciones hiperestáticas debe ser igual a cero.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones canónicas para una armadura es:

➤ **GI = 1.**  $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$

➤ **GI = 2.**  $\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0$   
 $\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0$

Donde:

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1 N_1 L}{EA} \quad \Delta_{1P} = \sum \frac{N_1 N_P L}{EA}$$

En general:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{N_i N_k L}{EA} \quad \Delta_{iP} = \sum \frac{N_i N_P L}{EA}$$

## 4.2 Pórticos:

En general, para un pórtico con grado de hiperestaticidad “n” y sometido a cargas externas, el sistema de ecuaciones canónicas tiene la siguiente forma:

Donde:

$\delta_{ik}$ : desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita  $x_i$  en la dirección  $x_i$ , debido a la acción de la carga  $x = 1$ .

$\Delta_{iP}$ : desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita  $x_i$  en la dirección  $x_i$ , debido a la acción de la carga externa.

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2P} = 0$$

⋮

$$\delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nP} = 0$$

Los coeficientes  $\delta_{ik}$  y  $\Delta_{iP}$  se denominan respectivamente, coeficiente del sistema de ecuaciones canónicas y miembro libre o de carga del mismo sistema.

Como  $\delta_{ik}$  y  $\Delta_{iP}$  son desplazamientos, entonces para su cálculo se puede utilizar la fórmula de Mohr y sus correspondientes formas de cálculo de integrales, como la fórmula de Simpson - Kornoujov o el método de Vereschaguin.

Donde:

$M_i$ ,  $M_k$ : diagramas de momento flector, que surgen en el sistema principal, debido a la acción de las fuerzas  $x_i = 1$  y  $x_k = 1$ .

$M_P$ : diagrama de momento flector, que surge en el sistema principal, debido a la acción de las cargas externas.

$$\delta_{ik} = \sum \int_L \frac{M_i M_k L}{EA} dx$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int_L \frac{M_i M_P}{EI} dx$$



## 5. DIAGRAMAS FINALES DE FUERZAS INTERNAS

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por las siguientes fórmulas:

Donde:

$$M = M_1x_1 + M_2x_2 + \dots + M_nx_n + M_P$$
$$V = V_1x_1 + V_2x_2 + \dots + V_nx_n + V_P$$
$$N = N_1x_1 + N_2x_2 + \dots + N_nx_n + N_P$$

**M, V y N** : diagramas finales de fuerzas internas

**M<sub>i</sub>, V<sub>i</sub> y N<sub>i</sub>** : diagramas de fuerzas internas en el estado unitario de carga "i" del sistema principal

**M<sub>P</sub>, V<sub>P</sub> y N<sub>P</sub>** : diagramas de fuerzas internas en el estado de carga externa del sistema principal

En ciertos casos, la sumatoria de diagramas de la fórmula se aplica solo a momentos flectores, debido a que el diagrama de fuerzas cortantes  $V$  se obtiene a partir del diagrama  $M$ , a través de la dependencia diferencial de la fórmula:

$$V_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx}$$

Las fuerzas axiales o normales se determinarán a partir de la condición de equilibrio de los nudos del pórtico. A dichos nudos del pórtico se le aplicarán las cargas externas existentes, fuerzas cortantes calculadas anteriormente y las fuerzas axiales desconocidas. Después de ello, se elaborarán para estos nudos las ecuaciones de equilibrio y a partir de ellas se encontrarán las fuerzas axiales en las barras del pórtico. El equilibrio de los nudos se debe de analizar de tal manera que en cada nudo no existan más de dos fuerzas axiales desconocidas.

## 6. EFECTO DE LA VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA

En el cálculo de pórticos con “n” grados de hiperestaticidad ante la acción de la temperatura, el esquema de cálculo no varía, solamente se reemplazan en las ecuaciones canónicas obtenidas en el ítem 4, los miembros de carga  $\Delta_{iP}$  por los miembros libres  $\Delta_{iT}$ . La magnitud  $\Delta_{iT}$  viene a ser el desplazamiento de puntos del sistema principal, en los cuales se aplica la fuerza  $x_i$  en la dirección  $x_i$ , debido a la acción de la temperatura. Estos coeficientes  $\Delta_{iT}$  se determinan por la fórmula:

Los diagramas finales de fuerzas internas se determinan por la fórmula del ítem 5, siendo  $M_P = 0$ ,  $V_P = 0$  y  $N_P = 0$ .

$$\Delta_{iT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_i}$$

## 7. EFECTO DE ASENTAMIENTO O DESPLAZAMIENTO DE APOYOS

En el cálculo de pórticos con “n” grados de hiperestaticidad ante el posible asentamiento o desplazamiento de los apoyos, su esquema de cálculo tampoco varía. En el sistema de ecuaciones canónicas del ítem 4, los miembros de carga  $\Delta_{iP}$  se reemplazan por los miembros libres  $\Delta_{iC}$ . La magnitud  $\Delta_{iC}$  viene a ser el desplazamiento de puntos del sistema principal, en los cuales se aplica la fuerza  $x_i$  en la dirección  $x_i$ , debido al asentamiento o desplazamiento de apoyos del sistema principal. Estos coeficientes  $\Delta_{iC}$  se determinan por la fórmula:

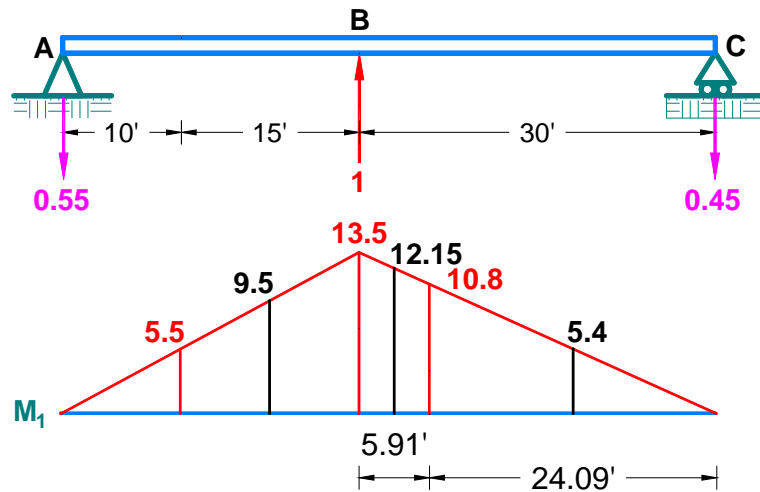
$$\Delta_{iC} = -\sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot C_j$$

**Ejemplo:** Resolver la viga mostrada.

**Solución.**

👉 Determinamos el grado de indeterminación:  $GI = R - 3 = 4 - 3 = 1$

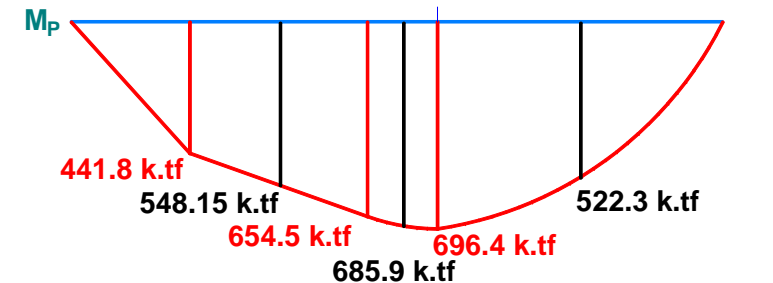
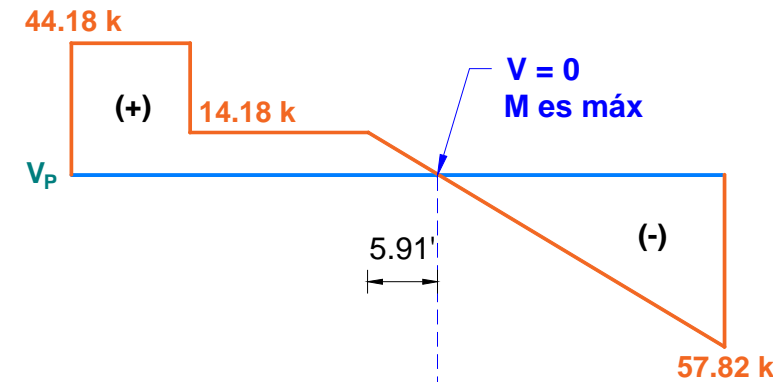
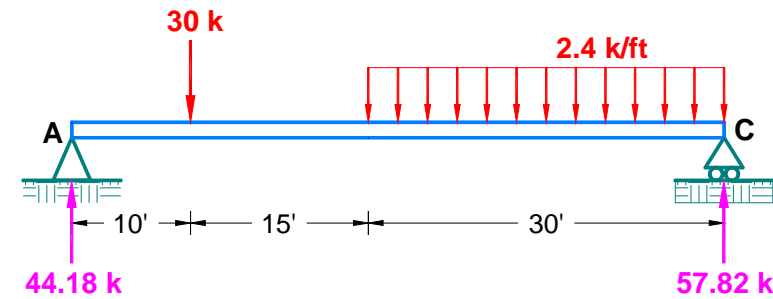
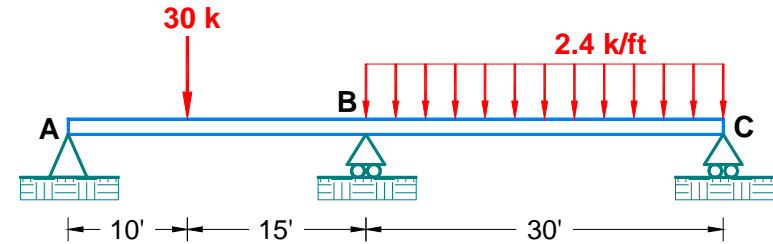
👉 Isostatizamos la estructura, para ello eliminamos el apoyo B y analizamos dos vigas:



👉 Establecemos el sistema de ecuaciones canónicas:  $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$

Donde:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx \quad \Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx$$

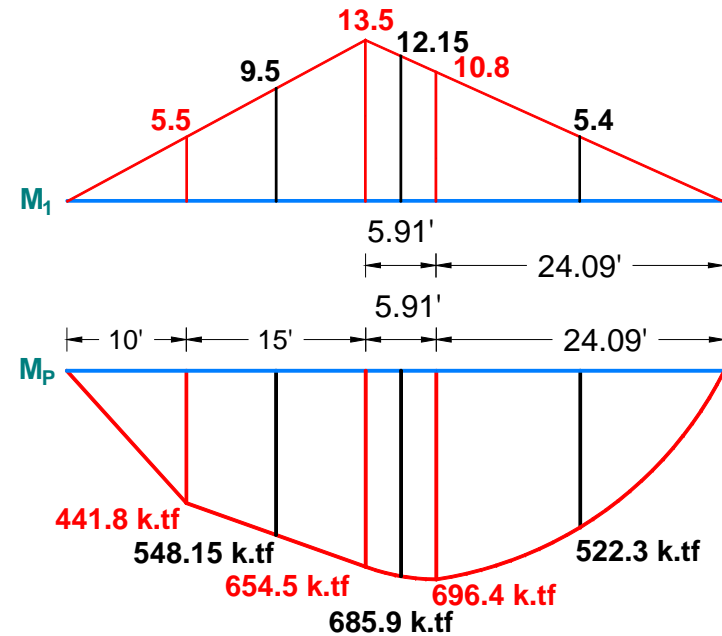


👉 **Calculamos los coeficientes de flexibilidad:**

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(25)(13.5)}_{\text{Area}_{M_1} = \frac{1}{2}bh} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)(13.5)}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h} \right]$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}(30)(13.5)}_{\text{Area}_{M_1} = \frac{1}{2}bh} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)(13.5)}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h} \right]$$

$$\therefore \delta_{11} = \frac{3341.25}{EI}$$



$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ - \underbrace{\frac{1}{2}(10)(5.5)}_{\text{Area}_{M_1} = \frac{1}{2}bh} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)(441.8)}_{\bar{y} = \frac{2}{3}h_P} \right] - \frac{15}{6EI} \left[ (5.5)(441.8) + 4(9.5)(548.15) + (13.5)(654.5) \right]$$

$$- \frac{5.91}{6EI} \left[ (13.5)(654.5) + 4(12.15)(685.9) + (10.8)(696.4) \right]$$

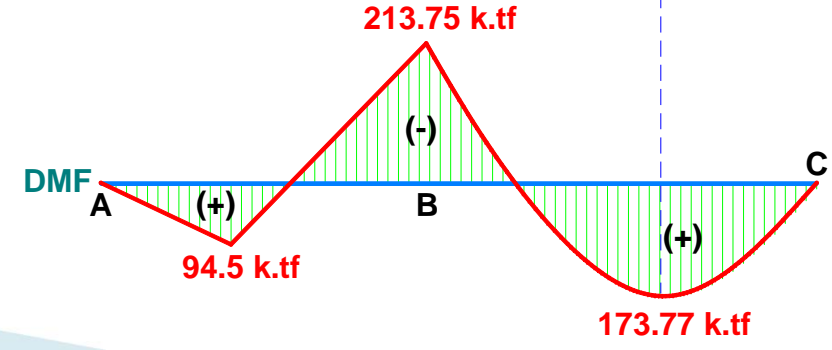
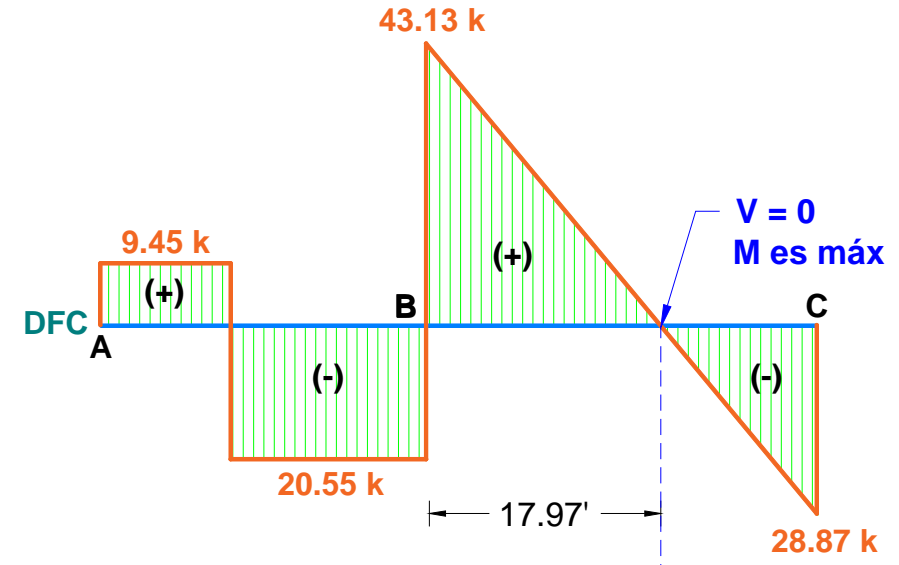
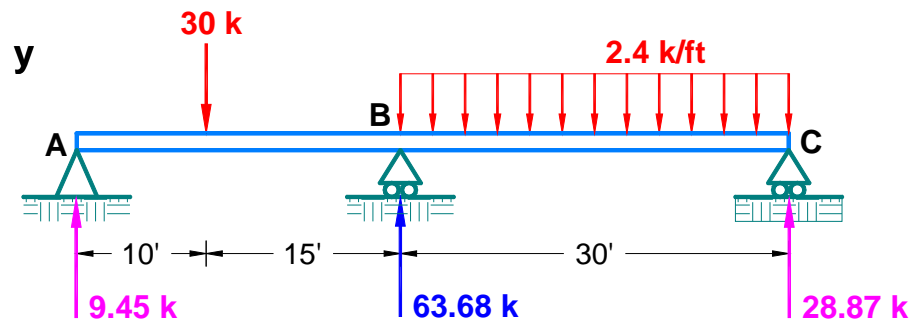
$$- \frac{24.09}{6EI} \left[ (10.8)(696.4) + 4(5.4)(522.3) + 0 \right]$$

$$\therefore \Delta_{1P} = - \frac{212777.52}{EI}$$

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad \left( \frac{3341.25}{EI} \right) x_1 - \frac{212777.52}{EI} = 0$$

$$\therefore x_1 = V_B = 63.68 \text{ k } (\uparrow)$$

👉 **Calculamos las reacciones y graficamos los DFC y DMF:**



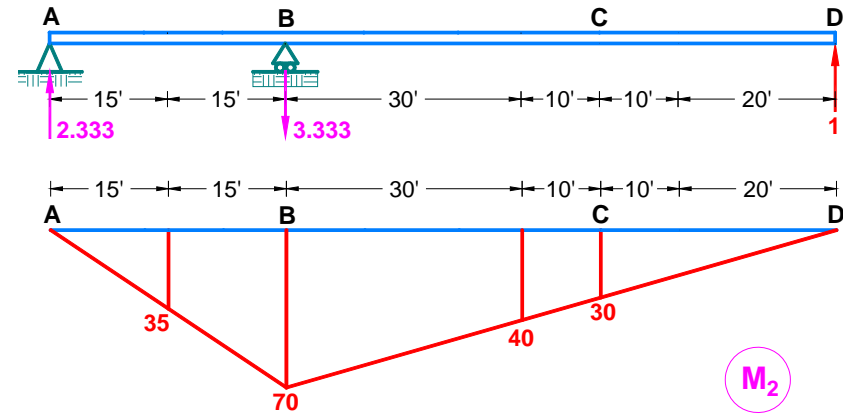
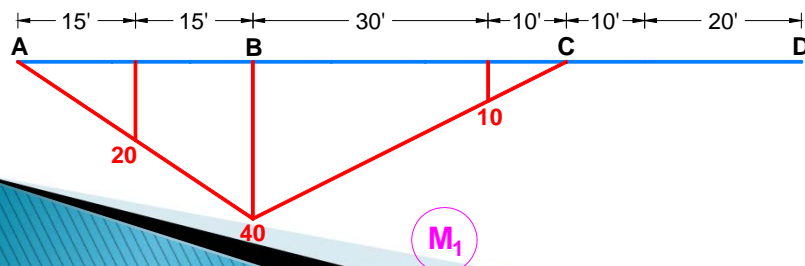
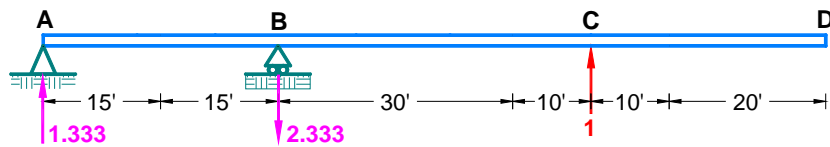
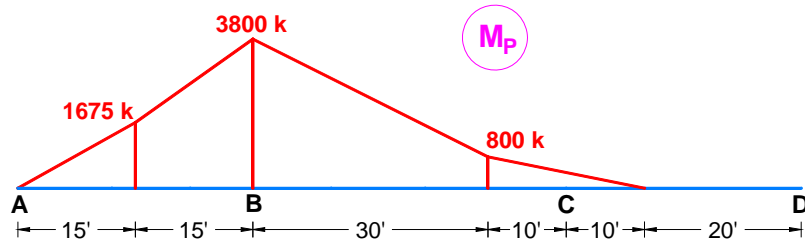
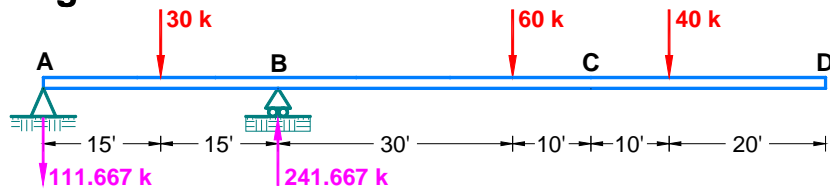
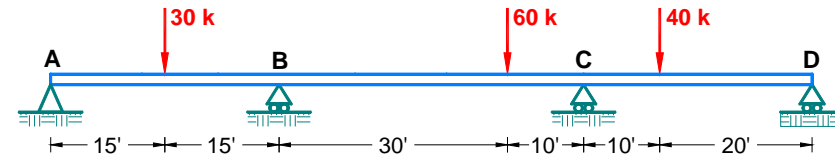


## Ejemplo: Resolver la viga mostrada.

### Solución.

👉 Determinamos el grado de indeterminación:  $GI = R - 3 = 5 - 3 = 2$

👉 Isostatizamos la estructura, para ello eliminamos los apoyos móviles C y D y analizamos tres vigas:



👉 Establecemos el sistema de ecuaciones canónicas:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

👉 Calculamos los coeficientes de flexibilidad:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (30)(40) \left( \frac{2}{3} \right) (40) \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (40)(40) \left( \frac{2}{3} \right) (40) \right] \therefore \delta_{11} = \frac{37333.33}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (30)(40) \left( \frac{2}{3} \right) (70) \right] + \frac{30}{6EI} [(40)(70) + 4(25)(55) + (10)(40)]$$

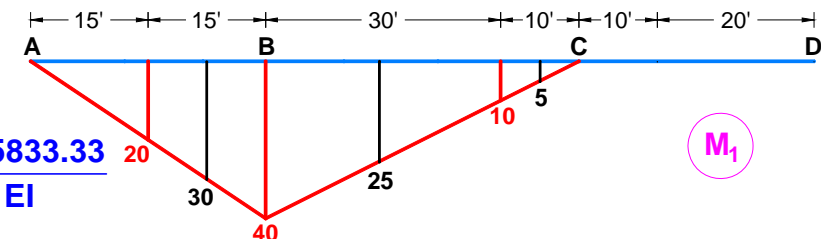
$$+ \frac{10}{6EI} [(10)(40) + 4(5)(35) + 0] \quad \therefore \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{73333.33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (30)(70) \left( \frac{2}{3} \right) (70) \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (70)(70) \left( \frac{2}{3} \right) (70) \right] \quad \therefore \delta_{22} = \frac{163333.33}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ - \frac{1}{2} (15)(20) \left( \frac{2}{3} \right) (1675) \right] - \frac{15}{6EI} [(20)(1675) + 4(30)(2737.5) + (40)(3800)]$$

$$- \frac{30}{6EI} [(40)(3800) + 4(25)(2300) + (10)(800)]$$

$$- \frac{10}{6EI} [(10)(800) + 4(5)(600) + 0] \quad \therefore \Delta_{1P} = - \frac{3435833.33}{EI}$$



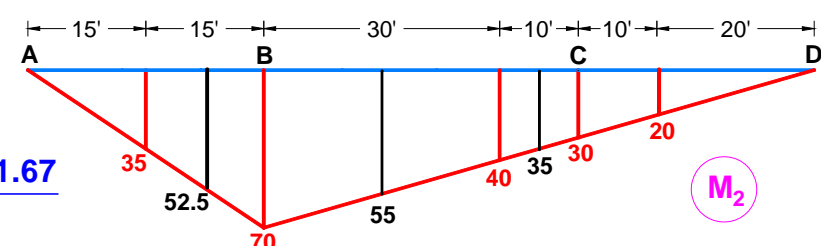
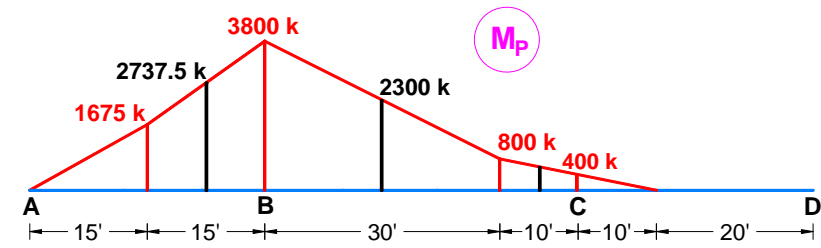
$$\Delta_{2P} = \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ - \frac{1}{2} (15)(35) \left( \frac{2}{3} \right) (1675) \right]$$

$$- \frac{15}{6EI} [(35)(1675) + 4(52.5)(2737.5) + (70)(3800)]$$

$$- \frac{30}{6EI} [(70)(3800) + 4(55)(2300) + (40)(800)]$$

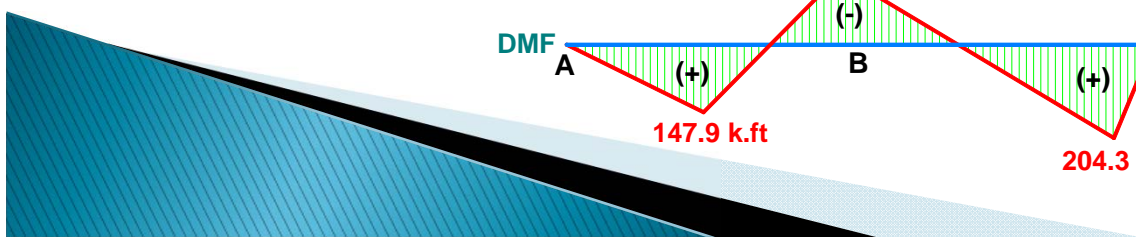
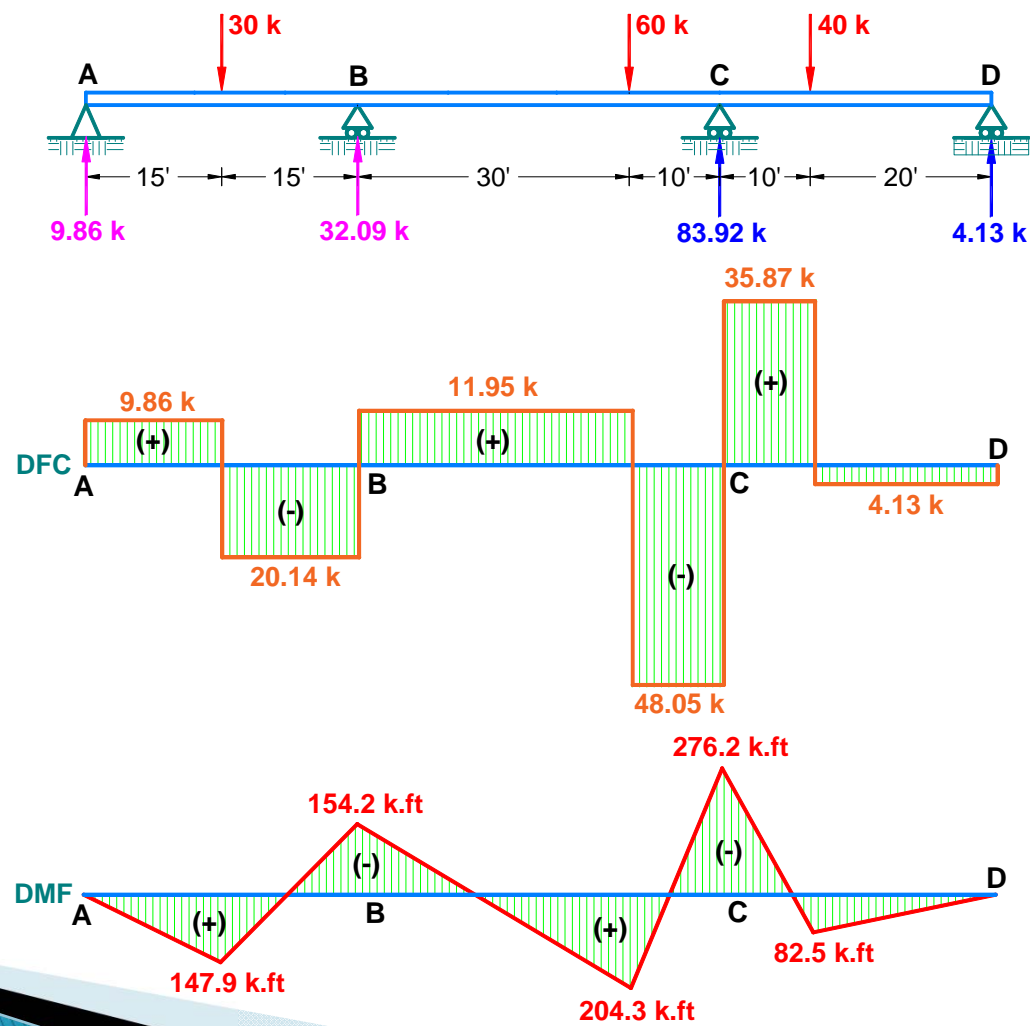
$$- \frac{20}{6EI} [(40)(800) + 4(30)(400) + 0]$$

$$\therefore \Delta_{2P} = - \frac{6828541.67}{EI}$$



$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{37333.33}{EI}x_1 + \frac{73333.33}{EI}x_2 - \frac{3435833.33}{EI} &= 0 & \therefore x_1 = V_C = 83.92 \text{ k } (\uparrow) \\ \frac{73333.33}{EI}x_1 + \frac{163333.33}{EI}x_2 - \frac{6828541.67}{EI} &= 0 & \therefore x_2 = V_D = 4.13 \text{ k } (\uparrow) \end{aligned}$$

👉 Calculamos las reacciones y graficamos los DFC y DMF:



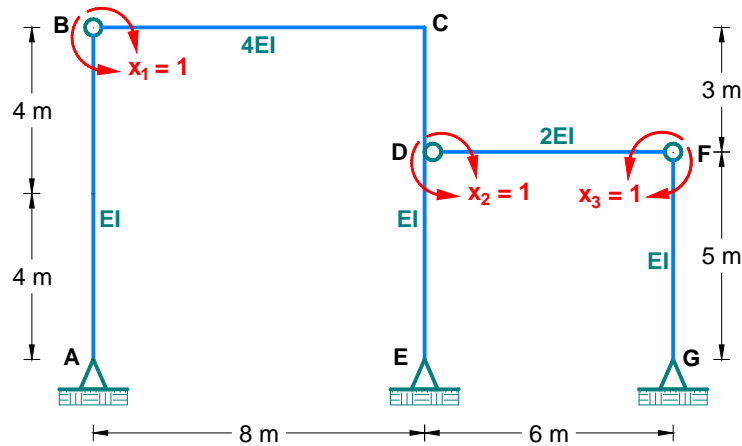
**Ejemplo:** Resolver el pórtico mostrado.

**Solución.**

👉 Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = 3C - A = 3(2) - 3 = 3$$

👉 Eliminamos tres conexiones adicionales, y serán en los nudos B, D y F:

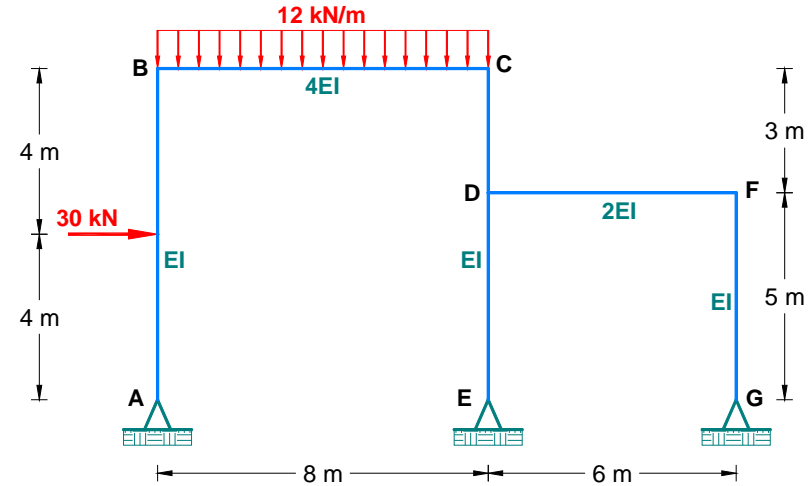


👉 Establecemos el sistema de ecuaciones canónicas:

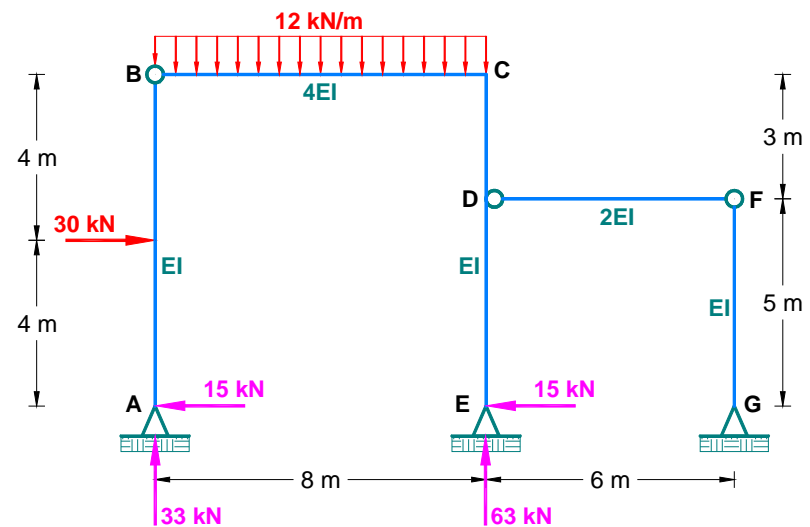
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

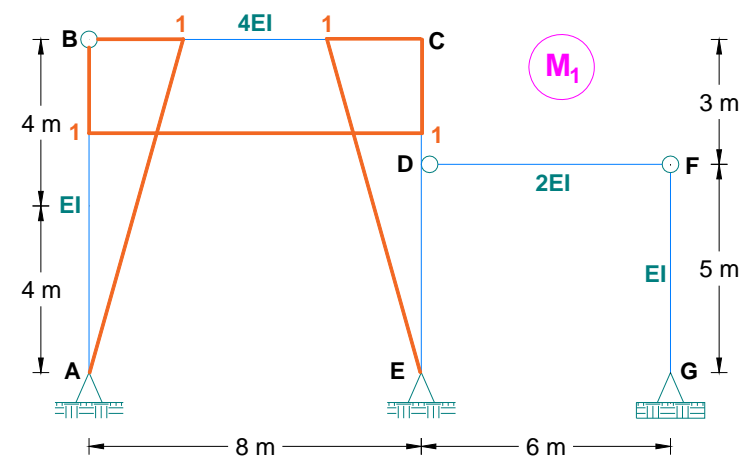
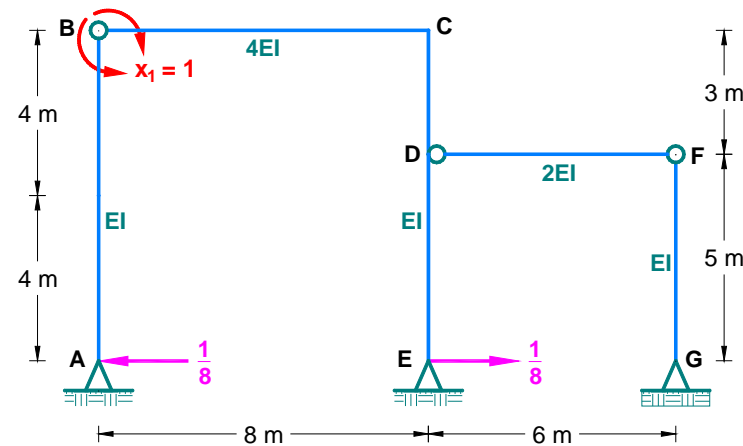
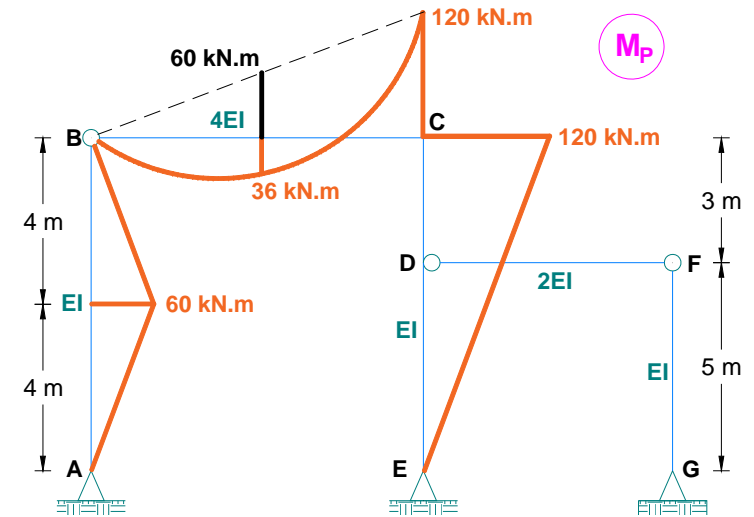
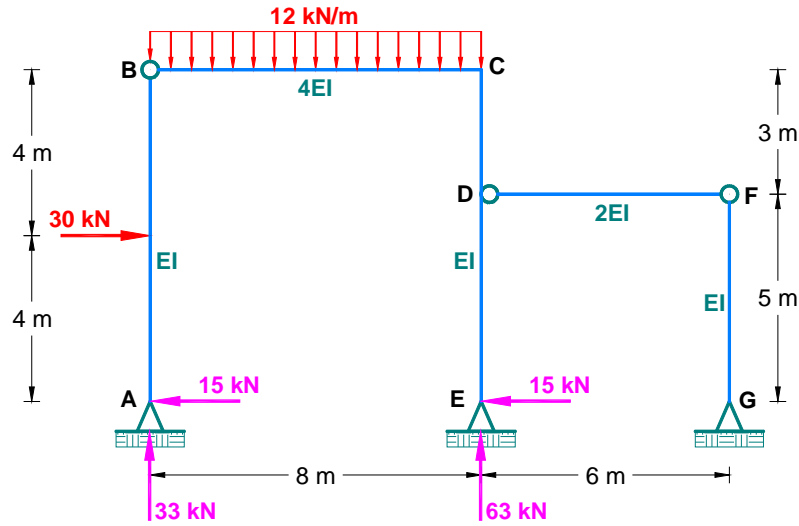
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$



👉 Resolvemos cuatro pórticos isostáticos y calculamos los coeficientes de flexibilidad:



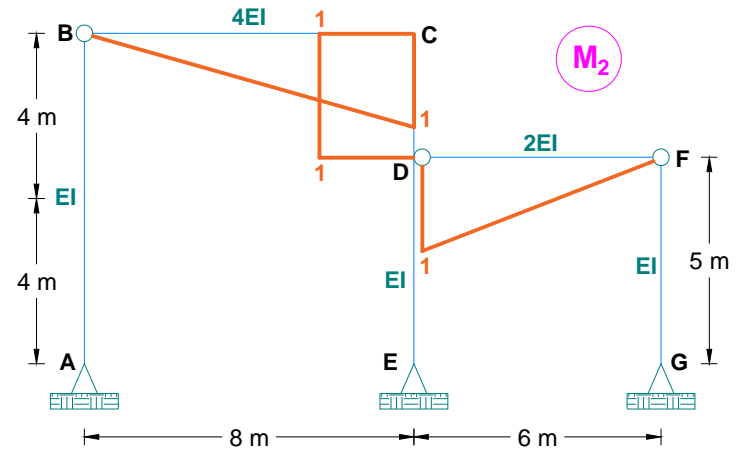
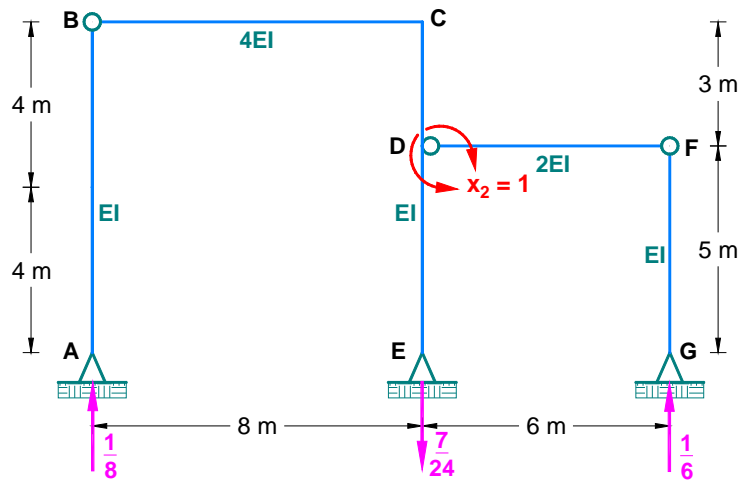


$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1 \times 2}{EI} \left[ \frac{1}{2} (8)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] + \frac{1}{4EI} [(8)(1)(1)]$$

$$\therefore \delta_{11} = \frac{7.333}{EI}$$

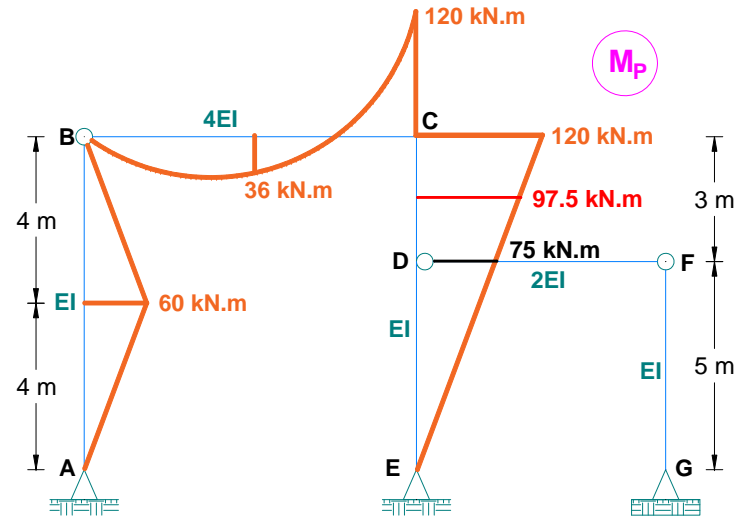
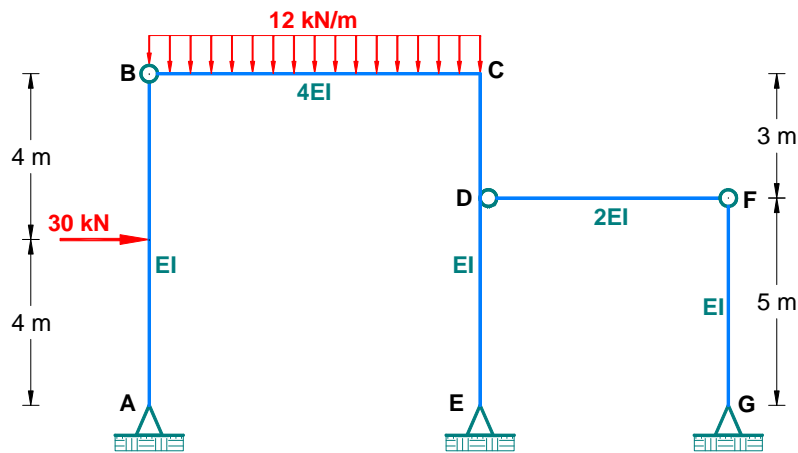
$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (8)(60) \left( \frac{1}{2} \right) (1) \right] - \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (8)(120) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] + \frac{8}{6(4EI)} [0 + 4(36)(1) - (120)(1)]$$

$$\therefore \Delta_{1P} = -\frac{192}{EI}$$

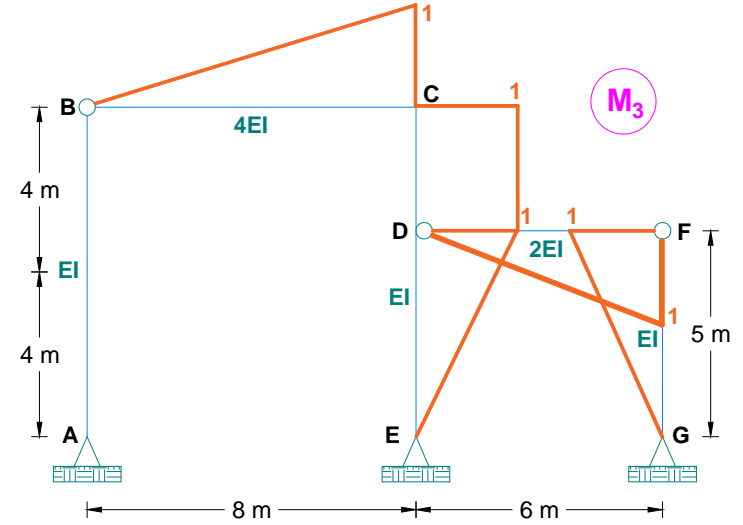
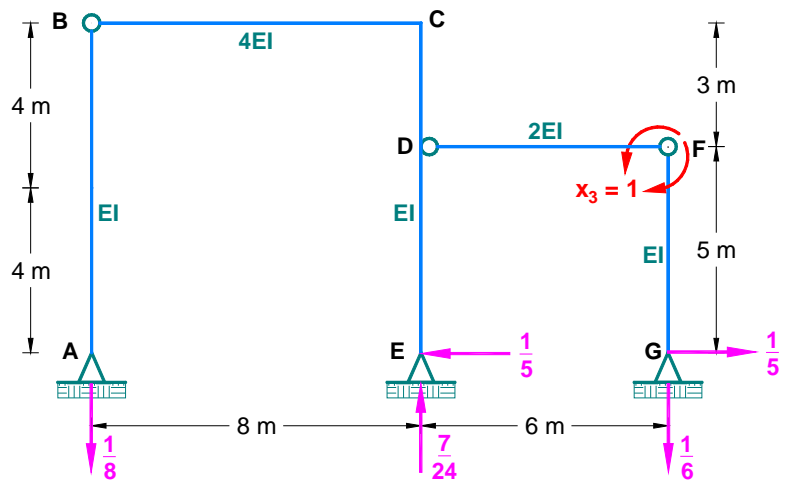


$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \left[ \frac{1}{2} (8)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] + \frac{1}{EI} [(4)(1)(1)] + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} (6)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right]$$

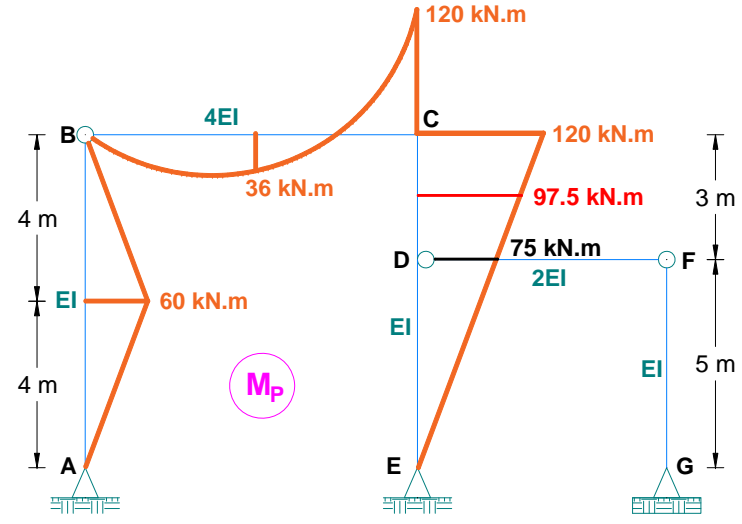
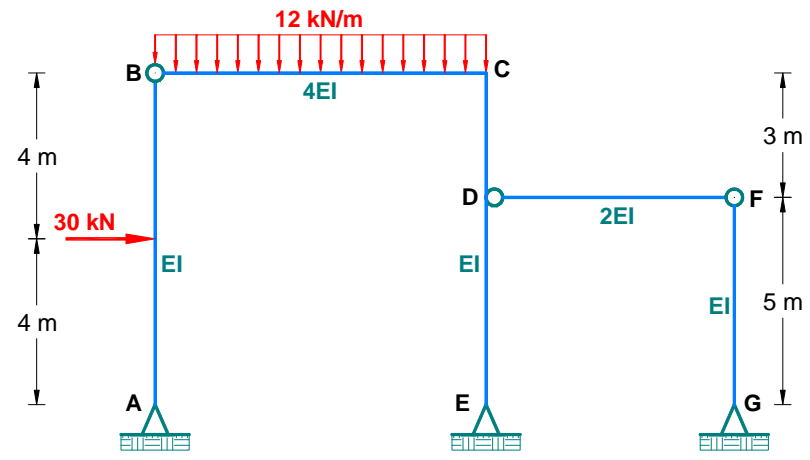
$$\therefore \delta_{22} = \frac{4.667}{EI}$$



$$\Delta_{2P} = \int \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \frac{8}{6(4EI)} \left[ 0 + 4(36) \left( \frac{1}{2} \right) - (120)(1) \right] - \frac{1}{EI} [(3)(1)(97.5)] \quad \therefore \Delta_{2P} = - \frac{308.5}{EI}$$



$$\delta_{33} = \int \frac{M_3 M_3}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \left[ \frac{1}{2}(8)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] + \frac{1}{EI} [(3)(1)(1)] + \frac{2}{EI} \left[ \frac{1}{2}(5)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2}(6)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (1) \right] = \frac{8}{EI}$$



$$\Delta_{3P} = \int \frac{M_3 M_P}{EI} dx = \frac{8}{6(4EI)} \left[ 0 - 4(36) \left( \frac{1}{2} \right) + (120)(1) \right] + \frac{1}{EI} [(3)(1)(97.5)] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(5)(1) \left( \frac{2}{3} \right) (75) \right] = \frac{433.5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{4EI} [(8)(1) \left(\frac{1}{2}\right)] + \frac{1}{EI} [(3)(1) \left(\frac{13}{16}\right)]$$

$$\therefore \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{3.438}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{M_1 M_3}{EI} dx = -\frac{1}{4EI} [(8)(1) \left(\frac{1}{2}\right)] - \frac{1}{EI} [(3)(1) \left(\frac{13}{16}\right)]$$

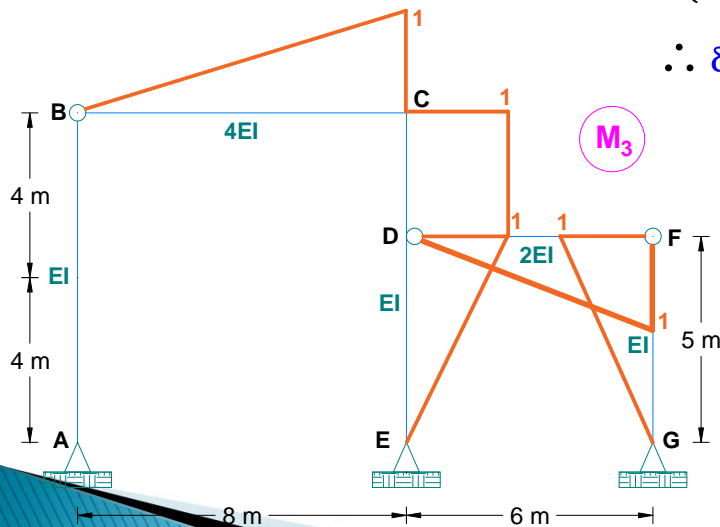
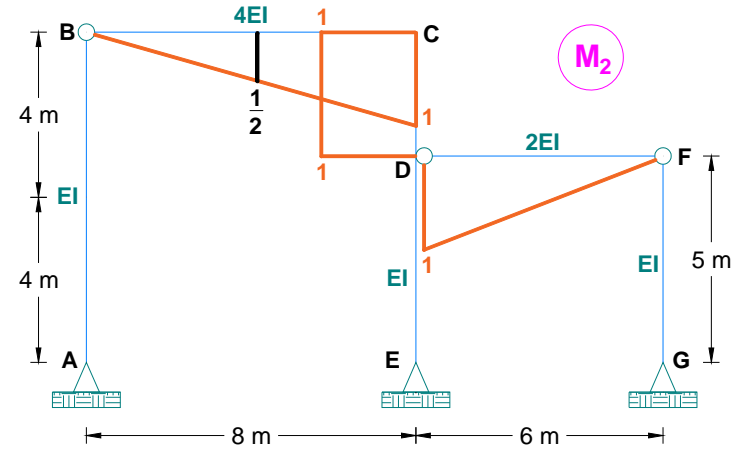
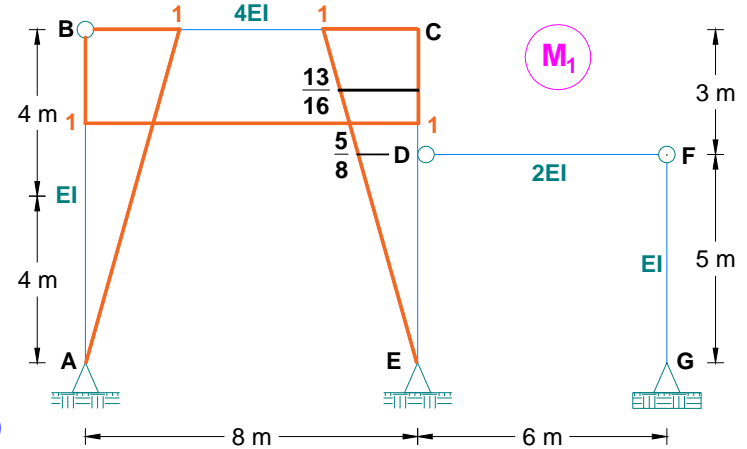
$$- \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} (5)(1) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{5}{8}\right) \right]$$

$$\therefore \delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{4.479}{EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{M_2 M_3}{EI} dx = -\frac{1}{4EI} \left[ \frac{1}{2} (8)(1) \left(\frac{2}{3}\right) (1) \right] - \frac{1}{EI} [(3)(1)(1)]$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} (6)(1) \left(\frac{1}{3}\right) (1) \right]$$

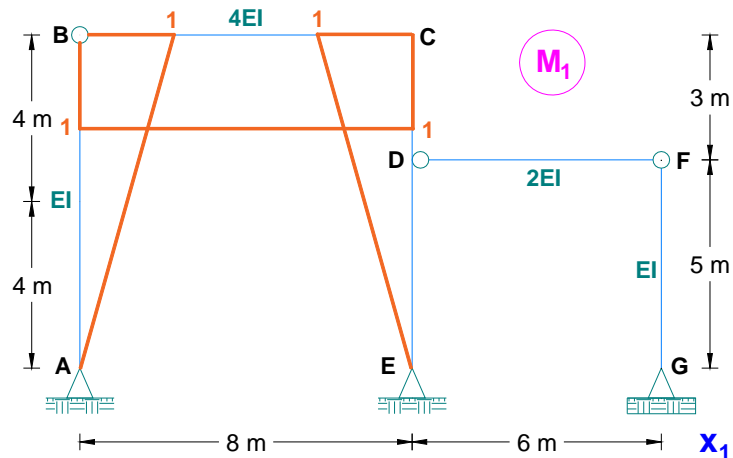
$$\therefore \delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{3.167}{EI}$$



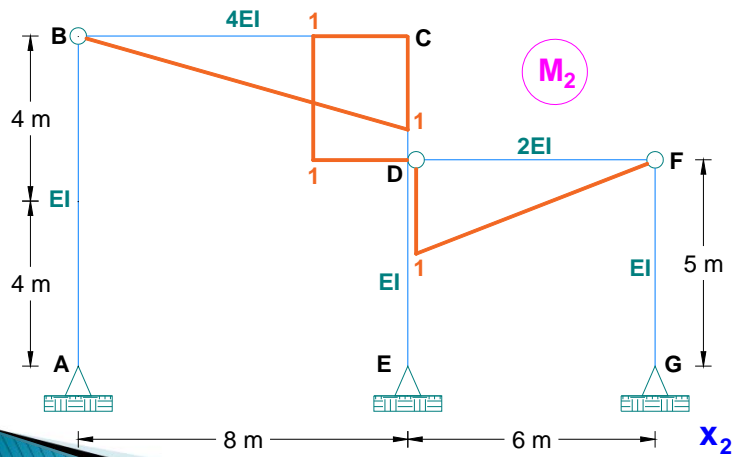
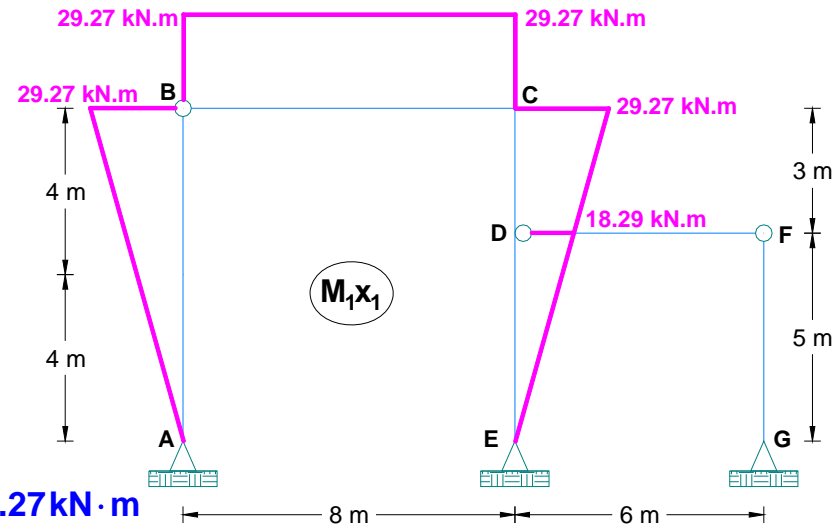
$$\left. \begin{aligned} \frac{7.333}{EI} x_1 + \frac{3.438}{EI} x_2 - \frac{4.479}{EI} x_3 - \frac{192}{EI} &= 0 & x_1 &= -29.27 \\ \frac{3.438}{EI} x_1 + \frac{4.667}{EI} x_2 - \frac{3.167}{EI} x_3 - \frac{308.5}{EI} &= 0 & x_2 &= 54.38 \\ -\frac{4.479}{EI} x_1 - \frac{3.167}{EI} x_2 + \frac{8}{EI} x_3 + \frac{433.5}{EI} &= 0 & x_3 &= -49.05 \end{aligned} \right\}$$



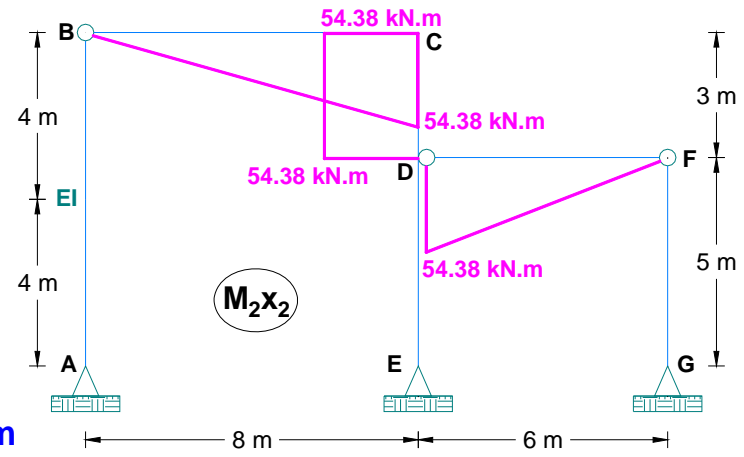
👉 **Calculamos los valores de cada gráfico para luego realizar el diagrama de momento flector (DMF):**

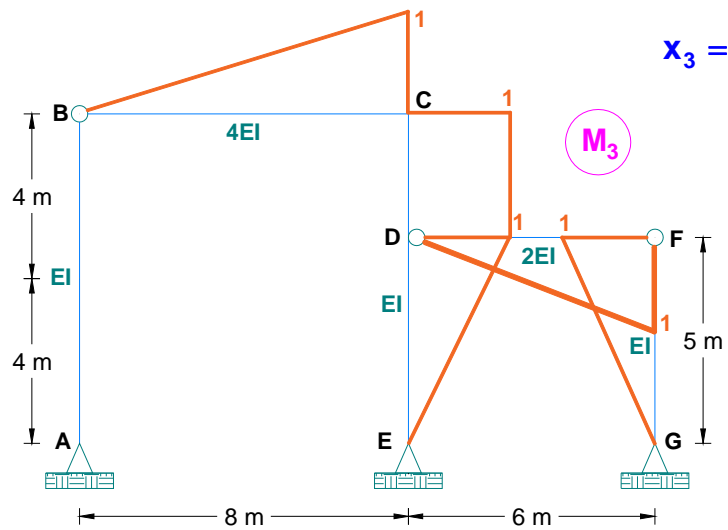


$$x_1 = -29.27 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

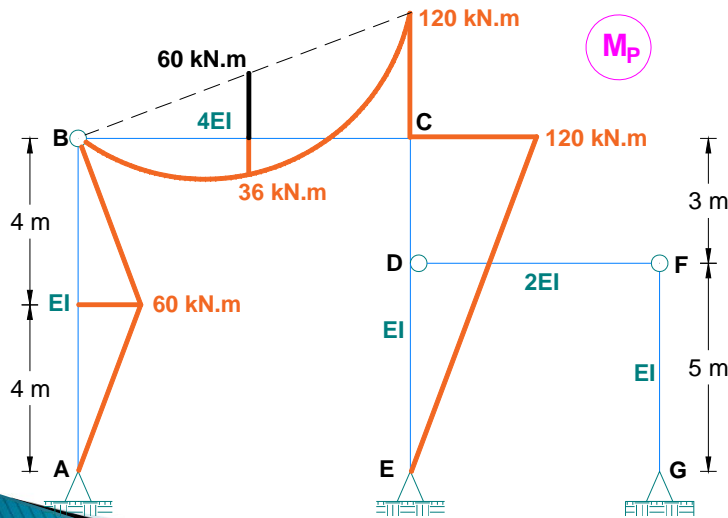
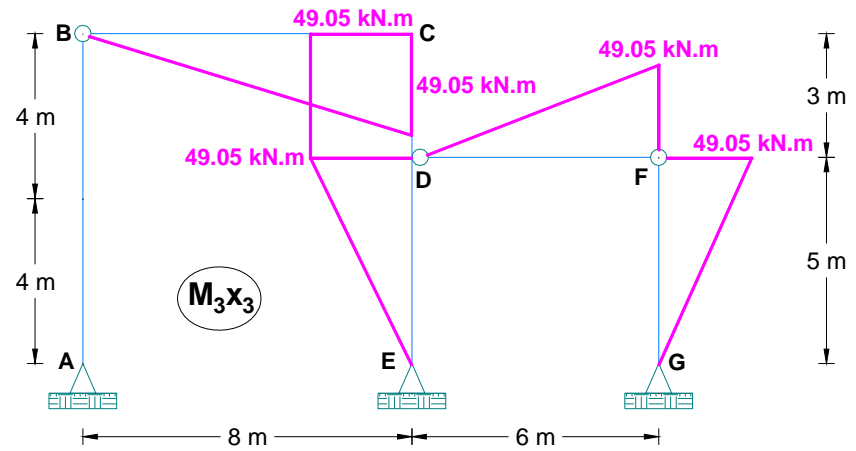


$$x_2 = 54.38 \text{ kN}\cdot\text{m}$$





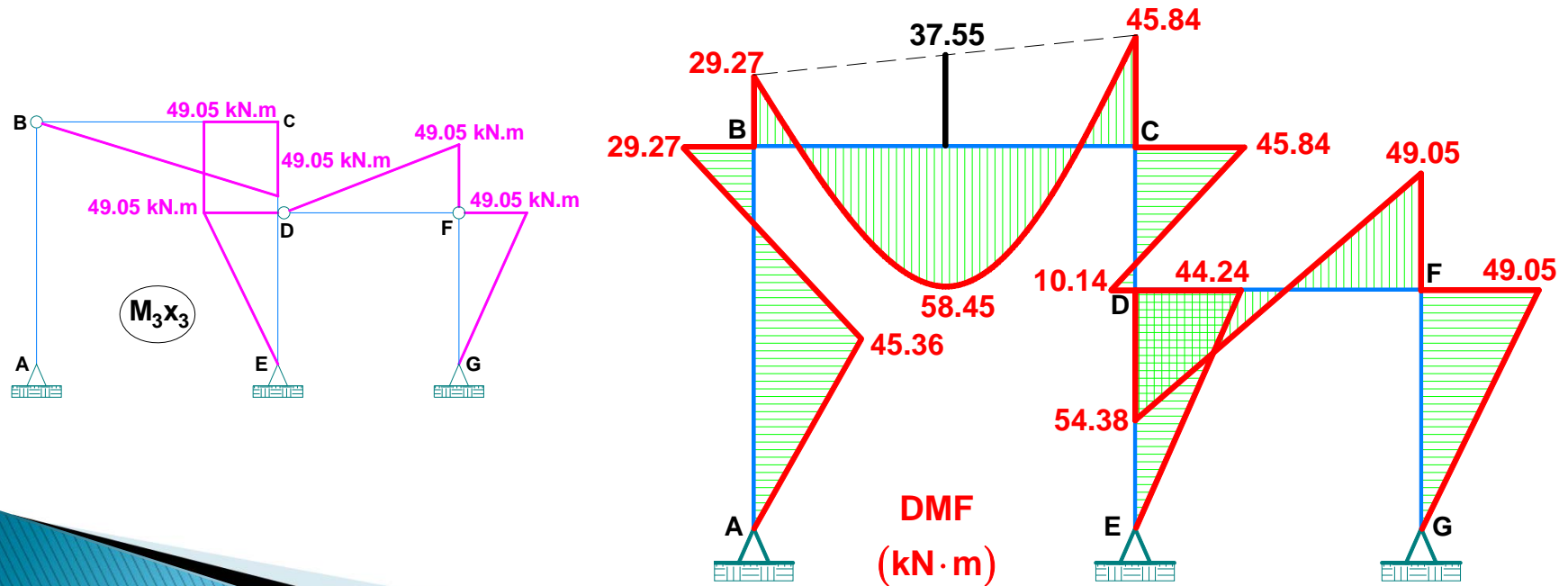
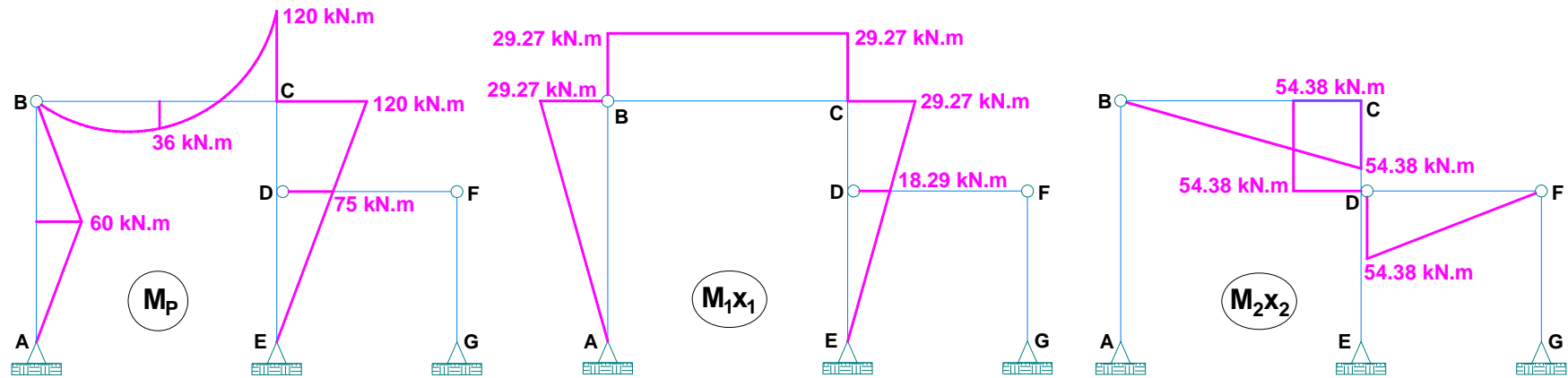
$$x_3 = -49.05 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Una vez obtenido todos los diagramas de momentos de cada uno de los pórticos analizados, se suman las ordenadas con sus respectivos signos en cada tramo (columnas y vigas), obteniéndose como resultado el diagrama de momentos flectores finales (DMF), el cual lo realizaremos a continuación.



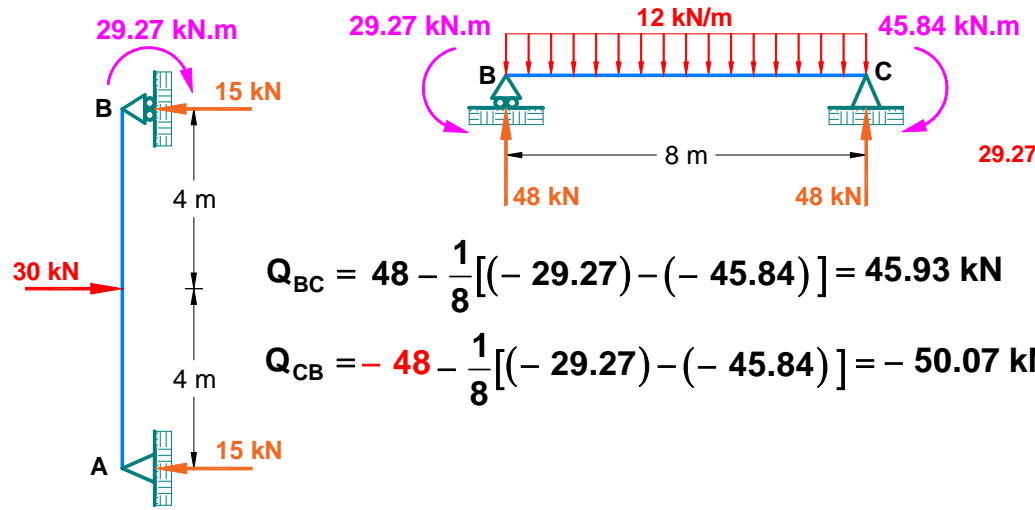
**Graficamos el diagrama de momento flector (DMF):  $M = M_p + M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3$**





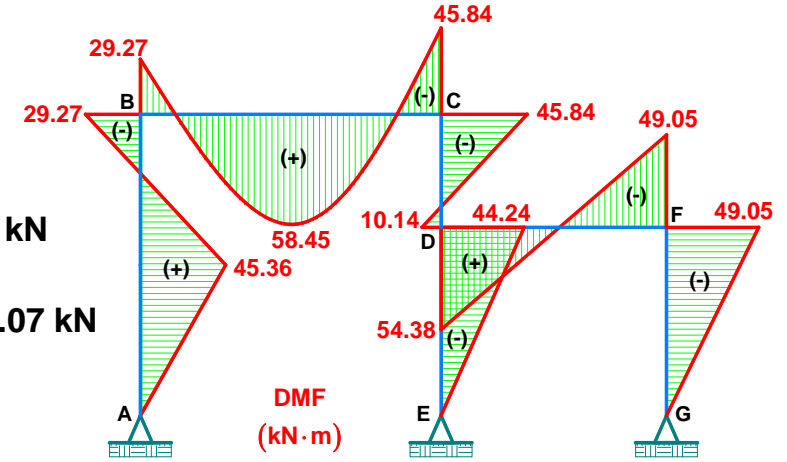
Calculamos y graficamos el diagrama de fuerzas cortantes (DFC):

$$Q_{ij} = V_{ij} - \left( \frac{M_i - M_j}{L_{ij}} \right)$$



$$Q_{BC} = 48 - \frac{1}{8} [(-29.27) - (-45.84)] = 45.93 \text{ kN}$$

$$Q_{CB} = -48 - \frac{1}{8} [(-29.27) - (-45.84)] = -50.07 \text{ kN}$$



$$Q_{AB} = 15 - \frac{1}{8} [0 - (-29.27)] = 11.34 \text{ kN}$$

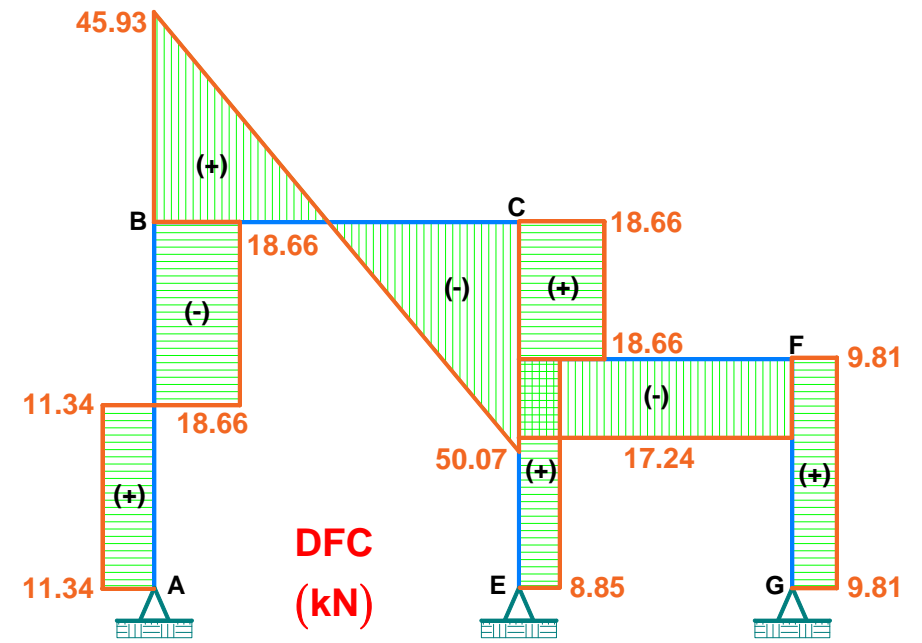
$$Q_{BA} = -15 - \frac{1}{8} [0 - (-29.27)] = -18.66 \text{ kN}$$

$$Q_{CD} = Q_{DC} = -\frac{1}{3} [(-45.84) - 10.14] = 18.66 \text{ kN}$$

$$Q_{DE} = Q_{ED} = -\frac{1}{5} [(-44.24) - 0] = 8.85 \text{ kN}$$

$$Q_{DF} = Q_{FD} = -\frac{1}{6} [54.38 - (-49.05)] = -17.24 \text{ kN}$$

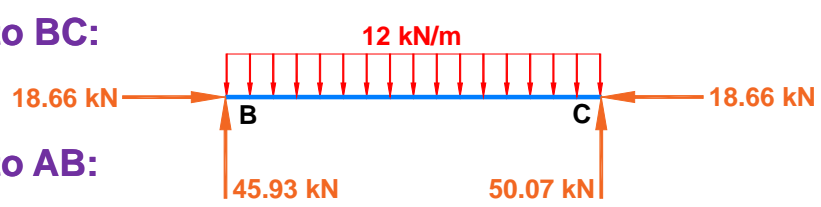
$$Q_{FG} = Q_{GF} = -\frac{1}{5} [(-49.05) - 0] = 9.81 \text{ kN}$$



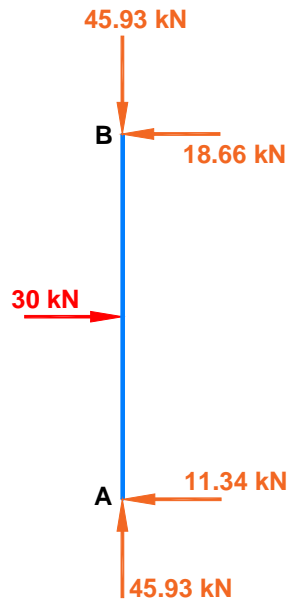
DFC (kN)

👉 **Calculamos y graficamos el diagrama de fuerzas axiales (DFA):**

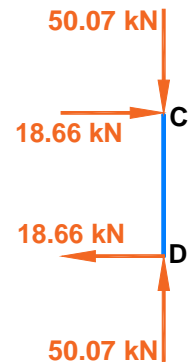
**Elemento BC:**



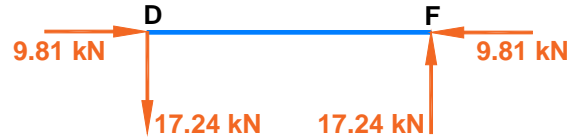
**Elemento AB:**



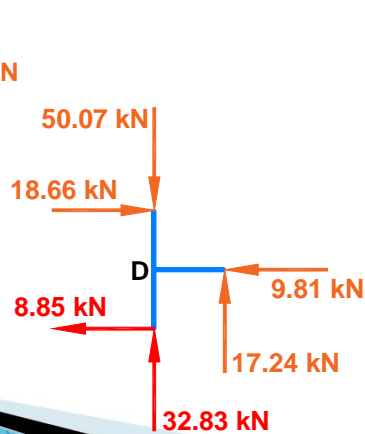
**Elemento CD:**



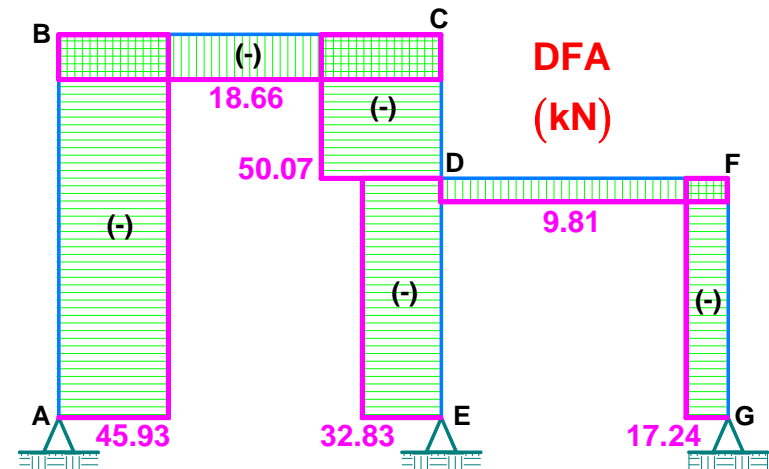
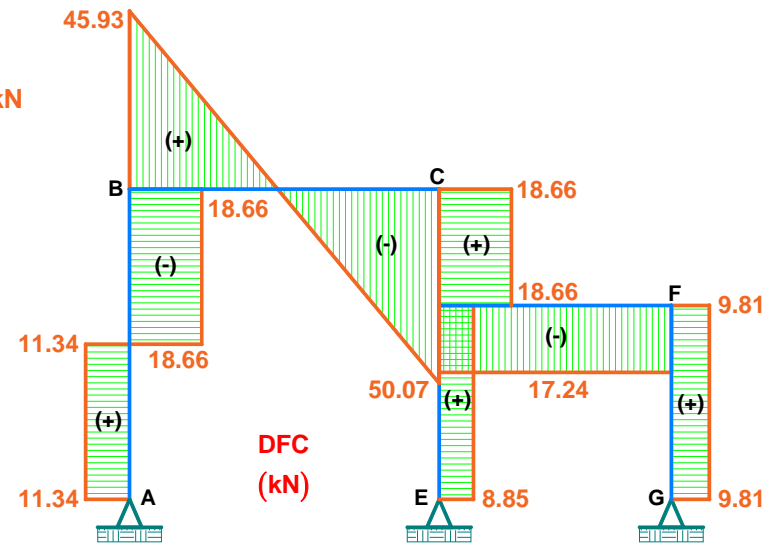
**Elemento DF:**



**Nudo D:**



**Elemento FG:**



**Ejemplo:** Resolver el pórtico, sabiendo que el apoyo E se asienta 2 cm y el apoyo D rota 0.01 rad en sentido horario. Considerar:

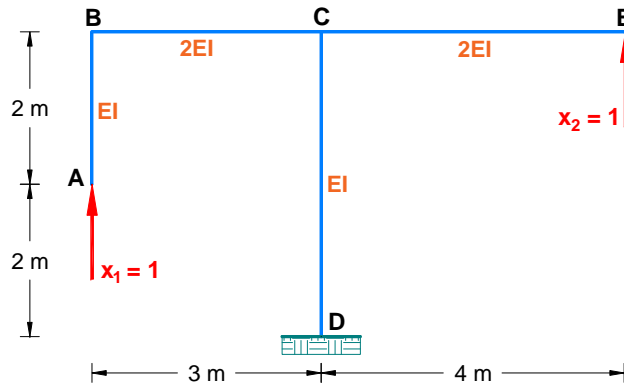
$$E = 2173706.5 \text{ tn/m}^2 \quad I = 675 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

**Solución.**

👉 Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = 3C - A = 3(2) - 4 = 2$$

👉 Eliminamos dos conexiones adicionales, y serán en los nudos A y E:



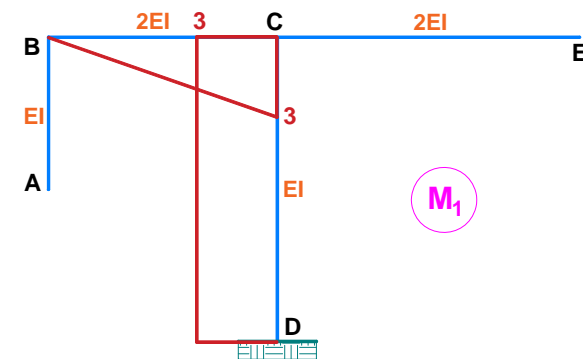
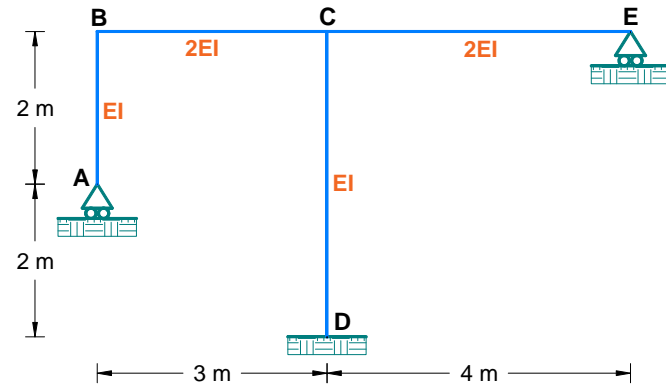
👉 Resolvemos dos pórticos isostáticos y calculamos los coeficientes de flexibilidad:

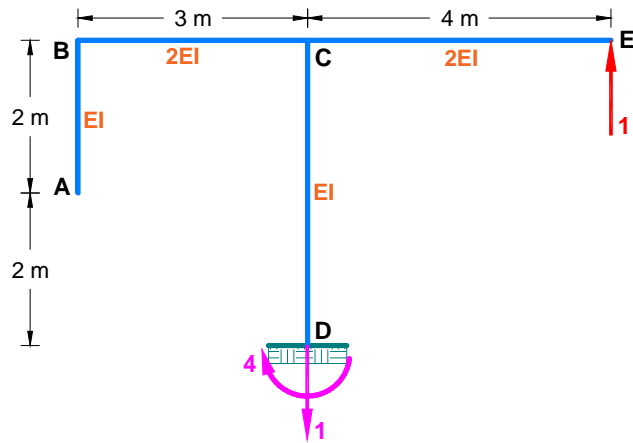
$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} (3)(3) \left( \frac{2}{3} \right) (3) \right] + \frac{1}{EI} [(4)(3)(3)]$$

$$\therefore \delta_{11} = \frac{40.5}{EI}$$

👉 Establecemos el sistema de ecuaciones canónicas:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_{1C} &= 0 \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_{2C} &= 0 \end{aligned} \right\} \Delta_{iC} = - \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot C_j$$





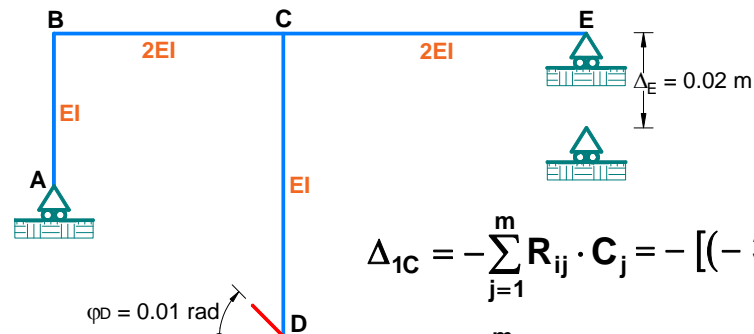
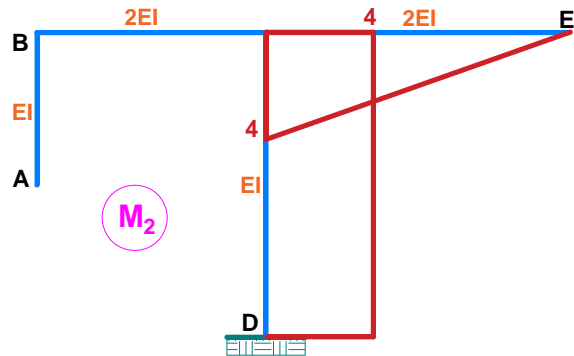
$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} (4)(4) \left( \frac{2}{3} \right) (4) \right] + \frac{1}{EI} [(4)(4)(4)]$$

$$\therefore \delta_{22} = \frac{74.667}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = - \frac{1}{EI} [(4)(3)(4)]$$

$$\therefore \delta_{12} = \delta_{21} = - \frac{48}{EI}$$

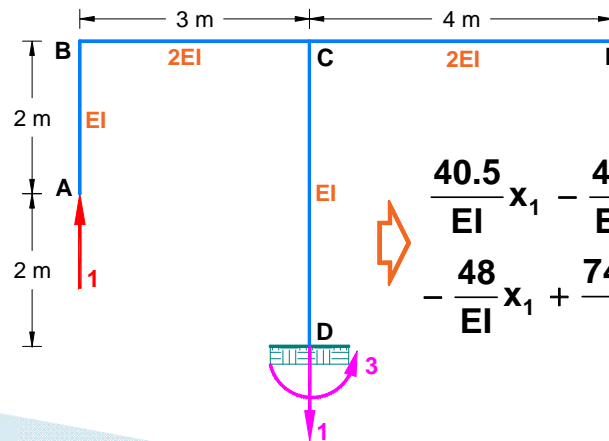
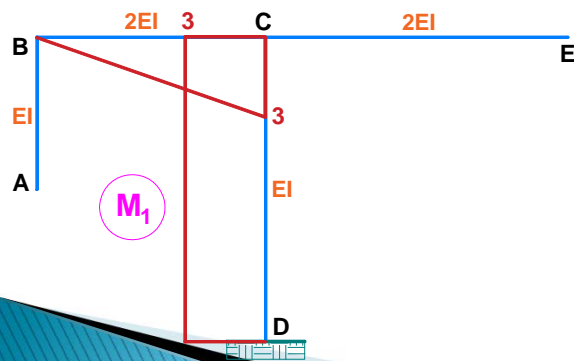
👉 Determinamos los coeficientes  $\Delta_{ic}$ :



$$\Delta_{1C} = - \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot C_j = - [(-3)(0.01)] = 0.03$$

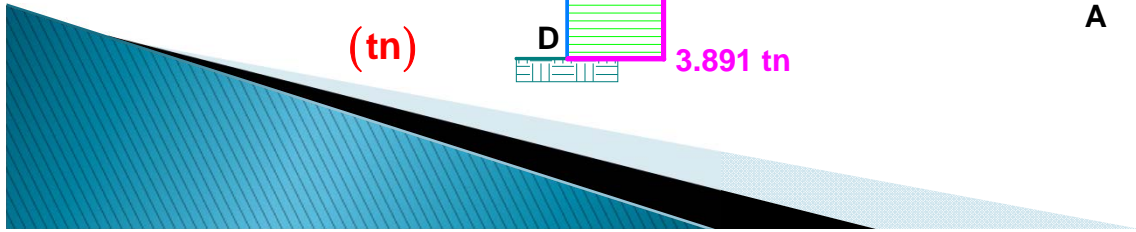
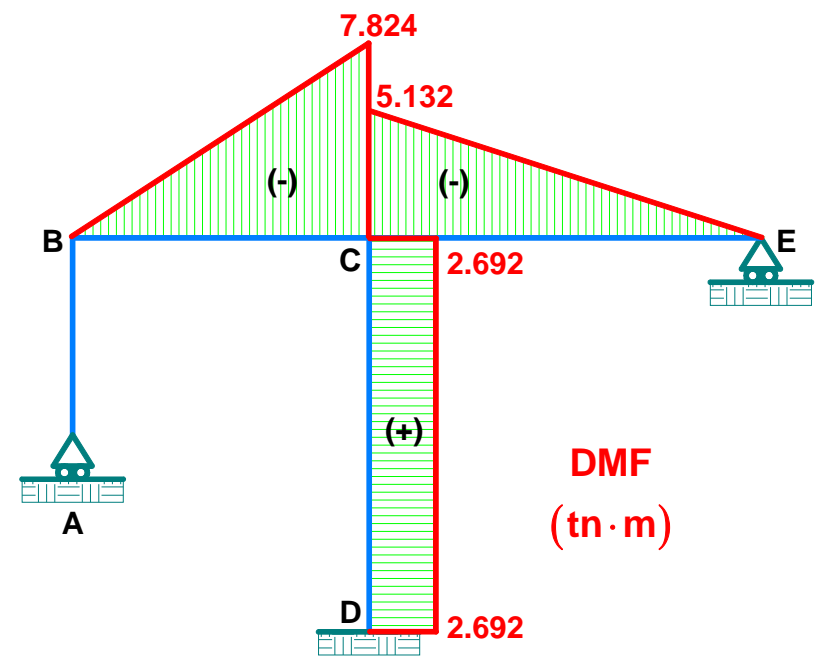
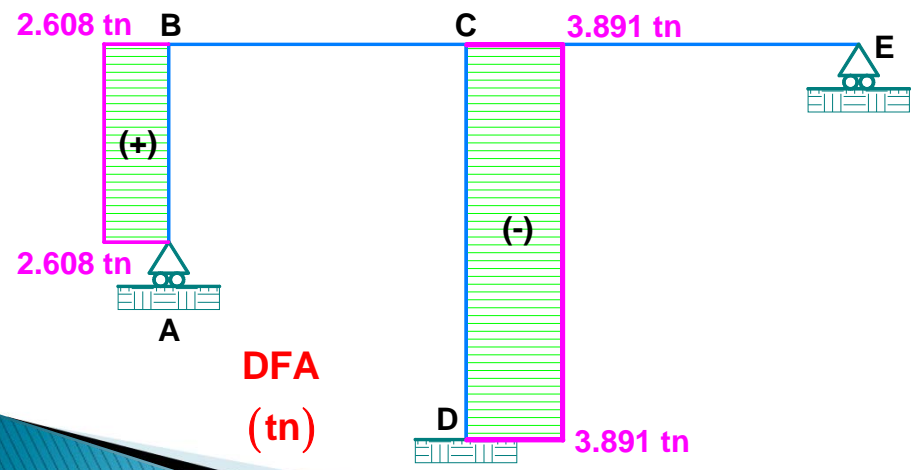
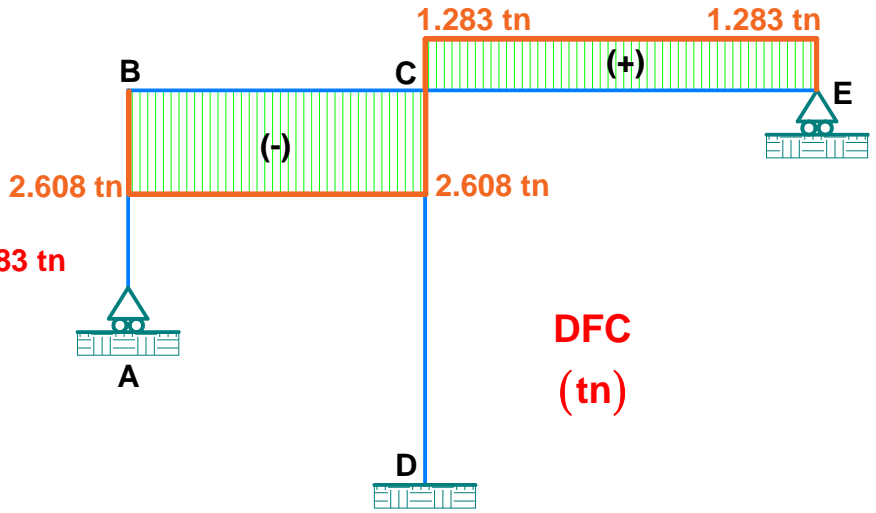
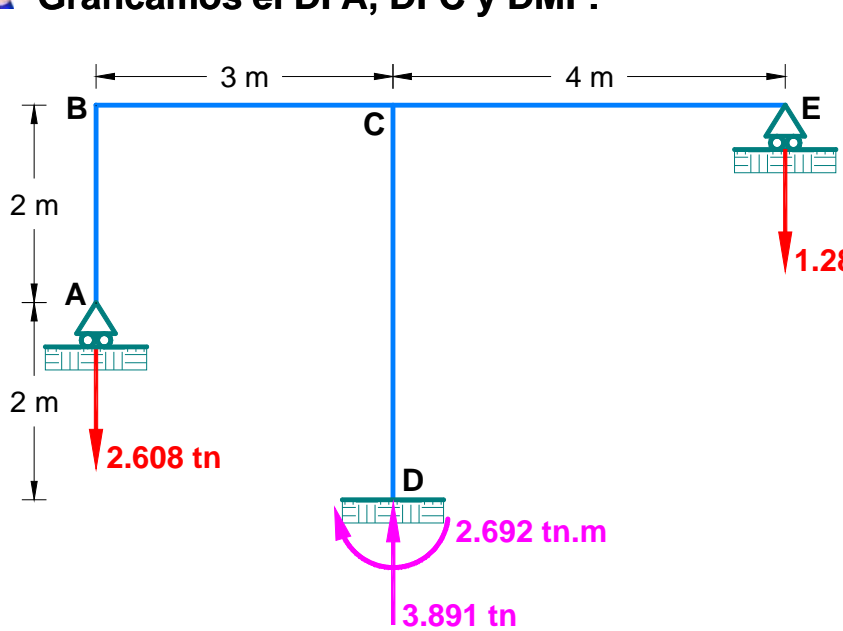
$$\Delta_{2C} = - \sum_{j=1}^m R_{ij} \cdot C_j = - [(-1)(0.02) + (4)(0.01)]$$

$$\therefore \Delta_{2C} = - 0.02$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{40.5}{EI} x_1 - \frac{48}{EI} x_2 + 0.03 &= 0 \\ - \frac{48}{EI} x_1 + \frac{74.667}{EI} x_2 - 0.02 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= - 2.608 \text{ tn} \\ x_2 &= - 1.283 \text{ tn} \end{aligned}$$

👉 Graficamos el DFA, DFC y DMF:





**Ejemplo:** Resolver el pórtico, considerando que es de concreto armado, si las dimensiones de la sección transversal para las columnas son de 30cmx30cm y para la viga de 30cmx50cm. Considerar:  $E = 2 \times 10^7 \text{ kPa}$   $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

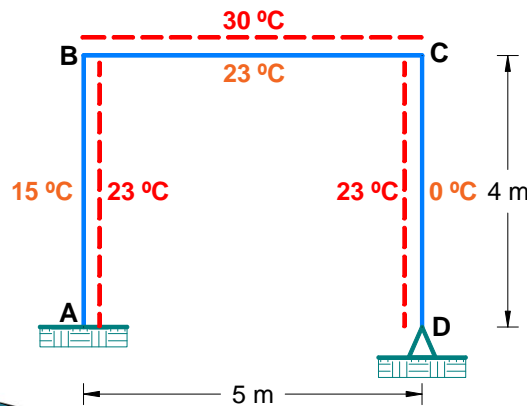
**Solución.**

👉 Calculamos las rigideces a flexión de las columnas y vigas:

$$EI_C = 2 \times 10^7 \left( 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \times \frac{1}{12} (0.30)(0.30)^3 = 1.35 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2 = EI$$

$$EI_V = 2 \times 10^7 \left( 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \times \frac{1}{12} (0.30)(0.50)^3 = 6.25 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2 = 4.63EI$$

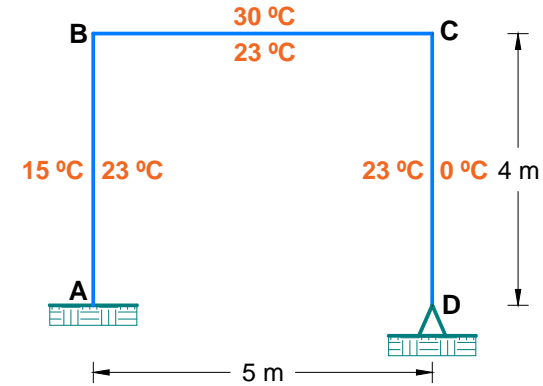
👉 Determinamos las zonas que se encuentran sometidas a tracción en el pórtico:



Las líneas discontinuas de color rojo representan las zonas que se encuentran sometidas a tracción en el pórtico debido que existe mayor temperatura.

👉 Establecemos el sistema de ecuaciones canónicas:

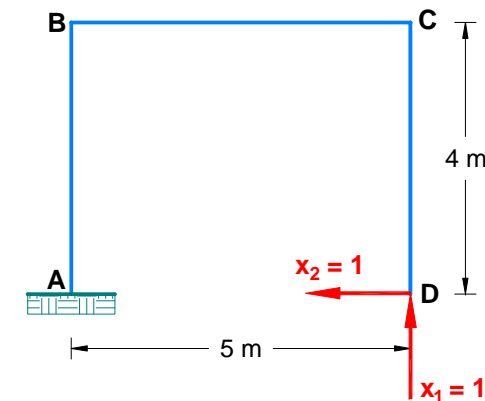
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1T} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2T} &= 0 \end{aligned} \right\} \Delta_{iT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} A_{N_i}$$



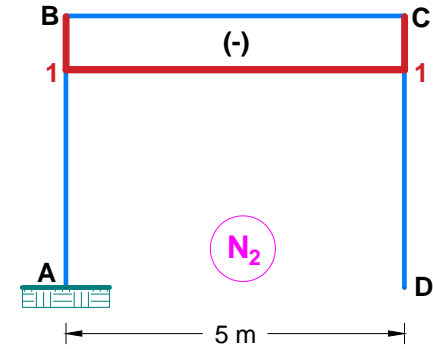
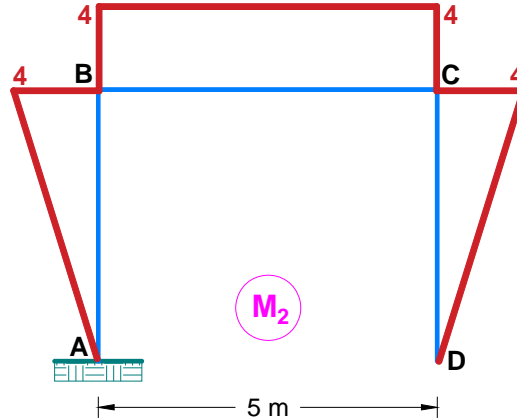
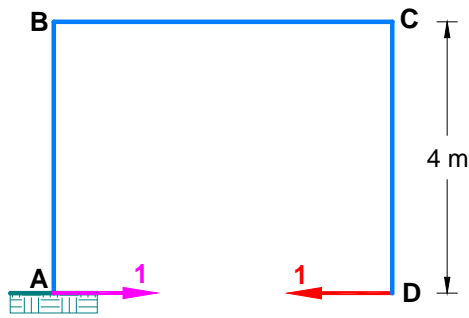
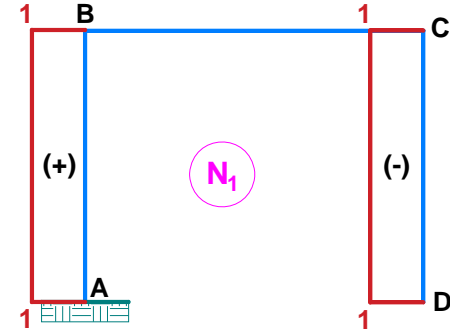
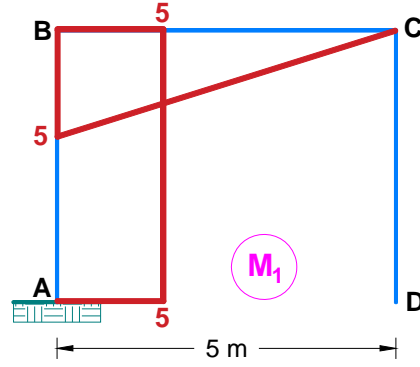
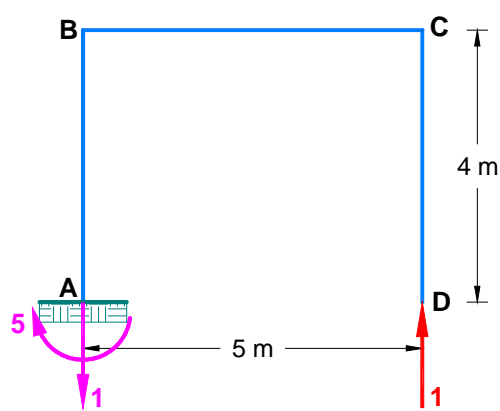
👉 Determinamos el grado de indeterminación:

$$GI = 3C - A = 3(1) - 1 = 2$$

👉 Eliminamos dos conexiones adicionales, y será en el nudo D:



Resolvemos dos pórticos isostáticos y calculamos los coeficientes de flexibilidad:



$$\Delta_{IT} = \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{b} A_{M_i} + \sum \alpha \frac{|t_1 + t_2|}{2} A_{N_i}$$

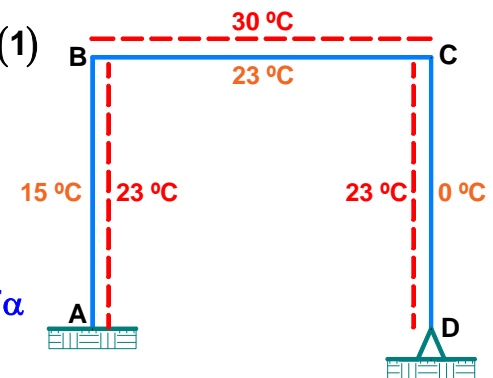
$$\Delta_{1T} = \alpha \frac{|23 - 15|}{0.3} (4)(5) + \alpha \frac{|23 - 30|}{0.5} \left[ -\frac{1}{2} (5)(5) \right] + \alpha \frac{|23 + 15|}{2} (4)(1) - \alpha \frac{|23 + 0|}{2} (4)(1)$$

$$\therefore \Delta_{1T} = 388.33\alpha$$

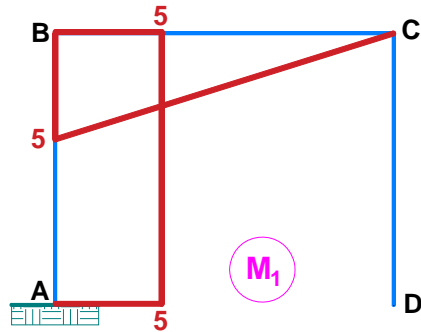
$$\Delta_{2T} = \alpha \frac{|15 - 23|}{0.3} \left[ -\frac{1}{2} (4)(4) \right] + \alpha \frac{|30 - 23|}{0.5} (5)(4) + \alpha \frac{|0 - 23|}{0.3} \left[ -\frac{1}{2} (4)(4) \right]$$

$$- \alpha \frac{|30 + 23|}{2} (5)(1)$$

$$\therefore \Delta_{2T} = -619.17\alpha$$



👉 **Calculamos los demás coeficientes de flexibilidad:**



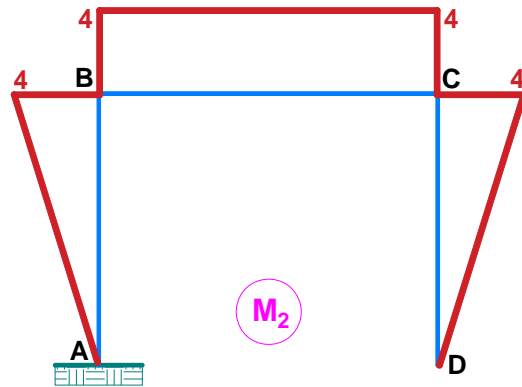
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} [(4)(5)(5)] + \frac{1}{4.63EI} \left[ \frac{1}{2}(5)(5) \left( \frac{2}{3} \right) (5) \right] \quad \therefore \delta_{11} = \frac{109}{EI}$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI} [(4)(5)(2)] - \frac{1}{4.63EI} \left[ \frac{1}{2}(5)(5)(4) \right] \quad \therefore \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{50.8}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1 \times 2}{EI} \left[ \frac{1}{2}(4)(4) \left( \frac{2}{3} \right) (4) \right] + \frac{1}{4.63EI} [(5)(4)(4)] \quad \therefore \delta_{22} = \frac{59.94}{EI}$$

**Reemplazamos los coeficientes de flexibilidad en las ecuaciones canónicas y obtenemos:**

$$\begin{cases} \frac{109}{EI} x_1 - \frac{50.8}{EI} x_2 + 388.33\alpha = 0 \\ -\frac{50.8}{EI} x_1 + \frac{59.94}{EI} x_2 - 619.17\alpha = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = V_D = 0.46 \text{ kN} \\ x_2 = H_D = 2.225 \text{ kN} \end{array} \right\}$$



👉 **Graficamos el DFC y DMF:**

